# PROBLEME DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

## CALCUL INTEGRAL

RODICA LUCA–TUDORACHE

# PROBLEME DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

## CALCUL INTEGRAL

# CUPRINS

# Capitolul 1
# INTEGRAREA FUNCŢIILOR

## §1. PRIMITIVE. INTEGRALE NEDEFINITE

Fie $f$ o funcţie reală definită pe un interval $I \subset I\!R$. Se numeşte *primitivă* a funcţiei $f$ pe $I$ o funcţie $F$ definită şi derivabilă pe $I$ astfel ca $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in I$. Dacă $F$ este o primitivă a funcţiei $f$ pe $I$ atunci $F + C$ este şi ea o primitivă a funcţiei $f$ pe $I$, oricare ar fi constanta $C$. Reciproc, orice primitivă a lui $f$ este de forma $F + C$.

Se numeşte *integrala nedefinită* a funcţiei $f$ mulţimea tuturor primitivelor funcţiei $f$ şi se notează cu $\int f(x)\,dx$.

*Proprietăţi* ale integralelor nedefinite:

a) Dacă $f : I \to I\!R$ admite primitive pe $I$, iar $a \in I\!R$ atunci şi $af$ admite primitive şi: $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$.

b) Dacă $f$ şi $g$ admit primitive pe $I$ atunci şi $f + g$ admite primitive pe $I$ şi:

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

O funcţie continuă pe un interval $I \subset I\!R$ admite primitive pe $I$. O funcţie care admite primitive pe un interval $I$ are proprietatea lui Darboux pe acel interval.

Calculul primitivelor şi al integralelor nedefinite se poate face direct folosind formulele de integrare ale funcţiilor elementare sau cu ajutorul unor *metode de calcul*, dintre care amintim:

**1.** *Metoda schimbării de variabilă.* Fie funcţiile $u : I \to J$ şi $f : J \to I\!R$ ($I$, $J$ intervale $\subset I\!R$). Presupunem că $u$ are derivată continuă pe $I$ şi că $f$ este continuă pe $J$. Dacă $F$ este o primitivă a lui $f$ atunci $\int f(u(x))u'(x)\,dx = F(u(x)) + \mathcal{C}$.
Vom nota cu $\mathcal{C}$ mulţimea funcţiilor constante definite pe un interval $I$, cu valori reale.

**2.** *Metoda integrării prin părţi.* Fie $f$ şi $g$ două funcţii definite pe intervalul $I$. Dacă $f$ şi $g$ au derivate continue pe $I$ atunci:

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

**3.** Folosirea unor *relaţii de recurenţă* în calculul integralelor nedefinite ale funcţiilor depinzând de un parametru $n$.

**4.** *Integrarea funcţiilor raţionale în* $x$. Fie funcţia $R : I \to I\!R$, $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, unde $P$ şi $Q$ sunt polinoame, $Q(x) \neq 0, \ \forall x \in I$. Dacă $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$ atunci fracţia $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ poate fi descompusă în fracţii simple, astfel:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_1}{x-b} + \cdots +$$
$$+ \frac{C_\gamma}{(x-c)^\gamma} + \frac{C_{\gamma-1}}{(x-c)^{\gamma-1}} + \cdots + \frac{C_1}{x-c} + \frac{M_\lambda x + N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda} + \frac{M_{\lambda-1}x + N_{\lambda-1}}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}} + \cdots +$$
$$+ \frac{M_1 x + N_1}{(x^2+px+q)} + \cdots + \frac{U_\nu x + V_\nu}{(x^2+ux+v)^\nu} + \frac{U_{\nu-1}x + V_{\nu-1}}{(x^2+ux+v)^{\nu-1}} + \cdots + \frac{U_1 x + V_1}{x^2+ux+v},$$

unde $Q(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \cdots (x-c)^\gamma (x^2+px+q)^\lambda \cdots (x^2+ux+v)^\nu$ cu $\alpha, \ \beta, \ldots, \gamma, \lambda, \ldots, \nu$ numere naturale, iar factorii $x^2+px+q, \ldots, x^2+ux+v$ au rădăcini complexe. Coeficienţii de la numărătorii fracţiilor de mai sus se determină aducând fracţiile la acelaşi numitor şi identificând coeficienţii termenilor asemenea.

Dacă $\operatorname{grad} P \geq \operatorname{grad} Q$ atunci se efectuează împărţirea lui $P(x)$ la $Q(x)$ şi se obţine: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = R_1(x) + \dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, unde $R_1(x)$ este un polinom în $x$ şi $\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ este o fracţie de forma studiată mai sus.

**5.** *Integrarea funcţiilor raţionale în* $\sin x$ *şi* $\cos x$. Fie $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, unde $R(u,v) = \dfrac{P(u,v)}{Q(u,v)}$ este o funcţie raţională de două variabile. Funcţia $R(\sin x, \cos x)$ este definită pe un interval $I = (a,b)$ şi $Q(\sin x, \cos x) \neq 0, \ \forall x \in I$.

Dacă $-\pi < a < b < \pi$ atunci substituţia $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$ conduce la calculul integralei nedefinite a unei funcţii raţionale în $t$. Folosind formulele:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

se obţine $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int R_1(t)\,dt.$

Calculul integralei poate fi simplificat în următoarele cazuri:

a) $R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x)$; se face substituţia $\cos x = t$;

b) $R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos x)$; se face substituţia $\sin x = t$;

c) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$; se face substituţia $t = \operatorname{tg} x, \ \ -\pi/2 < x < \pi/2$;

d) $R = R(\operatorname{tg} x)$; se face substituţia $t = \operatorname{tg} x, \ \ -\pi/2 < x < \pi/2$.

În aplicaţii aceste metode speciale de integrare se pot combina şi cu metodele generale

de integrare: schimbări de variabile, integrarea prin formule de recurenţă, etc. De asemenea se utilizează în mod curent diverse formule trigonometrice în transformarea funcţiilor de integrare.

**6.** *Integrarea funcţiilor iraţionale.*

a) Integralele de tipul:

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{s}}\right) dx$$

se raţionalizează ( se transformă în integrale de funcţii raţionale) prin schimbarea de variabilă: $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^k$, unde $k$ este numitorul comun al fracţiilor $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{p}{s}$.

b) Integralele de tipul:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx,\ \ x \in I,\ \ a \neq 0,\ \ b^2 - 4ac \neq 0 \text{ şi } ax^2+bx+c > 0,\ \forall\, x \in I$$

se raţionalizează prin substituţiile lui Euler:

b$_1$) $a > 0,\ b^2 - 4ac < 0 :\ \ \sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$;

b$_2$) $a < 0,\ c > 0 :\ \ \sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$;

b$_3$) $ax^2+bx+c = 0$ are rădăcinile reale $\alpha$ şi $\beta$ şi cel puţin una dintre rădăcini ($\alpha$ de exemplu) nu aparţine intervalului $I$; atunci se face substituţia:

$$\sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}} = t \Leftrightarrow \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = t|x-\alpha|.$$

c) Integralele de tipul:

$$\int x^m(ax^n+b)^p\, dx$$

numite *integrale binome* ($m,\ n,\ p \in Q$) pot fi raţionalizate în următoarele trei cazuri:

c$_1$) $p \in Z$: se face substituţia $x = t^r$, unde $r$ este numitorul comun al numerelor raţionale $m$ şi $n$;

c$_2$) $p \notin Z$, dar $\frac{m+1}{n} \in Z$: se face substituţia $ax^n + b = t^s$, unde $s$ este numitorul lui $p$, ($p = \frac{r}{s}$);

c$_3$) $\frac{m+1}{n} \notin Z$, dar $\frac{m+1}{n} + p \in Z$: se face substituţia $a + bx^{-n} = t^s$.

Prezentăm în tabelul de mai jos câteva funcţii si integralele lor nedefinite, unde $I$ este un interval din $I\!R$:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $f : I\!R \to I\!R$<br>$f(x) = x^n,\ \ n \in I\!N$ | $\displaystyle\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}.$ |
| 2. | $f : I \to I\!R,\ \ I \subset (0,\infty)$<br>$f(x) = x^a,\ \ a \in I\!R \setminus \{-1\}$ | $\displaystyle\int x^a\, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + \mathcal{C}.$ |

| | | |
|---|---|---|
| 3. | $f : I \to \mathbb{R},\ \ I \subset \mathbb{R}^*$<br>$f(x) = \dfrac{1}{x}$ | $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \ln\lvert x\rvert + \mathcal{C}.$ |
| 4. | $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$<br>$f(x) = a^x,\ \ a > 0,\ \ a \neq 1$ | $\displaystyle\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + \mathcal{C}.$ |
| 5. | $f : I \to \mathbb{R},\ \ I \subset \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$<br>$f(x) = \dfrac{1}{x^2 - a^2},\ \ a \neq 0$ | $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + \mathcal{C}.$ |
| 6. | $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$<br>$f(x) = \dfrac{1}{x^2 + a^2},\ \ a \neq 0$ | $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{a}\, \mathrm{arctg}\frac{x}{a} + \mathcal{C}.$ |
| 7. | $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$<br>$f(x) = \sin x$ | $\displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x + \mathcal{C}.$ |
| 8. | $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$<br>$f(x) = \cos x$ | $\displaystyle\int \cos x\, dx = \sin x + \mathcal{C}.$ |
| 9. | $f : I \to \mathbb{R}$<br>$I \subset \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ \ k \in Z\right\}$<br>$f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \mathrm{tg}\, x + \mathcal{C}.$ |
| 10. | $f : I \to \mathbb{R}$<br>$I \subset \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ \ k \in Z\}$<br>$f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ | $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\mathrm{ctg} x + \mathcal{C}.$ |
| 11. | $f : I \to \mathbb{R}$<br>$I \subset \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ \ k \in Z\right\}$<br>$f(x) = \mathrm{tg}\, x$ | $\displaystyle\int \mathrm{tg}\, x\, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + \mathcal{C}.$ |
| 12. | $f : I \to \mathbb{R}$<br>$I \subset \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ \ k \in Z\}$<br>$f(x) = \mathrm{ctg}\, x$ | $\displaystyle\int \mathrm{ctg}\, x\, dx = \ln\lvert\sin x\rvert + \mathcal{C}.$ |
| 13. | $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$<br>$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}},\ \ a \neq 0$ | $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\, dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + \mathcal{C}.$ |
| 14. | $f : I \to \mathbb{R},\ \ I \subset (-\infty, -a)$ sau<br>$I \subset (a, \infty),\ \ a > 0$<br>$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ | $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx = \ln\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2}\rvert + \mathcal{C}.$ |
| 15. | $f : I \to \mathbb{R},\ \ I \subset (-a, a),\ \ a > 0$<br>$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ | $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \arcsin\frac{x}{a} + \mathcal{C}.$ |

## PROBLEME REZOLVATE

**1.** Ţinând seama de faptul că orice funcţie continuă pe un interval $I$ are o primitivă, să se arate că următoarele funcţii au primitive pe $I\!R$:

a) $f : I\!R \to I\!R,\ \ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x \in I\!R \setminus \{0\}; \\ 1, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

b) $f : I\!R \to I\!R,\ \ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} e^{-1/x^2}, & \text{dacă } x \in I\!R \setminus \{0\}; \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

**Rezolvare.** Funcţiile de mai sus sunt continue pe $I\!R$. Într-adevăr, în orice punct $x \neq 0$, fiind funcţii elementare, rezultă că acestea sunt continue. În punctul $x = 0$ avem:

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} e^{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x^2}}{e^{1/x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\frac{2}{x^3}}{-\frac{2}{x^3} e^{1/x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0 = f(0)$.

Rezultă că funcţiile sunt continue şi în punctul $x = 0$, deci sunt continue pe $I\!R$ şi în consecinţă admit primitive.

**2.** Să se arate că următoarele funcţii nu posedă primitive pe $I\!R$:

a) $f : I\!R \to I\!R,\ \ f(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0; \\ 1, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

b) $f : I\!R \to I\!R,\ \ f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0; \\ -1, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

c) $f : I\!R \to I\!R,\ \ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x \neq 0; \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

**Rezolvare.** a) Să considerăm funcţia $G(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x},\ \ x \neq 0$. Deoarece $G'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x},\ \ \forall\, x \neq 0$ rezultă că $G|_{(-\infty,0)}$ (respectiv $G|_{(0,\infty)}$) este o primitivă pentru funcţia $f|_{(-\infty,0)}$ (respectiv $f|_{(0,\infty)}$).

Să presupunem că funcţia $f$ ar admite primitive. Atunci o primitivă $F$ a sa ar avea forma:

$$F(x) = \begin{cases} G(x) + c_1, & \text{dacă } x < 0; \\ G(x) + c_2, & \text{dacă } x > 0; \\ c_3, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Impunând condiţia ca $F$ să fie continuă în punctul $x=0$ obţinem:
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x) = F(0)$ sau $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (G(x)+c_1) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (G(x)+c_2) = c_3$.
Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} G(x) = 0$ obţinem $c_1 = c_2 = c_3$. Deci:

$$F(x) = \begin{cases} G(x)+c_1, & \text{dacă } x \neq 0; \\ c_1, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Funcţia $F$ fiind primitivă, trebuie să fie şi derivabilă pe $I\!R$, iar $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in I\!R$. Să calculăm mai întâi derivata funcţiei $F$ în punctul $x=0$:

$$F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{G(x)+c_1-c_1}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$$

Deci $F$ este derivabilă în punctul $x=0$ şi $F'(0)=0$. Deoarece $F'(0) \neq f(0) = 1$, deducem că presupunerea făcută este falsă, deci $F$ nu poate fi primitivă pentru funcţia $f$.

b) Să considerăm funcţia $g : I\!R \to I\!R$,

$$g(x) = \begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0; \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Fiind o funcţie continuă pe $I\!R$ rezultă că ea admite primitive. Fie $G$ o astfel de primitivă.

De asemenea să considerăm funcţia:

$$H(x) = x^2 \cos\frac{1}{x} - 2G(x), \quad x \neq 0.$$

Se observă că $H'(x) = 2x\cos\dfrac{1}{x} + \sin\dfrac{1}{x} - 2x\cos\dfrac{1}{x} = \sin\dfrac{1}{x} = f(x)$, $\forall\, x \neq 0$. Deci $H|_{(-\infty,0)}$ (respectiv $H|_{(0,\infty)}$) este o primitivă pentru funcţia $f|_{(-\infty,0)}$ (respectiv $f|_{(0,\infty)}$).

Rezultă atunci că o primitivă $F(x)$ a funcţiei $f$, în ipoteza că ar exista, ar avea forma:

$$F(x) = \begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x} - 2G(x) + c_1, & \text{dacă } x < 0; \\ c_2, & \text{dacă } x = 0; \\ x^2\cos\dfrac{1}{x} - 2G(x) + c_3, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Funcţia $F$ este continuă pe $I\!R$, deci:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F(x) = \lim_{x\to 0}\left(x^2\cos\frac{1}{x} - 2G(x) + c_1\right) = -2G(0) + c_1 =$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x) = \lim_{x\to 0}\left(x^2\cos\frac{1}{x} - 2G(x) + c_3\right) = -2G(0) + c_3 = F(0) = c_2,$$

de unde rezultă că $c_1 = c_3$ şi $c_2 = -2G(0) + c_1$.

Obţinem astfel:

$$F(x) = \begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x} - 2G(x) + c_1, & \text{dacă } x \neq 0; \\ -2G(0) + c_1, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Să studiem acum derivabilitatea acestei funcţii $F$ în punctul $x=0$. Avem:

$$F'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x} - 2G(x) + c_1 + 2G(0) - c_1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(x\cos\frac{1}{x} - 2\frac{G(x)-G(0)}{x}\right) = -2G'(0) = -2g(0) = 0.$$

Deci $F$ este derivabilă în $x = 0$ şi $F'(0) = 0 \neq f(0) = -1$. Rezultă că $F$ nu poate fi primitivă a funcţiei $f$, deci $f$ nu admite primitive pe mulţimea numerelor reale.

c) Funcţia $f$ se scrie ca o sumă de funcţii $f = f_1 + f_2$, unde:

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x \neq 0; \\ 1, & \text{dacă } x = 0, \end{cases} \quad \text{iar } f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \neq 0; \\ -1, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Deoarece $f_1$ admite primitive (este continuă pe $\mathbb{R}$), iar $f_2$ nu are proprietatea lui Darboux, deci nu are primitive pe $\mathbb{R}$, rezultă că $f$ nu admite nici ea primitive pe $\mathbb{R}$.

**3.** Se consideră funcţia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0; \\ a, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Să se arate că $f$ posedă o primitivă dacă şi numai dacă $a = 0$.

**Rezolvare.** Să presupunem mai întâi că $f$ admite primitive pe $[-1, 1]$. Dacă am presupune prin reducere la absurd că $a \neq 0$ atunci rezultă, urmând raţionamentul din Problema 2, b) că $f$ nu poate admite primitive. Deci în mod necesar $a = 0$.

Reciproc, să presupunem că $a = 0$. Atunci se arată (vezi Problema 2, b)) că funcţia:

$$F(x) = \begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x} - 2G(x) + c_1, & \text{dacă } x \neq 0; \\ -2G(0) + c_1, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$$

unde $G$ este o primitivă a funcţiei continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0; \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$$

este o primitivă a funcţiei $f$ pe intervalul $[-1, 1]$, ($F$ este derivabilă pe $(-1, 1)$ şi $F'(x) = f(x)$).

**4.** Să se arate că funcţia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0; \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$$

nu admite primitive. Să se deducă de aici că dacă o funcţie $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ admite primitive nu rezultă, în general, că şi funcţia $g^2$ admite primitive.

**Rezolvare.** Presupunem că funcţia $f$ admite primitive. Deoarece:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(1 - \cos\dfrac{2}{x}\right), & \text{dacă } x \neq 0; \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$$

atunci se arată în mod asemănător Problemei 2 b) că o primitivă a funcţiei $f$ are în mod necesar forma:

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}x^2\sin\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2}G(x), & \text{dacă } x\in[-1,1]\setminus\{0\};\\ -\dfrac{1}{2}G(0), & \text{dacă } x=0,\end{cases}$$

unde $G$ este o primitivă a funcţiei continue $g:[-1,1]\to I\!\!R$,

$$g(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{2}{x}, & \text{dacă } x\in[-1,1]\setminus\{0\};\\ 0, & \text{dacă } x=0.\end{cases}$$

Într-adevăr pentru $x\neq 0$ avem:

$F'(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{2}{x}-\dfrac{x^2}{4}\cdot\dfrac{2}{x^2}\cos\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2}G'(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2}x\sin\dfrac{2}{x}=$
$=\sin^2\dfrac{1}{x}=f(x).$

Dar derivata funcţiei $F$ în punctul $x=0$ este diferită de valoarea funcţiei $f$ în punctul $x=0$:

$F'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x}{2}+\frac{1}{4}x^2\sin\frac{2}{x}-\frac{1}{2}G(x)+\frac{1}{2}G(0)}{x}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{G(x)-G(0)}{x}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}g(0)=$
$=\dfrac{1}{2}\neq f(0)=0.$

Deducem că funcţia $f$ nu admite primitive. Combinând acum Problema 3 şi Problema 4 rezultă că dacă o funcţie $g$ admite primitive nu rezultă în general că $g^2$ admite primitive.

**5.** Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\displaystyle\int\frac{x^5}{(4+x^3)^2}\,dx,\ x\in I,\ -\sqrt[3]{4}\notin I;$ b) $\displaystyle\int\sin^2x\,dx,\ x\in I\!\!R;$

c) $\displaystyle\int\cos^3x\,dx,\ x\in I\!\!R;$ d) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+2x+5},\ x\in I\!\!R;$

e) $\displaystyle\int e^{\sin 2x}\cos 2x\,dx,\ x\in I\!\!R;$ f) $\displaystyle\int 9x^2\sqrt[3]{10-x^3}\,dx,\ x\in I\!\!R;$

g) $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx,\ x\in I\!\!R;$ h) $\displaystyle\int x\ln(1+x^2)\,dx,\ x\in I\!\!R;$

i) $\displaystyle\int\frac{\ln(x+2)}{(x+2)^3}\,dx,\ x\in(-2,\infty).$

**Rezolvare.** a) $I=\dfrac{1}{3}\displaystyle\int\frac{3x^2\cdot x^3}{(4+x^3)^2}\,dx.$ Notăm $4+x^3=t\ \Rightarrow\ 3x^2\,dx=dt$. Deci:

$I=\dfrac{1}{3}\displaystyle\int\frac{(t-4)\,dt}{t^2}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}-\frac{4}{3}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{3}\ln|t|+\frac{4}{3t}+\mathcal{C}=\frac{1}{3}\ln|x^3+4|+$
$+\dfrac{4}{3(x^3+4)}+\mathcal{C}.$

b) Avem: $\displaystyle\int\sin^2x\,dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\int\frac{dx}{2}-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+\mathcal{C}.$

c) $I=\displaystyle\int\cos^3x\,dx=\int\cos^2x\cdot\cos x\,dx=\int(1-\sin^2x)(\sin x)'\,dx.$ Notăm $\sin x=t$. Rezultă:

$$I=\int(1-t^2)\,dt=t-\frac{t^3}{3}+\mathcal{C}=\sin x-\frac{\sin^3x}{3}+\mathcal{C}.$$

d) $I = \int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4}$. Notăm $x+1=t \Rightarrow dx = dt$. Obţinem:

$I = \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}\text{arctg}\,\frac{t}{2} + \mathcal{C} = \frac{1}{2}\text{arctg}\frac{x+1}{2} + \mathcal{C}$.

e) $I = \int e^{\sin 2x}\cdot\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int e^{\sin 2x}\cdot(\sin 2x)'\,dx$. Notăm $\sin 2x = t \Rightarrow 2\cos 2x\,dx = = dt$. Deci: $I = \frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t + \mathcal{C} = \frac{1}{2}e^{\sin 2x} + \mathcal{C}$.

f) $I = \int 9x^2\cdot\sqrt[3]{10-x^3}\,dx = -3\int(-3x^2)\cdot\sqrt[3]{10-x^3}\,dx$. Notăm $10-x^3 = t \Rightarrow -3x^2\,dx = dt$. Deci $I = -3\int\sqrt[3]{t}\,dt = -3\frac{3}{4}t^{4/3} + \mathcal{C} = -\frac{9}{4}(10-x^3)^{4/3} + \mathcal{C}$.

g) $I = \int e^x\sin x\,dx = \int(e^x)'\sin x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x - - \int(e^x)'\cos x\,dx = e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x - e^x\cos x - I$.

Am folosit de două ori formula integrării prin părţi. Rezultă astfel:

$I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + \mathcal{C}$.

h) $I = \int x\ln(1+x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int(x^2)'\ln(1+x^2)\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\int x^2\frac{2x}{1+x^2}\,dx = = \frac{1}{2}x^2\ln(1+x^2) - \int\frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln(1+x^2) - \int\frac{(x^3+x)-x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln(1+x^2) - -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \mathcal{C} = \frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2) - -\frac{x^2}{2} + \mathcal{C}$.

i) $I = \int\frac{\ln(x+2)}{(x+2)^3}\,dx = -\frac{1}{2}\int\frac{-2}{(x+2)^3}\cdot\ln(x+2)\,dx = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{(x+2)^2}\right)'\cdot\ln(x+ +2)\,dx = -\frac{1}{2(x+2)^2}\ln(x+2) + \frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+2)^2}\cdot\frac{1}{x+2}\,dx = -\frac{1}{2(x+2)^2}\ln(x+2) - -\frac{1}{4(x+2)^2} + \mathcal{C}$.

**6.** Să se stabilească o formulă de recurenţă pentru:

a) $I_{m,n} = \int\sin^m x\cdot\cos^n x\,dx,\ \ x\in\mathbb{R};\ \ m,n\in\mathbb{N};\ \ m\geq 2$ sau $n\geq 2$.

b) $I_n = \int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n},\ \ x\in\mathbb{R},\ \ a\neq 0,\ \ n\in\mathbb{N}^*$.

**Rezolvare.** a) Vom determina două relaţii de recurenţă, una care să ne permită să scădem gradul sinusului, iar alta a cosinusului. Pentru $m\geq 2$ avem:

$I_{m,n} = \int\sin^{m-1}x\cdot\cos^n x\cdot\sin x\,dx = -\int\sin^{m-1}x\cdot\cos^n x\cdot(\cos x)'\,dx =$

$= -\frac{1}{n+1}\int\sin^{m-1}x\cdot(\cos^{n+1}x)'\,dx = -\frac{1}{n+1}\sin^{m-1}x\cdot\cos^{n+1}x +$

$+\frac{m-1}{n+1}\int\sin^{m-2}x\cdot\cos^{n+2}x\,dx = -\frac{1}{n+1}\sin^{m-1}x\cdot\cos^{n+1}x +$

$$+\frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2}x(1-\sin^2 x)\cdot\cos^n x\,dx = -\frac{1}{n+1}\sin^{m-1}x\cdot\cos^{n+1}x+\frac{m-1}{n+1}I_{m-2,n}-$$
$$-\frac{m-1}{n+1}I_{m,n}.$$

Am obţinut relaţia:

$$I_{m,n} = -\frac{1}{n+1}\sin^{m-1}x\cdot\cos^{n+1}x+\frac{m-1}{n+1}I_{m-2,n}-\frac{m-1}{n+1}I_{m,n},$$

de unde rezultă:

$$I_{m,n} = -\frac{1}{n+m}\sin^{m-1}x\cdot\cos^{n+1}x+\frac{m-1}{n+m}I_{m-2,n},$$

relaţie valabilă de altfel pentru $\forall\, m,\, n \in I\!R,\ \ m \neq -n$.

Pentru a obţine relaţia analoagă pentru scăderea gradului cosinusului ($n \geq 2$) procedăm la fel cu cazul precedent sau facem schimbarea de variabilă $\frac{\pi}{2}-x=y$. Atunci avem:

$$I_{m,n} = -\int \cos^m y\cdot\sin^n y\,dy = \frac{1}{n+m}\sin^{n-1}y\cdot\cos^{m+1}y-\frac{n-1}{n+m}\int \sin^{n-2}y\cdot\cos^m y\,dy =$$
$$=\frac{1}{n+m}\sin^{m+1}x\cdot\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{n+m}\int \sin^m x\cdot\cos^{n-2}x\,dx.$$

Rezultă:

$$I_{m,n} = \frac{1}{n+m}\sin^{m+1}x\cdot\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{m+n}I_{m,n-2},$$

relaţie valabilă pentru $\forall\, m,\, n \in I\!R,\ \ m = -n$.

b) Avem:

$$I_n = \frac{1}{a^2}\int\frac{a^2+x^2}{(a^2+x^2)^n}\,dx-\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2}{(a^2+x^2)^n}\,dx = \frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{a^2}\int x\cdot\frac{x}{(a^2+x^2)^n}\,dx =$$
$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{1}{2a^2(n-1)}\int x\cdot\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right)'dx = \frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}-$$
$$-\frac{1}{2a^2(n-1)}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}+\frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}},\quad n\neq 1.$$

Pentru $n=1$: $I_1 = \int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+\mathcal{C}$.

**7.** Să se calculeze, utilizând Problema 6, următoarele integrale:

a) $I = \int \sin^4 x\cdot\cos^2 x,\ \ x\in I\!R$; b) $I = \int\frac{1}{(x^2+4)^3}\,dx,\ \ x\in I\!R$.

**Rezolvare.** a) Conform relaţiei obţinută la problema precedentă, punctul a), avem:

$$I_{4,2} = -\frac{1}{6}\sin^3 x\cdot\cos^3 x+\frac{3}{6}I_{2,2} = -\frac{1}{6}\sin^3 x\cdot\cos^3 x+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}\sin x\cdot\cos^3 x+\frac{1}{4}I_{0,2}\right] =$$
$$=-\frac{1}{6}\sin^3 x\cdot\cos^3 x-\frac{1}{8}\sin x\cdot\cos^3 x+\frac{1}{8}\int\cos^2 x\,dx = -\frac{1}{6}\sin^3 x\cdot\cos^3 x-\frac{1}{8}\sin x\cdot\cos^3 x+$$
$$+\frac{1}{8}\int\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = -\frac{1}{6}\sin^3 x\cdot\cos^3 x-\frac{1}{8}\sin x\cdot\cos^3 x+\frac{x}{16}+\frac{1}{32}\sin 2x+\mathcal{C}.$$

b) Aplicând formula din Problema 6, b) obţinem:

$$I_3 = \int\frac{dx}{(x^2+4)^3} = \frac{1}{8\cdot 2}\cdot\frac{x}{(x^2+4)^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}I_2 = \frac{x}{16(x^2+4)^2}+\frac{3}{16}\left[\frac{1}{8}\cdot\frac{x}{x^2+4}+\right.$$

$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}I_1\Big] = \frac{x}{16(x^2+4)^2} + \frac{3}{128}\cdot\frac{x}{x^2+4} + \frac{3}{128}\int\frac{dx}{x^2+4} = \frac{x}{16(x^2+4)^2} + \frac{3x}{128(x^2+4)} +$$
$$+\frac{3}{256}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + \mathcal{C}.$$

**8.** Dacă notăm cu $I_n = \int x^n e^{ax}\sin bx\,dx$ , $K_n = \int x^n e^{ax}\cos bx\,dx$ să se stabilească formulele de recurenţă:

$$(n+1)I_n = x^{n+1}e^{ax}\sin bx - aI_{n+1} - bK_{n+1},$$
$$(n+1)K_n = x^{n+1}e^{ax}\cos bx + bI_{n+1} - aK_{n+1},\quad n\neq -1.$$

**Rezolvare.** Integrăm prin părţi:

$$I_n = \int x^n e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{n+1}\int (x^{n+1})' e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}e^{ax}\sin bx -$$
$$-\frac{1}{n+1}\int x^{n+1}(ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx)\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{n+1}I_{n+1} - \frac{b}{n+1}K_{n+1}.$$

Obţinem: $(n+1)I_n = x^{n+1}e^{ax}\sin bx - aI_{n+1} - bK_{n+1},\quad n\neq -1.$

În mod asemănător avem:

$$K_n = \int x^n e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{n+1}\int (x^{n+1})' e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}e^{ax}\cos bx -$$
$$-\frac{1}{n+1}\int x^{n+1}(ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx)\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}e^{ax}\cos bx - \frac{a}{n+1}K_{n+1} + \frac{b}{n+1}I_{n+1}.$$

Deci: $(n+1)K_n = x^{n+1}e^{ax}\cos bx + bI_{n+1} - aK_{n+1},\quad n\neq -1.$

**9.** Să se calculeze integralele:

a) $\displaystyle\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ x\in(-1,1)$; b) $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx,\ x\in(-1,1)$;

c) $\displaystyle\int \frac{x^2\mathrm{arctg}x}{1+x^2}\,dx,\ x\in I\!R$; d) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx,\ x\in(0,\infty)$; e) $\displaystyle\int x^3\mathrm{ch}\,2x\,dx,\ x\in I\!R.$

**Rezolvare.** a) Avem:

$$I = -\int(\sqrt{1-x^2})'\arcsin x\,dx = -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$
$$= -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x + \mathcal{C}.$$

b) $$I = \int\frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx = \int\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)'\cdot\arcsin x\,dx = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x -$$
$$-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x - \int\frac{x}{1-x^2}\,dx = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x +$$
$$+\frac{1}{2}\ln(1-x^2) + \mathcal{C}.$$

Integrala se mai poate calcula folosind schimbarea de variabilă: $\arcsin x = y$, $y\in(-\pi/2,\pi/2) \Rightarrow x = \sin y,\ \ dx = \cos y\,dy$. Deci:

$$I = \int\frac{y}{(1-\sin^2 y)^{3/2}}\cdot\cos y\,dy = \int\frac{y}{\cos^3 y}\cdot\cos y\,dy = \int\frac{y}{\cos^2 y}\,dy = \int y\cdot(\mathrm{tg}\,y)'\,dy =$$
$$= y\mathrm{tg}\,y - \int\mathrm{tg}\,y\,dy = y\mathrm{tg}\,y + \ln\cos y + \mathcal{C} = \arcsin x\cdot\mathrm{tg}\,(\arcsin x) + \ln\cos(\arcsin x) + \mathcal{C} =$$
$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + \mathcal{C}.$$

c) $I=\int\frac{(x^2+1)\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\,dx-\int\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\,dx=\int\operatorname{arctg}x\,dx-\int\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\,dx=x\operatorname{arctg}x-$
$-\int\frac{x}{1+x^2}\,dx-\int(\operatorname{arctg}x)'\operatorname{arctg}x\,dx=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+\mathcal{C}.$

d) $I=\int\frac{\ln x}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx$. Notăm $\frac{1}{x}=y>0\Rightarrow x=\frac{1}{y},\ \ dx=-\frac{1}{y^2}\,dy$. Deci:

$$I=\int\frac{\ln\frac{1}{y}}{\frac{1}{y^2}\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}}\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy=\int\frac{y\ln y}{\sqrt{1+y^2}}\,dy=\int(\sqrt{1+y^2})'\ln y\,dy=$$

$$=\sqrt{1+y^2}\ln y-\int\frac{\sqrt{1+y^2}}{y}\,dy=\sqrt{1+y^2}\ln y-\underbrace{\int\frac{dy}{y\sqrt{1+y^2}}}_{1/y=z}-\int\frac{y^2}{y\sqrt{1+y^2}}\,dy=$$

$$=\sqrt{1+y^2}\ln y-\int\frac{-\frac{1}{z^2}}{\frac{1}{z}\sqrt{1+\frac{1}{z^2}}}\,dz-\sqrt{1+y^2}=\sqrt{1+y^2}\ln y-\sqrt{1+y^2}+\int\frac{dz}{\sqrt{z^2+1}}=$$

$$=\sqrt{1+y^2}(\ln y-1)+\ln(z+\sqrt{z^2+1})+\mathcal{C}=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\left(\ln\frac{1}{x}-1\right)+\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\mathcal{C}=$$

$$=-\frac{(\ln x+1)\sqrt{1+x^2}}{x}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\mathcal{C}.$$

e) $I=\int x^3\operatorname{ch}2x\,dx=\frac{1}{2}\int x^3(\operatorname{sh}2x)'\,dx=\frac{1}{2}x^3\operatorname{sh}2x-\frac{3}{2}\int x^2\operatorname{sh}2x\,dx=\frac{1}{2}x^3\operatorname{sh}2x-$
$-\frac{3}{4}\int x^2(\operatorname{ch}2x)'\,dx=\frac{1}{2}x^3\operatorname{sh}2x-\frac{3}{4}x^2\operatorname{ch}2x+\frac{3}{2}\int x\operatorname{ch}2x\,dx=\frac{1}{2}x^3\operatorname{sh}2x-\frac{3}{4}x^2\operatorname{ch}2x+$
$+\frac{3}{4}\int x(\operatorname{sh}2x)'\,dx=\frac{1}{2}x^3\operatorname{sh}2x-\frac{3}{4}x^2\operatorname{ch}2x+\frac{3}{4}x\operatorname{sh}2x-\frac{3}{4}\int\operatorname{sh}2x\,dx=\frac{1}{2}x^3\operatorname{sh}2x-$
$-\frac{3}{4}x^2\operatorname{ch}2x+\frac{3}{4}x\operatorname{sh}2x-\frac{3}{8}\operatorname{ch}2x+\mathcal{C},$
$\left(\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ \operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ (\operatorname{sh}x)'=\operatorname{ch}x,\ (\operatorname{ch}x)'=\operatorname{sh}x\right).$

**10.** Să se calculeze integralele:

a) $\int\frac{5x-3}{x^2+4x+6}\,dx,\ \ x\in I\!R;$ b) $\int\frac{7x+9}{(x^2+2x+3)^2}\,dx,\ \ x\in I\!R;$

c) $\int\frac{2x^2-6}{x^3+2x^2-3x}\,dx,\ \ x\in I;\ 0,1,-3\notin I;$ d) $\frac{x^2+12x-12}{x^3(x-2)^2}\,dx,\ \ x\in I;\ 0,2\notin I;$

e) $\int\frac{x^9}{(x^4-1)^2}\,dx,\ \ x\in I,\ \pm1\notin I;$ f) $\int\frac{2x^3-x^2-1}{x^2(x^2+1)^2}\,dx,\ \ x\in I,\ 0\notin I.$

**Rezolvare.** a) $I=\int\frac{5x-3}{x^2+4x+6}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{5(2x+4)}{x^2+4x+6}\,dx-13\int\frac{dx}{x^2+4x+6}=$
$=\frac{5}{2}\ln(x^2+4x+6)-13\int\frac{dx}{(x+2)^2+2}=\frac{5}{2}\ln(x^2+4x+6)-\frac{13}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{2}}+\mathcal{C}.$

b) $I=\int\frac{7x+9}{(x^2+2x+3)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{7(2x+2)}{(x^2+2x+3)^2}\,dx+2\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}=$
$=-\frac{7}{2(x^2+2x+3)}+2\int\frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2}.$

Notând $x+1=y$ în ultima integrală, obţinem:

$$I_1 = \int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2} = \int \frac{dy}{(y^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2+y^2-y^2}{(y^2+2)^2}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2+2} -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{y^2}{(y^2+2)^2}\,dy = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\int y\cdot\left(\frac{1}{y^2+2}\right)'dy = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}y\cdot\frac{1}{y^2+2} -$$

$$-\frac{1}{4}\int \frac{1}{y^2+2}\,dy = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{y}{4(y^2+2)} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{y}{4(y^2+2)} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x+1}{4(x^2+2x+3)} + \mathcal{C}.$$

Deci: $I = -\dfrac{7}{2(x^2+2x+3)} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{\sqrt{2}} + \dfrac{x+1}{2(x^2+2x+3)} + \mathcal{C} = \dfrac{x-6}{2(x^2+2x+3)} +$

$+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{\sqrt{2}} + \mathcal{C}.$

c) $I = \displaystyle\int \frac{2x^2-6}{x^3+2x^2-3x}\,dx = \int \frac{2x^2-6}{x(x^2+2x-3)}\,dx = \int \frac{2x^2-6}{x(x-1)(x+3)}\,dx.$

Descompunem fracţia de sub semnul integrală în fracţii simple:

$$\frac{2x^2-6}{x(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+3} \Rightarrow$$

$2x^2-6 = Ax^2+2Ax-3A+Bx^2+3Bx+Cx^2-Cx \Rightarrow A+B+C=2,\ 2A+3B-C=$
$=0,\ -3A=-6.$

Rezultă $A=2,\ B=-1,\ C=1$. Deci:

$$I = 2\ln|x| - \ln|x-1| + \ln|x+3| + \mathcal{C}.$$

d) $I = \displaystyle\int \frac{x^2+12x-12}{x^3(x-2)^2}\,dx$. Avem:

$$\frac{x^2+12x-12}{x^3(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-2} + \frac{E}{(x-2)^2} \Rightarrow$$

$x^2+12x-12 = Ax^2(x-2)^2 + Bx(x-2)^2 + C(x-2)^2 + Dx^3(x-2) + Ex^3 \Rightarrow$

$x^2+12x-12 = Ax^4-4Ax^3+4Ax^2+Bx^3-4Bx^2+4Bx+Cx^2-4Cx+4C+Dx^4-2Dx^3+$
$+Ex^3 \Rightarrow A+D=0,\ -4A+B-2D+E=0,\ 4A-4B+C=1,\ 4B-4C=12,\ 4C=-12.$

Obţinem: $A=1,\ B=0,\ C=-3,\ D=-1,\ E=2$. Deci:

$$I = \int \frac{dx}{x} - 3\int \frac{dx}{x^3} - \int \frac{dx}{x-2} + 2\int \frac{dx}{(x-2)^2} = \ln|x| + \frac{3}{2x^2} - \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + \mathcal{C}.$$

e) $I = \displaystyle\int \frac{x^9}{(x^4-1)^2}\,dx = \int \frac{x^9}{x^8-2x^4+1}\,dx.$

Efectuăm împărţirea şi obţinem:

$$I = \int x\,dx + \int \frac{2x^5-x}{(x^4-1)^2}\,dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{2(x^5-x)}{(x^4-1)^2}\,dx + \int \frac{x}{(x^4-1)^2}\,dx = \frac{x^2}{2} +$$

$$+2\int \frac{x}{x^4-1}\,dx + \int \frac{x}{(x^4-1)^2}\,dx \overset{x^2=y}{=} \frac{x^2}{2} + \int \frac{dy}{y^2-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dy}{(y^2-1)^2} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| +$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{1-y^2}{(y^2-1)^2}\,dy + \frac{1}{2}\int \frac{y^2}{(y^2-1)^2}\,dy = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| - \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2-1} -$$

$-\dfrac{1}{4}\displaystyle\int y\cdot\left(\dfrac{1}{y^2-1}\right)' dy = \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{4}\dfrac{y}{y^2-1}+\dfrac{1}{4}\displaystyle\int\dfrac{dy}{y^2-1}+\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right| = \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3}{8}\ln\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right|-$
$-\dfrac{x^2}{4(x^4-1)}+\mathcal{C}.$

f) $I=\displaystyle\int\dfrac{2x^3-x^2-1}{x^2(x^2+1)^2}\,dx$. Avem:

$$\frac{2x^3-x^2-1}{x^2(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}\ \Rightarrow$$

$Ax(x^2+1)^2+B(x^2+1)^2+(Cx+D)x^2(x^2+1)+(Ex+F)x^2=2x^3-x^2-1\ \Rightarrow$

$Ax^5+2Ax^3+Ax+Bx^4+2Bx^2+B+Cx^5+Dx^4+Cx^3+Dx^2+Ex^3+Fx^2=2x^3-$
$-x^2-1\ \Rightarrow\ A+C=0,\ B+D=0,\ 2A+C+E=2,\ 2B+D+F=-1,\ A=0,\ B=-1.$

Obţinem: $A=0,\ B=-1,\ C=0,\ D=1,\ E=2,\ F=0$. Rezultă:

$$I=-\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{x^2+1}+\int\frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}+\operatorname{arctg}x-\frac{1}{x^2+1}+\mathcal{C}.$$

**11.** Să se calculeze:

a) $\displaystyle\int\cos 3x\cdot\sin^3 2x\,dx,\ \ x\in I\!R$; b) $\displaystyle\int\frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,dx,\ \ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$;

c) $\displaystyle\int\frac{dx}{5+4\sin x},\ \ x\in(-\pi,\pi)$; d) $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx,\ \ x\in I\!R$;

e) $\displaystyle\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx,\ \ x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$; f) $\displaystyle\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5},\ \ x\in I\!R$;

g) $\displaystyle\int\cos x\cdot\ln\cos x\,dx,\ \ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

**Rezolvare.** a) Notăm cu $I=\displaystyle\int\cos 3x\cdot\sin^3 2x\,dx$. Din formula $\sin 3x=3\sin x-$ $-4\sin^3 x$ rezultă $\sin^3 x=\dfrac{3\sin x-\sin 3x}{4}$, deci: $\sin^3 2x=\dfrac{3\sin 2x-\sin 6x}{4}$. Rezultă:

$I=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int\cos 3x\cdot(3\sin 2x-\sin 6x)\,dx=\dfrac{3}{8}\displaystyle\int(\sin 5x-\sin x)\,dx-\dfrac{1}{8}\displaystyle\int(\sin 9x+\sin 3x)\,dx=$
$=-\dfrac{3}{40}\cos 5x+\dfrac{3}{8}\cos x+\dfrac{1}{72}\cos 9x+\dfrac{1}{24}\cos 3x+\mathcal{C}.$

b) Avem: $I=\displaystyle\int\frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}=-\int\frac{(1-\cos^2 x)(\cos x)'}{\cos^5 x}\,dx.$

Notând $\cos x=y$, obţinem:

$I=-\displaystyle\int\frac{(1-y^2)\,dy}{y^5}=-\int\frac{dy}{y^5}+\int\frac{dy}{y^3}=\frac{1}{4y^4}-\frac{1}{2y^2}+\mathcal{C}=\frac{1}{4\cos^4 x}-\frac{1}{2\cos^2 x}+\mathcal{C}=$
$=\dfrac{1-2\cos^2 x}{4\cos^4 x}+\mathcal{C}.$

c) Notăm $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$. Atunci: $x=2\operatorname{arctg}t,\ \ dx=\dfrac{2}{1+t^2}\,dt$. Din relaţia $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, obţinem:

$$I=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}\,dt}{5+4\cdot\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{2\,dt}{5t^2+8t+5}=\frac{2}{5}\int\frac{dt}{t^2+\frac{8}{5}t+1}=\frac{2}{5}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{9}{25}}=$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{3} \text{arctg}\, \frac{t + \frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} + \mathcal{C} = \frac{2}{3} \text{arctg}\, \frac{5t+4}{3} + \mathcal{C} = \frac{2}{3} \text{arctg}\, \frac{5\text{tg}\,\frac{x}{2} + 4}{3} + \mathcal{C}.$$

d) Facem schimbarea de variabilă $\text{tg}\, x = t$. Rezultă $x = \text{arctg}\, t$, $dx = \dfrac{1}{1+t^2}\, dt$. Din relaţia $\sin^2 x = \dfrac{\text{tg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x}$ obţinem:

$$I = \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{1 + \frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int \frac{t^2}{(1+t^2)(2t^2+1)}\, dt.$$

Descompunem fracţia de sub semnul integrală de mai sus în fracţii simple:

$$\frac{t^2}{(1+t^2)(2t^2+1)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{2t^2+1} \Rightarrow$$

$2At^3 + 2Bt^2 + At + B + Ct^3 + Dt^2 + Ct + D = t^2 \Rightarrow 2A + C = 0,\ 2B + D = 1,\ A + C = = 0,\ B + D = 0.$

Rezultă $A = C = 0,\ B = 1,\ D = -1$. Deci:

$$I = \int \frac{dt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{2t^2+1} = \text{arctg}\, t - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{2}} = \text{arctg}\, t - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\, \text{arctg}\, t\sqrt{2} + \mathcal{C} =$$

$$= \text{arctg}\, (\text{tg}\, x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \text{arctg}\, (\sqrt{2}\, \text{tg}\, x) + \mathcal{C} = x - \frac{1}{\sqrt{2}} \text{arctg}\, (\sqrt{2}\, \text{tg}\, x) + \mathcal{C}.$$

e) $I = \displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx = \int \frac{\text{tg}\, x}{1 + \text{tg}\, x}\, dx.$

Notăm $\text{tg}\, x = t \Rightarrow x = \text{arctg}\, t,\ dx = \dfrac{1}{1+t^2}\, dt$. Deci:

$$I = \int \frac{t}{1+t} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int \frac{t}{(1+t)(1+t^2)}\, dt.$$

Avem: $\dfrac{t}{(1+t)(1+t^2)} = \dfrac{A}{t+1} + \dfrac{Bt+C}{t^2+1} \Rightarrow A(t^2+1) + (Bt+C)(t+1) = t.$

Rezultă $A + B = 0,\ C + B = 1,\ A + C = 0,$ deci $A = -\dfrac{1}{2},\ B = \dfrac{1}{2},\ C = \dfrac{1}{2}.$

Obţinem:

$$I = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{2} \int \frac{t+1}{t^2+1}\, dt = -\frac{1}{2} \ln|t+1| + \frac{1}{2} \text{arctg}\, t + \frac{1}{4} \ln(t^2+1) + C =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln|\text{tg}\, x + 1| + \frac{1}{4} \ln(\text{tg}^2 x + 1) + \frac{1}{2} x + \mathcal{C}.$$

f) Notăm $\text{tg}\, \dfrac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2\text{arctg}\, t,\ dx = \dfrac{2}{1+t^2}\, dt$. Folosind formulele $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ rezultă:

$$I = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}\, dt}{2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = \int \frac{2\, dt}{4t - 1 + t^2 + 5 + 5t^2} = \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 2} =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} \text{arctg}\, \frac{t + \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} + \mathcal{C} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{arctg}\, \frac{3t+1}{\sqrt{5}} +$$

$$+ \mathcal{C} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{arctg}\, \frac{3\text{tg}\,\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + \mathcal{C}.$$

g) $I=\int \cos x\cdot \ln\cos x\,dx=\int (\sin x)'\cdot \ln\cos x\,dx=\sin x\cdot\ln\cos x+\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx=$
$=\sin x\cdot\ln\cos x+\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}\,dx=\sin x\cdot\ln\cos x+\int \frac{dx}{\cos x}-\sin x.$

Integrala $I_1=\int \frac{dx}{\cos x}$ o calculăm notând $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Obţinem:

$I_1=\int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,dt=-2\int \frac{dt}{t^2-1}=-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\mathcal{C}=-\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right|+\mathcal{C}=$
$=\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right|+\mathcal{C}=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\mathcal{C}.$

Deci $I=\sin x\cdot\ln\cos x+\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\sin x+\mathcal{C}.$

**12.** Să se calculeze următoarele integrale binome:

a) $\int x^5\cdot\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx,\ \ x\in I\!R;$ b) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx,\ \ x\in(0,\infty);$

c) $\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx,\ \ x\in(0,\infty);$ d) $\int \frac{1}{x^4\cdot\sqrt{1+x^2}}\,dx,\ \ x\in(0,\infty);$

e) $\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx,\ \ x\in I\!R;$ f) $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}},\ \ x\in(a,b),\ 0\notin(a,b).$

**Rezolvare.** a) Avem $m=5,\ n=3,\ p=\frac{2}{3}$. Deoarece $\frac{m+1}{n}=\frac{6}{3}=2\in Z$ facem substituţia $x^3+1=t^3$, de unde rezultă $x=\sqrt[3]{t^3-1}$ şi $3x^2\,dx=3t^2\,dt$. Obţinem:

$I=\int x^3\cdot x^2\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx=\int (t^3-1)t^2\cdot\sqrt[3]{t^6}\,dt=\int t^4(t^3-1)\,dt=\frac{t^8}{8}-\frac{t^5}{5}+\mathcal{C}=$
$=\frac{1}{8}(x^3+1)^{8/3}-\frac{1}{5}(x^3+1)^{5/3}+\mathcal{C}.$

b) Avem $m=-\frac{1}{2},\ n=\frac{1}{4},\ p=\frac{1}{3}$. Deoarece $\frac{m+1}{n}=2\in Z$ notăm $x^{1/4}+1=t^3\Rightarrow$ $x=(t^3-1)^4,\ dx=12t^2(t^3-1)^3\,dt$. Rezultă:

$I=\int \frac{t}{(t^3-1)^2}12t^2(t^3-1)^3\,dt=12\int (t^6-t^3)\,dt=\frac{12}{7}t^7-3t^4+\mathcal{C}=\frac{12}{7}\left(x^{1/4}+1\right)^{7/3}-$
$-3\left(x^{1/4}+1\right)^{4/3}+\mathcal{C}=\frac{3}{7}\left(x^{1/4}+1\right)^{4/3}(4x^{1/4}-3)+\mathcal{C}=\frac{3}{7}(x^{1/4}+1)^{1/3}(4x^{1/2}+4x^{1/4}-$
$-3x^{1/4}-3)+\mathcal{C}=\frac{3}{7}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,(4\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3)+\mathcal{C}.$

c) $I=\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx=\int x^{3/2}\cdot\sqrt{1+x}\,dx$. Avem $m=\frac{3}{2},\ n=1,\ p=\frac{1}{2}$. Deoarece $\frac{m+1}{n}=\frac{5}{2},\ \frac{m+1}{n}+p=3\in Z$ facem substituţia $1+\frac{1}{x}=t^2\Rightarrow x=\frac{1}{t^2-1},\ dx=$ $=\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\,dt$. Deci:

$I=\int \frac{1}{(t^2-1)^{3/2}}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{t^2-1}}\cdot\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\,dt=\int \frac{-2t^2}{(t^2-1)^4}\,dt=\frac{1}{3}\int \frac{-6t}{(t^2-1)^4}\cdot t\,dt=$
$=\frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{(t^2-1)^3}\right)'\cdot t\,dt=\frac{1}{3}\frac{t}{(t^2-1)^3}-\frac{1}{3}\int \frac{dt}{(t^2-1)^3}=\frac{t}{3(t^2-1)^3}-\frac{1}{3}\int \frac{1-t^2}{(t^2-1)^3}\,dt-$

$$-\frac{1}{3}\int\frac{t^2}{(t^2-1)^3}\,dt=\frac{t}{3(t^2-1)^3}+\frac{1}{3}\int\frac{dt}{(t^2-1)^2}+\frac{1}{12}\int\frac{-4t}{(t^2-1)^3}\cdot t\,dt=\frac{t}{3(t^2-1)^3}+$$

$$+\frac{1}{3}\int\frac{dt}{(t^2-1)^2}+\frac{1}{12}\int\left(\frac{1}{(t^2-1)^2}\right)'\cdot t\,dt=\frac{t}{3(t^2-1)^3}+\frac{1}{3}\int\frac{dt}{(t^2-1)^2}+\frac{t}{12(t^2-1)^2}-$$

$$-\frac{1}{12}\int\frac{dt}{(t^2-1)^2}\,dt=\frac{t}{3(t^2-1)^3}+\frac{t}{12(t^2-1)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(t^2-1)^2}=\frac{t}{3(t^2-1)^3}+\frac{t}{12(t^2-1)^2}+$$

$$+\frac{1}{4}\int\frac{1-t^2}{(t^2-1)^2}\,dt+\frac{1}{4}\int\frac{t^2\,dt}{(t^2-1)^2}=\frac{t}{3(t^2-1)^3}+\frac{t}{12(t^2-1)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2-1}-$$

$$-\frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{t^2-1}\right)'\cdot t\,dt=\frac{t}{3(t^2-1)^3}+\frac{t}{12(t^2-1)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2-1}-\frac{t}{8(t^2-1)}+\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t^2-1}=$$

$$=\frac{t}{3(t^2-1)^3}+\frac{t}{12(t^2-1)^2}-\frac{t}{8(t^2-1)}-\frac{1}{16}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\mathcal{C}=\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}}}{3\frac{1}{x^3}}+\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}}}{12\frac{1}{x^2}}-\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}}}{8\frac{1}{x}}-$$

$$-\frac{1}{16}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x}}+1}\right|+\mathcal{C}=\sqrt{\frac{x+1}{x}}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{12}-\frac{x}{8}\right)-\frac{1}{16}\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right|+\mathcal{C}=$$

$$=\sqrt{\frac{x+1}{x}}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{12}-\frac{3x^2}{12}-\frac{x}{8}\right)+\frac{1}{16}\ln\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)-\frac{1}{16}\ln\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)+\mathcal{C}=$$

$$=\frac{x^2}{3}(x+1)\sqrt{\frac{x+1}{x}}-\frac{1}{8}x(2x+1)\sqrt{\frac{x+1}{x}}+\frac{1}{16}\ln\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)+\frac{1}{16}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})+\mathcal{C}=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+x)^3}-\frac{1}{8}(2x+1)\sqrt{x^2+x}+\frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)+\mathcal{C}.$$

d) Avem $m=-4,\ n=2,\ p=-\frac{1}{2}$. Deoarece $\frac{m+1}{n}=-\frac{3}{2}$, iar $\frac{m+1}{n}+p=-2\in Z$ facem schimbarea de variabilă $1+\frac{1}{x^2}=t^2\ \Rightarrow\ x^2=\frac{1}{t^2-1},\ x=\frac{1}{\sqrt{t^2-1}},\ dx=$ $=\frac{-t}{(t^2-1)^{3/2}}\,dt$. Obţinem:

$$I=\int\frac{-t}{(t^2-1)^{3/2}}(t^2-1)^2\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2-1}}}\,dt=\int\frac{-t(t^2-1)^{5/2}}{t(t^2-1)^{3/2}}\,dt=-\int(t^2-1)\,dt=$$

$$=-\frac{t^3}{3}+t+\mathcal{C}=-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}+\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/2}+\mathcal{C}=-\frac{1}{3}\frac{(x^2+1)^{3/2}}{x^3}+\frac{(x^2+1)^{1/2}}{x}+\mathcal{C}.$$

e) Aici $m=2,\ n=2,\ p=\frac{1}{2},\ \frac{m+1}{n}=\frac{3}{2}$, iar $\frac{m+1}{n}+p=2\in Z$. Notăm $1+4x^{-2}=$ $=t^2\Rightarrow x^2=\frac{4}{t^2-1},\ x=\frac{2}{\sqrt{t^2-1}},\ dx=\frac{-2t}{(t^2-1)^{3/2}}\,dt$. Deci:

$$I=\int\frac{4}{t^2-1}\cdot\sqrt{\frac{4}{t^2-1}+4}\cdot\frac{-2t}{(t^2-1)^{3/2}}\,dt=-16\int\frac{t^2}{(t^2-1)^3}\,dt=4\int\left(\frac{1}{(t^2-1)^2}\right)'\cdot t\,dt=$$

$$=\frac{4t}{(t^2-1)^2}-4\int\frac{dt}{(t^2-1)^2}=\frac{4t}{(t^2-1)^2}-4\int\frac{1-t^2}{(t^2-1)^2}\,dt-4\int\frac{t^2}{(t^2-1)^2}\,dt=\frac{4t}{(t^2-1)^2}+$$

$$+4\int\frac{dt}{t^2-1}+2\int\left(\frac{1}{t^2-1}\right)'\cdot t\,dt=\frac{4t}{(t^2-1)^2}+4\int\frac{dt}{t^2-1}+\frac{2t}{t^2-1}-2\int\frac{dt}{t^2-1}=$$

$= \dfrac{4t}{(t^2-1)^2} + \dfrac{2t}{t^2-1} + \ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right| + \mathcal{C} = \dfrac{4\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{\left(\frac{4}{x^2}\right)^2} + \dfrac{2\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{\frac{4}{x^2}} + \ln\left|\dfrac{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}-1}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+1}\right| + \mathcal{C} =$
$= \dfrac{1}{4}x^3\sqrt{x^2+4} + \dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+4} + \ln\dfrac{\sqrt{x^2+4}-x}{\sqrt{x^2+4}+x} + \mathcal{C} = \dfrac{1}{4}x^3\sqrt{x^2+4} + \dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+4} + \ln 4 -$
$-2\ln(\sqrt{x^2+4}+x) + \mathcal{C} = \dfrac{1}{4}x^3\sqrt{x^2+4} + \dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+4} - 2\ln(\sqrt{x^2+4}+x) + \mathcal{C} = \dfrac{1}{4}(x^3+$
$+2x)\sqrt{x^2+4} - 2\ln(\sqrt{x^2+4}+x) + \mathcal{C}.$

f) Avem $m=-1,\ n=2,\ p=-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{m+1}{n}=0\in Z$. Notăm $x^2+1=t^3 \Rightarrow x = \sqrt{t^3-1},\ dx = \dfrac{3t^2}{2\sqrt{t^3-1}}\,dt$. Rezultă:

$$I = \int \frac{3t^2}{2\sqrt{t^3-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t^3-1}\cdot t}\,dt = \frac{3}{2}\int \frac{t}{t^3-1}\,dt.$$

Descompunem fracţia $\dfrac{t}{t^3-1}$ în fracţii simple:

$\dfrac{t}{t^3-1} = \dfrac{A}{t-1} + \dfrac{Bt+C}{t^2+t+1} \Rightarrow At^2+At+A+Bt^2+Ct-Bt-C = t \Rightarrow$
$A+B=0,\ A+C-B=1,\ A-C=0.$

Obţinem $A=\dfrac{1}{3},\ B=-\dfrac{1}{3},\ C=\dfrac{1}{3}$. Deci:

$I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \dfrac{dt}{t-1} - \dfrac{1}{2}\int \dfrac{t-1}{t^2+t+1}\,dt = \dfrac{1}{2}\ln|t-1| - \dfrac{1}{4}\int \dfrac{2t+1}{t^2+t+1}\,dt +$
$+\dfrac{3}{4}\displaystyle\int \dfrac{dt}{t^2+t+1} = \dfrac{1}{2}\ln|t-1| - \dfrac{1}{4}\ln(t^2+t+1) + \dfrac{3}{4}\int \dfrac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{2}\ln|t-1| -$
$-\dfrac{1}{4}\ln(t^2+t+1) + \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \mathcal{C} = \dfrac{1}{2}\ln(\sqrt[3]{x^2+1}-1) - \dfrac{1}{4}\ln(\sqrt[3]{(x^2+1)^2} +$
$+\sqrt[3]{x^2+1}+1) + \dfrac{3}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2\sqrt[3]{x^2+1}-1}{\sqrt{3}}\right) + \mathcal{C} = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{(\sqrt[3]{x^2+1}-1)^2}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1} +$
$+\dfrac{3}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt[3]{x^2+1}-1}{\sqrt{3}} + \mathcal{C} = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{(\sqrt[3]{x^2+1}-1)^3}{(x^2+1)-1} + \dfrac{3}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt[3]{x^2+1}-1}{\sqrt{3}} + \mathcal{C} =$
$= \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{(\sqrt[3]{x^2+1}-1)^{3/2}}{|x|} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt[3]{x^2+1}-1}{\sqrt{3}} + \mathcal{C}.$

**13.** Să se calculeze integralele:

a) $\displaystyle\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x},\ x\in(-1,1)$; b) $\displaystyle\int x\sqrt{2+2x-x^2}\,dx,\ x\in I,\ 1\pm\sqrt{3}\notin I$;

c) $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}},\ x\in(-2,2)$; d) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-5x+4}},\ x\in(4,\infty)$;

e) $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}},\ x\in I,\ -1\notin I$; f) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1,1)$;

g) $\displaystyle\int\frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}},\ x\in(a,b)\subset(0,4),\ \frac{3}{2}\notin(a,b)$; h) $\displaystyle\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}},\ x\in$
$\in(a,b),\ 1\notin(a,b)$.

**Rezolvare.** a) Notăm $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = t \Rightarrow x = \dfrac{1-t^2}{t^2+1},\ dx = \dfrac{-4t}{(t^2+1)^2}\,dt$. Deci:

$$I = \int t \cdot \frac{t^2+1}{1-t^2} \cdot \frac{-4t}{(t^2+1)^2}\,dt = 4\int \frac{t^2}{(t^2+1)(t^2-1)}\,dt.$$

Avem: $\dfrac{t^2}{(t^2+1)(t^2-1)} = \dfrac{A}{t+1} + \dfrac{B}{t-1} + \dfrac{Ct+D}{t^2+1} \Rightarrow$

$A(t-1)(t^2+1) + B(t+1)(t^2+1) + (Ct+D)(t^2-1) = t^2 \Rightarrow$

$At^3 - At^2 + At - A + Bt^3 + Bt^2 + Bt + B + Ct^3 + Dt^2 - Ct - D = t^2 \Rightarrow$

$A+B+C=0,\ -A+B+D=1,\ A+B-C=0,\ -A+B-D=0.$

Obţinem: $A = -\dfrac{1}{4},\ B = \dfrac{1}{4},\ C = 0,\ D = \dfrac{1}{2}$. Deci:

$$I = -\int \frac{dt}{t+1} + \int \frac{dt}{t-1} + 2\int \frac{dt}{t^2+1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + 2\text{arctg}\, t + \mathcal{C} =$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1}\right| + 2\text{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \mathcal{C} = \ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right| + 2\text{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \mathcal{C}.$$

b) $I = \int x\cdot\sqrt{2+2x-x^2}\,dx = \int x\cdot\sqrt{3-(x-1)^2}\,dx$. Notând $x-1=y$ obţinem:

$$I = \int (y+1)\sqrt{3-y^2}\,dy = \int y\sqrt{3-y^2}\,dy + \underbrace{\int \sqrt{3-y^2}\,dy}_{I_1} = -\frac{1}{2}\int (3-y^2)'\sqrt{3-y^2}\,dy +$$

$$+ I_1 = -\frac{1}{3}(3-y^2)^{3/2} + I_1.$$

Apoi: $I_1 = \int \sqrt{3-y^2}\,dy = \int \dfrac{3}{\sqrt{3-y^2}}\,dy - \int \dfrac{y^2}{\sqrt{3-y^2}}\,dy = 3\arcsin\dfrac{y}{\sqrt{3}} +$

$$+ \int \left(\sqrt{3-y^2}\right)' y\,dy = 3\arcsin\frac{y}{\sqrt{3}} + y\sqrt{3-y^2} - \int \sqrt{3-y^2}\,dy,$$

de unde rezultă: $I_1 = \dfrac{3}{2}\arcsin\dfrac{y}{\sqrt{3}} + \dfrac{y}{2}\sqrt{3-y^2} + \mathcal{C}$. Deci:

$$I = -\frac{1}{3}(3-y^2)^{3/2} + \frac{3}{2}\arcsin\frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{y}{2}\sqrt{3-y^2} + \mathcal{C} = -\frac{1}{3}(2+2x-x^2)^{3/2} + \frac{3}{2}\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}} +$$

$$+ \frac{x-1}{2}\sqrt{2+2x-x^2} + \mathcal{C} = \frac{1}{6}(2x^2-x-7)\sqrt{2+2x-x^2} + \frac{3}{2}\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}} + \mathcal{C}.$$

c) Facem schimbarea de variabilă $x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t\,dt$.Obţinem:

$$I = \int \frac{4\sin^2 t}{2\cos t}\cdot 2\cos t\,dt = 2\int (1-\cos 2t)\,dt = 2t - \sin 2t + \mathcal{C} = 2\arcsin\frac{x}{2} -$$

$$-\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + \mathcal{C}.$$

d) Notăm $\sqrt{\dfrac{x-1}{x-4}} = t \Rightarrow \sqrt{x^2-5x+4} = t(x-4),\ x = \dfrac{4t^2-1}{t^2-1},\ dx = \dfrac{-6t}{(t^2-1)^2}\,dt$. Deci:

$$I = \int \frac{\frac{-6t}{(t^2-1)^2}}{\frac{4t^2-1}{t^2-1}\cdot t\left(\frac{4t^2-1}{t^2-1}-4\right)}\,dt = \int \frac{-6}{3(4t^2-1)}\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}}\right| +$$

$$+\mathcal{C} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\sqrt{\frac{x-1}{x-4}}-1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x-4}}+1}\right| + \mathcal{C} = \frac{1}{2}\ln\frac{2\sqrt{x-1}+\sqrt{x-4}}{2\sqrt{x-1}-\sqrt{x-4}} + \mathcal{C}.$$

e) Facem schimbarea de variabilă $\sqrt{1+x+x^2} = x+t \Rightarrow x = \dfrac{1-t^2}{2t-1},\ dx =$
$= \dfrac{-2t^2+2t-2}{(2t-1)^2}\,dt$. Obţinem:

$$I = \int \frac{-2t^2+2t-2}{(2t-1)^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{-t^2+1}{2t-1}\right)\left(t+\frac{-t^2+1}{2t-1}\right)}\,dt = \int\frac{-2t^2+2t-2}{(-t^2+2t)(t^2-t+1)}\,dt =$$

$$= 2\int\frac{t^2-t+1}{t(t-2)(t^2-t+1)}\,dt = 2\int\frac{dt}{t(t-2)} = -\int\frac{dt}{t}+\int\frac{dt}{t-2} = -\ln|t|+\ln|t-2|+\mathcal{C} =$$

$$= \ln\left|\frac{t-2}{t}\right| + \mathcal{C} = \ln\left|\frac{\sqrt{1+x+x^2}-x-2}{\sqrt{1+x+x^2}-x}\right| + \mathcal{C}.$$

f) Notăm $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = t \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = t(1+x),\ x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \dfrac{-4t\,dt}{(1+t^2)^2}$. Rezultă:

$$I = \int\frac{-4t}{(t^2+1)^2}\cdot\frac{1}{\left[\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+1\right]t\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\,dt = \int\frac{-4(1+t^2)}{2(2t^4+2)} = -\int\frac{t^2+1}{t^4+1}\,dt.$$

Descompunem fracţia raţională de mai sus în fracţii simple:

$$\frac{t^2+1}{t^4+1} = \frac{At+B}{t^2+t\sqrt{2}+1}+\frac{Ct+D}{t^2-t\sqrt{2}+1} \Rightarrow$$

$$At^3+Bt^2-At^2\sqrt{2}-Bt\sqrt{2}+At+B+Ct^3+Dt^2+Ct^2\sqrt{2}+Dt\sqrt{2}+Ct+D = t^2+1 \Rightarrow$$

$$A+C=0,\ B-A\sqrt{2}+D+C\sqrt{2}=1,\ -B\sqrt{2}+A+D\sqrt{2}+C=0,\ B+D=1.$$

Obţinem $A=C=0,\ B=D=\dfrac{1}{2}$. Deci:

$$I = -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+t\sqrt{2}+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-t\sqrt{2}+1} = -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\left(t^2+t\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\left(t^2-t\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{t-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\mathcal{C} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(t\sqrt{2}+1)-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(t\sqrt{2}-1)+\mathcal{C} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2(1-x)}{1+x}}+1\right)-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2(1-x)}{1+x}}-1\right)+\mathcal{C}.$$

g) Facem schimbarea de variabilă: $\sqrt{\dfrac{x}{4-x}} = t \Rightarrow \sqrt{x(4-x)} = t(4-x),\ x = \dfrac{4t^2}{1+t^2}$,
$dx = \dfrac{8t}{(1+t^2)^2}\,dt$. Obţinem:

$$I = \int\frac{8t}{(1+t^2)^2}\cdot\frac{1}{\left(2\frac{4t^2}{1+t^2}-3\right)t\left(4-\frac{4t^2}{1+t^2}\right)}\,dt = 2\int\frac{dt}{5t^2-3} = \frac{2}{5}\int\frac{dt}{t^2-\frac{3}{5}} =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}}{t + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}} \right| + \mathcal{C} = \frac{1}{\sqrt{15}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{x}{4-x}} - \sqrt{\frac{3}{5}}}{\sqrt{\frac{x}{4-x}} + \sqrt{\frac{3}{5}}} \right| + \mathcal{C} = \frac{1}{\sqrt{15}} \ln \left| \frac{\frac{x}{4-x} - \frac{3}{5}}{\frac{x}{4-x} + \frac{3}{5} + 2\sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{\frac{x}{4-x}}} \right| +$$

$$+\mathcal{C} = \frac{1}{\sqrt{15}} \ln \left| \frac{8x - 12}{2x + 12 + 2\sqrt{15}\sqrt{x(4-x)}} \right| + \mathcal{C} = \frac{1}{\sqrt{15}} \ln \left| \frac{4x - 6}{x + 6 + \sqrt{60x - 15x^2}} \right| + \mathcal{C}.$$

h) Notăm $\sqrt{x^2 - x + 1} = x - t \Rightarrow x = \dfrac{t^2 - 1}{2t - 1},\ dx = \dfrac{2(t^2 - t + 1)}{(2t-1)^2}\, dt$. Obţinem:

$$I = \int \frac{2(t^2 - t + 1)}{(2t-1)^2 t}\, dt.$$

Descompunem fracţia de mai sus în fracţii simple:

$$\frac{t^2 - t + 1}{(2t-1)^2 t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{2t - 1} + \frac{C}{(2t-1)^2} \Rightarrow A(2t-1)^2 + Bt(2t-1) + Ct = t^2 - t + 1 \Rightarrow$$

$$4At^2 - 4At + A + 2Bt^2 - Bt + Ct = t^2 - t + 1 \Rightarrow 4A + 2B = 1,\ -4A - B + C = -1,\ A = 1.$$

Rezultă $A = 1,\ B = -\dfrac{3}{2},\ C = \dfrac{3}{2}$. Deci:

$$I = 2\int \frac{dt}{t} - 3\int \frac{dt}{2t-1} + 3\int \frac{dt}{(2t-1)^2} = 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|2t - 1| - \frac{3}{2(2t-1)} + \mathcal{C} =$$

$$= 2\ln|\sqrt{x^2 - x + 1} - x| - \frac{3}{2}\ln|2x - 1 - 2\sqrt{x^2 - x + 1}| - \frac{3}{2(2x - 1 - 2\sqrt{x^2 - x + 1})} + \mathcal{C}.$$

**14.** Folosind substituţii hiperbolice ($x = \operatorname{ch} t,\ x = \operatorname{sh} t, \ldots$) să se calculeze:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 1}},\ x \in (1, \infty)$; b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 4}},\ x \in (0, \infty)$; c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2}\, dx,\ x \in$ $\in (1, \infty)$.

**Rezolvare.** a) Facem substituţia $x = \operatorname{ch} t \Rightarrow dx = \operatorname{sh} t\, dt,\ x^2 - 1 = \operatorname{ch}^2 t - 1 = \operatorname{sh}^2 t$. Deci:

$$I = \int \frac{\operatorname{sh} t\, dt}{\operatorname{ch}^2 t \cdot \operatorname{sh} t} = \int \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = \operatorname{th} t + \mathcal{C} = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} + \mathcal{C} = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}}{\operatorname{ch} t} + \mathcal{C} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + \mathcal{C},$$

$\left(\operatorname{th} t = \dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\right)$.

b) Notăm $x = 2\operatorname{sh} t \Rightarrow dx = 2\operatorname{ch} t\, dt,\ x^2 + 4 = 4\operatorname{sh}^2 t + 4 = 4\operatorname{ch}^2 t$. Rezultă:

$$I = \int \frac{2\operatorname{ch} t\, dt}{4\operatorname{sh}^2 t \cdot 2\operatorname{ch} t} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t} = -\frac{1}{4}\operatorname{cth} t + \mathcal{C} = -\frac{\operatorname{ch} t}{4\operatorname{sh} t} + \mathcal{C} = -\frac{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t}}{4\operatorname{sh} t} + \mathcal{C} =$$

$$= \frac{-\sqrt{1 + \frac{x^2}{4}}}{4\frac{x}{2}} + \mathcal{C} = -\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{4x} + \mathcal{C},\quad \left(\operatorname{cth} t = \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t}\right).$$

c) Notăm $x = \operatorname{ch} t \Rightarrow dx = \operatorname{sh} t\, dt,\ x^2 - 1 = \operatorname{sh}^2 t$. Deci:

$$I = \int \frac{\operatorname{sh} t \cdot \operatorname{sh} t\, dt}{\operatorname{ch}^2 t} = \int \operatorname{th}^2 t\, dt = \int \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t}\, dt = \int \frac{\operatorname{ch}^2 t - 1}{\operatorname{ch}^2 t}\, dt = t - \operatorname{th} t + \mathcal{C} =$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + \mathcal{C},\quad (t = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})).$$

**15.** Să se calculeze integrala:

$$I = \int \frac{1 - a^2}{1 + a^2 + 2a\sin x}\, dx,\quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\quad a \in I\!R \setminus \{\pm 1\}.$$

**Rezolvare.** Facem schimbarea de variabilă $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} t,\ dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$. Deci:

$$I = \int \frac{1-a^2}{1+a^2+\frac{4at}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2(1-a^2)}{(1+a^2)t^2+4at+(1+a^2)}\,dt =$$

$$= \frac{2(1-a^2)}{1+a^2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{4a}{1+a^2}t+\frac{4a^2}{(1+a^2)^2}+\left(1-\frac{4a^2}{(1+a^2)^2}\right)} = \frac{2(1-a^2)}{1+a^2}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{2a}{1+a^2}\right)^2+\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{2(1-a^2)}{1+a^2}\cdot\frac{1+a^2}{1-a^2}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{2a}{1+a^2}}{\frac{1-a^2}{1+a^2}} + \mathcal{C} = 2\operatorname{arctg}\frac{(1+a^2)\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2a}{1-a^2} + \mathcal{C}.$$

**16.** Să se calculeze integrala:

$$I = \int xe^{ax}\sin mx \sin nx,\quad a, m, n \in I\!R.$$

**Rezolvare.** Transformăm produsul $\sin mx \sin nx$ în diferenţă de cosinusuri: $\sin mx \sin nx = \dfrac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$.

Atunci: $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int xe^{ax}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] =$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int xe^{ax}\cos(m-n)x\,dx}_{I_1} - \underbrace{\frac{1}{2}\int xe^{ax}\cos(m+n)x\,dx}_{I_2} = I_1 - I_2.$$

Calculăm integrala: $J = \displaystyle\int xe^{ax}\cos bx\,dx = \frac{x}{a}e^{ax}\cos bx - \frac{1}{a}\int(\cos bx - bx\sin bx)e^{ax}\,dx =$

$$= \frac{x}{a}e^{ax}\cos bx - \frac{1}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx + \frac{b}{a}\int xe^{ax}\sin bx\,dx = \frac{x}{a}e^{ax}\cos bx - \frac{1}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx +$$

$$+\frac{b}{a^2}xe^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}\int e^{ax}(\sin bx + bx\cos bx)\,dx = \frac{x}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}xe^{ax}\sin bx -$$

$$-\frac{1}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx - \frac{b}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\,dx - \frac{b^2}{a^2}\underbrace{\int xe^{ax}\cos bx\,dx}_{J}.$$

Deci: $\quad J = \dfrac{a^2}{a^2+b^2}\left[\dfrac{x}{a}e^{ax}\cos bx + \dfrac{b}{a^2}xe^{ax}\sin bx\right] -$

$$-\frac{a}{a^2+b^2}\underbrace{\int e^{ax}\cos bx\,dx}_{I_3} - \frac{b}{a^2+b^2}\underbrace{\int e^{ax}\sin bx\,dx}_{I_4},\quad a^2+b^2 \neq 0.$$

Avem: $I_3 = \displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx -$ $-\dfrac{b^2}{a^2}\underbrace{\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx}_{I_3}$, de unde rezultă: $\quad I_3 = \dfrac{a^2}{a^2+b^2}\left(\dfrac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \dfrac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx\right)$.

Apoi: $I_4 = \displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx -$ $-\dfrac{b^2}{a^2}\underbrace{\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx}_{I_4}$, de unde rezultă: $\quad I_4 = \dfrac{a^2}{a^2+b^2}\left(\dfrac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \dfrac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx\right)$.

Deci: $J = \dfrac{ax}{a^2+b^2}e^{ax}\cos bx + \dfrac{bx}{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx - \dfrac{a^3}{(a^2+b^2)^2}\left(\dfrac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \dfrac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx\right) -$
$-\dfrac{a^2b}{(a^2+b^2)^2}\left(\dfrac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \dfrac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx\right) = \dfrac{ax}{a^2+b^2}e^{ax}\cos bx + \dfrac{bx}{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx +$
$+e^{ax}\cos bx\left(-\dfrac{a^2}{(a^2+b^2)^2} + \dfrac{b^2}{(a^2+b^2)^2}\right) + e^{ax}\sin bx\left(-\dfrac{ab}{(a^2+b^2)^2} - \dfrac{ab}{(a^2+b^2)^2}\right) =$
$= \dfrac{xe^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) - \dfrac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}e^{ax}\cos bx - \dfrac{2ab}{(a^2+b^2)^2}e^{ax}\sin bx.$

Obţinem în final pentru $I$:
$I = \dfrac{xe^{ax}}{2[a^2+(m-n)^2]}[(m-n)\sin(m-n)x + a\cos(m-n)x] - \dfrac{a^2-(m-n)^2}{2[a^2+(m-n)^2]^2}e^{ax}\cos(m-$
$-n)x - \dfrac{a(m-n)}{[a^2+(m-n)^2]^2}e^{ax}\sin(m-n)x - \dfrac{xe^{ax}}{2[a^2+(m+n)^2]}[(m+n)\sin(m+n)x + a\cos(m+$
$+n)x] + \dfrac{a^2-(m-n)^2}{2[a^2+(m-n)^2]^2}e^{ax}\cos(m+n)x + \dfrac{a(m+n)}{[a^2+(m+n)^2]^2}e^{ax}\sin(m+n)x.$

**17.** Să se aplice substituţia $t = \dfrac{x+a}{x+b}$ pentru calcularea integralei:

$$I = \int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}, \quad m, n \in I\!N.$$

Să se calculeze apoi, folosind această substituţie:

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}.$$

**Rezolvare.** Pentru $t = \dfrac{x+a}{x+b} \Rightarrow x = \dfrac{tb-a}{1-t},\ dx = \dfrac{b-a}{(t-1)^2}\,dt$. Obţinem:

$$I = \int \frac{b-a}{(t-1)^2}\cdot\frac{(1-t)^m}{t^m(b-a)^m}\cdot\frac{(1-t)^n}{(b-a)^n} = \frac{1}{(b-a)^{m+n-1}}\int\frac{(1-t)^{m+n-2}}{t^m}\,dt.$$

Pentru $m=2,\ n=3,\ a=-2,\ b=3$ rezultă $t = \dfrac{x-2}{x+3}$. Deducem astfel:

$I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3} = \frac{1}{5^4}\int\frac{(1-t)^3}{t^2}\,dt = -\frac{1}{5^4}\int\frac{t^3-3t^2+3t-1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{5^4}\left(\frac{t^2}{2}-\right.$
$\left.-3t + 3\ln|t| + \dfrac{1}{t}\right) + \mathcal{C} = \dfrac{1}{625}\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^2 + \dfrac{3(x-2)}{x+3} - 3\ln\left|\dfrac{x-2}{x+3}\right| - \dfrac{x+3}{x-2}\right] + \mathcal{C}.$

**18.** Să se calculeze integrala: $I = \displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\,dx,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

**Rezolvare.** Notăm $\operatorname{tg} x = t,\ x = \operatorname{arctg} t,\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2},\ \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \sin 2x =$
$= \dfrac{2t}{1+t^2}$. Rezultă:

$$I = \int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2+\frac{2t}{1+t^2}}}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{t\,dt}{(1+t^2)\sqrt{t^2+t+1}}.$$

Notăm $\sqrt{t^2+t+1} = t + y \Rightarrow t = \dfrac{1-y^2}{2y-1},\ dt = \dfrac{-2(y^2-y+1)}{(2y-1)^2}\,dy$. Avem:

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1-y^2}{2y-1}\cdot\frac{1}{1+\frac{(1-y^2)^2}{(2y-1)^2}}\cdot\frac{1}{y+\frac{1-y^2}{2y-1}}\cdot\frac{-2(y^2-y+1)}{(2y-1)^2}\,dy=$$

$$=\sqrt{2}\int\frac{y^2-1}{(y^4+2y^2-4y+2)}\,dy.$$

Descompunem fracţia de sub semnul integrală în fracţii simple:

$$\frac{y^2-1}{y^4+2y^2-4y+2}=\frac{y^2-1}{(y^2+2)^2-2(y+1)^2}=\frac{y^2-1}{(y^2+\sqrt{2}y+2+\sqrt{2})(y^2-\sqrt{2}y+2-\sqrt{2})}=$$

$$=\frac{Ay+B}{y^2+\sqrt{2}y+2+\sqrt{2}}+\frac{Cy+D}{y^2-\sqrt{2}y+2-\sqrt{2}}\ \Rightarrow$$

$Ay^3+By^2-\sqrt{2}Ay^2-\sqrt{2}By+(2-\sqrt{2})Ay+B(2-\sqrt{2})+Cy^3+Dy^2+C\sqrt{2}y^2+$ $+D\sqrt{2}y+Cy(2+\sqrt{2})+D(2+\sqrt{2})=y^2-1\ \Rightarrow A+C=0,\ B-\sqrt{2}A+D+C\sqrt{2}=$ $=1,\ -B\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})A+D\sqrt{2}+C(2+\sqrt{2})=0,\ B(2-\sqrt{2})+D(2+\sqrt{2})=-1.$

Rezultă $A=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\ B=\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\ C=\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\ D=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Obţinem:

$$I=\sqrt{2}\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{y-1}{y^2+\sqrt{2}y+2+\sqrt{2}}\,dy+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{y-1}{y^2-\sqrt{2}y+2-\sqrt{2}}\,dy\right]=$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{2y+\sqrt{2}-\sqrt{2}-2}{y^2+\sqrt{2}y+2+\sqrt{2}}\,dy+\frac{1}{4}\int\frac{2y-\sqrt{2}+\sqrt{2}-2}{y^2-\sqrt{2}y+2-\sqrt{2}}\,dy=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln\left(y^2+\sqrt{2}y+2+\sqrt{2}\right)+\frac{\sqrt{2}+2}{4}\int\frac{dy}{\left(y^2+2\frac{\sqrt{2}}{2}y+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{2}+\frac{3}{2}}+$$

$$+\frac{1}{4}\ln\left(y^2-\sqrt{2}y+2-\sqrt{2}\right)+\frac{\sqrt{2}-2}{4}\int\frac{dy}{\left(y^2-2\frac{\sqrt{2}}{2}y+\frac{1}{2}\right)-\sqrt{2}+\frac{3}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln\frac{y^2+\sqrt{2}y+2+\sqrt{2}}{y^2-\sqrt{2}y+2-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}+2}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\operatorname{arctg}\frac{y+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}-\frac{2-\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\operatorname{arctg}\frac{y-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}+$$

$$+\mathcal{C}=-\frac{1}{4}\ln\frac{y^2+\sqrt{2}y+2+\sqrt{2}}{y^2-\sqrt{2}y+2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y\sqrt{2}+1}{1+\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}+\mathcal{C}=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln\frac{y^2+\sqrt{2}y+2+\sqrt{2}}{y^2-\sqrt{2}y+2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\frac{y\sqrt{2}+1}{1+\sqrt{2}}-\frac{y\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}}{1+\frac{2y^2-1}{1}}+\mathcal{C}=-\frac{1}{4}\ln\frac{y^2+\sqrt{2}y+2+\sqrt{2}}{y^2-\sqrt{2}y+2-\sqrt{2}}+$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}(1-y)}{y^2}+\mathcal{C}=-\frac{1}{4}\ln\frac{[(y^2+2)+\sqrt{2}y+\sqrt{2}]^2}{(y^2+2)^2-2(y+1)^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{(1-y)\sqrt{2}}{y^2}+\mathcal{C}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left(y^2+\sqrt{2}y+2+\sqrt{2}\right)+\frac{1}{4}\ln\left(y^4+2y^2-4y+2\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{(1-y)\sqrt{2}}{y^2}+\mathcal{C}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left[(\sqrt{t^2+t+1}-t)^2+\sqrt{2}(\sqrt{t^2+t+1}-t)+2+\sqrt{2}\right]+\frac{1}{4}\ln\left\{\left[2(\sqrt{t^2+t+1}-t)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-1\right]^2(1+t^2)\right\}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{(-\sqrt{t^2+t+1}+t+1)\sqrt{2}}{t^2+t+1+t^2-2t\sqrt{t^2+t+1}}+\mathcal{C}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\frac{2t^2+(1-\sqrt{2})t-2t\sqrt{t^2+t+1}+\sqrt{2}\sqrt{t^2+t+1}+3+\sqrt{2}}{(2\sqrt{t^2+t+1}-2t-1)\sqrt{t^2+1}}+$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{(t+1-\sqrt{t^2+t+1})\sqrt{2}}{2t^2+t+1-2t\sqrt{t^2+t+1}}+\mathcal{C}=$$
$$=-\frac{1}{2}\ln\left\{\frac{\left[2\sin^2 x+(1-\sqrt{2})\sin x\cos x-2\sin x\sqrt{1+\sin x\cos x}\right](\sqrt{2}-1)}{\left[2\sqrt{1+\sin x\cos x}-2\sin x-\cos x\right](\sqrt{2}-1)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\left[\sqrt{2}\cos x\sqrt{1+\sin x\cos x}+(3+\sqrt{2})\cos^2 x\right](\sqrt{2}-1)}{\left[2\sqrt{1+\sin x\cos x}-2\sin x-\cos x\right](\sqrt{2}-1)}\right\}+$$
$$+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{(\sin x+\cos x-\sqrt{1+\sin x\cos x})\sqrt{2}\cos x}{2\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x-2\sin x\sqrt{1+\sin x\cos x}}+\mathcal{C}=$$
$$=-\frac{1}{2}\ln\frac{\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x}}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\mathcal{C}=$$
$$=-\frac{1}{2}\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x})+\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}+\mathcal{C}.$$

## PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

**19.** Să se arate că următoarea funcţie are o primitivă pe $I\!R$:
$$f: I\!R\to I\!R,\ f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}\cos\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x\neq 0;\\ 0, & \text{dacă } x=0.\end{cases}$$

**20.** Să se arate că următoarele funcţii nu admit primitive pe $I\!R$:

a) $f: I\!R\to I\!R,\ f(x)=\begin{cases} x, & \text{dacă } x\le 0;\\ \sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x>0.\end{cases}$

b) $f: I\!R\to I\!R,\ f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x\neq 0;\\ 1, & \text{dacă } x=0.\end{cases}$

c) $f: I\!R\to I\!R,\ f(x)=\begin{cases} \cos^2\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x\neq 0;\\ 0, & \text{dacă } x=0.\end{cases}$

**21.** Să se stabilească formulele de recurenţă pentru următoarele integrale:

a) $I_n=\int x^n\cdot\sqrt{ax^2+b}\,dx,\ x\in I,\ ax^2+b>0,\ n\in I\!N,\ n\ge 2;$

b) $I_n=\int x^n\sin ax\,dx,\ x\in I\!R,\ n\in I\!N;$ c) $I_n=\int x^n\cos ax\,dx,\ x\in I\!R,\ n\in I\!N;$

d) $I_n=\int e^{ax}\sin^n bx,\ x\in I\!R,\ n\in I\!N;$ e) $I_n=\int e^{ax}\cos^n bx,\ x\in I\!R,\ n\in I\!N;$

f) $I_n=\int\dfrac{dx}{(ax^2+bx+c)^n},\ a\neq 0,\ x\in I,\ ax^2+bx+c\neq 0,\ \Delta=b^2-4ac\neq 0,\ n\in I\!N;$

g) $I_n=\int\dfrac{dx}{\sin^n x},\ x\in I,\ \sin x\neq 0,\ n\in I\!N,\ n\ge 2;$

h) $J_{m,n} = \int \frac{\sin^m x}{\cos^n x}\, dx,\ \ x \in I,\ \cos x \neq 0,\ m, n \in I\!N;$

i) $K_{m,n} = \int \frac{dx}{\sin^m x \cdot \cos^n x},\ \ x \in I,\ \sin x, \cos x \neq 0,\ m, n \in I\!N.$

**22.** Să se calculeze integralele:

a) $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx,\ \ x \in (-1,1);$ b) $\int \frac{x e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx,\ \ x \in (-1,1);$

c) $\int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\, dx,\ \ x \in I\!R;$ d) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\, dx,\ \ x \in I\!R;$

e) $\int \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) dx,\ \ x \in I\!R;$ f) $\int x^2 e^x \sin x\, dx,\ \ x \in I\!R.$

**23.** Să se calculeze integralele:

a) $\int \frac{dx}{x^4+1},\ \ x \in I\!R;$ b) $\int \frac{4x^2+7x+5}{(x+1)^3(x-1)}\, dx,\ \ x \in I,\ \ -1, 1 \notin I;$

c) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2},\ \ x \in (0,\infty);$ d) $\int \frac{x^2+3}{x^3-x}\, dx,\ \ x \in I;\ 0, 1, -1 \notin I;$

e) $\int \frac{3x}{(x+1)(x^2+1)^2}\, dx,\ \ x \in I,\ -1 \notin I;$ f) $\int \frac{x^2+3}{x^5(x^2-1)}\, dx,\ \ x \in I;\ 0, 1, -1 \notin I;$

g) $\int \frac{(x+1)^4}{(x^2+2x+2)^2}\, dx,\ \ x \in I\!R;$ h) $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}\ \ x \in I\!R;$

i) $\int \frac{(x^2+x+1)}{(x-1)^3(x^2-x+1)^2}\, dx,\ \ x \in (-\infty, 1);$ j) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx,\ \ x \in (1,\infty).$

**24.** Să se calculeze integralele:

a) $\int \sin^2 3x \cdot \cos^2 x\, dx,\ \ x \in I\!R;$ b) $\int \sin^6 x\, dx,\ \ x \in I\!R;$

c) $\int \frac{x \sin x}{\cos^3 x}\, dx,\ \ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$ d) $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x},\ \ x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right);$

e) $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2},\ \ x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right);$ f) $\int \frac{dx}{a + b\cos x},\ \ x \in I \subset (-\pi, \pi),\ a+$
$+b\cos x \neq 0,\ a \neq -b;$

g) $\int x \operatorname{tg}^2 x\, dx,\ \ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$ h) $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x},\ \ x \in (0,\pi);$

i) $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx,\ \ x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right);$ j) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\, dx,\ \ x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right);$

k) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x},\ \ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$ l) $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x},\ \ x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$

**25.** Să se calculeze următoarele integrale binome:

a) $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^{3/2}},\ \ x \in (0,\infty);$ b) $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\, dx,\ \ x \in (0,\infty);$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}},\ \ x \in (0,\infty);$ d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}},\ \ x \in (0,\infty);$

e) $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}},\ \ x \in (1,\infty);$ f) $\int \frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}\, dx,\ \ x \in I\!R;$

g) $\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx,\ \ x\in(0,\infty)$; h) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}},\ \ x\in(a,b),\ 0\notin(a,b)$.

**26.** Să se calculeze integralele:

a) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}},\ \ x\in(-1,\infty)$; b) $\int \frac{1+x}{\sqrt{-x^2+4x+5}}\,dx,\ \ x\in(-1,5)$;

c) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x-3}},\ \ x\in(1,\infty)$; d) $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{1-x^2}},\ \ x\in(-1,1)$;

e) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}\,dx,\ \ x\in\mathbb{R}$; f) $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}},\ \ x\in(0,\infty)$;

g) $\int \frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx,\ \ x\in(-a,a),\ a>0$; h) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2+2x+4}},\ \ x\in\mathbb{R}$.

**27.** Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\int \frac{2\mathrm{tg}\,x+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}\,dx,\ \ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$; b) $\int \frac{dx}{\cos^4 x\cdot\sin^2 x},\ \ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

c) $\int \frac{2\sin^2 x+3\cos^2 x}{\sin x-\cos x}\,dx,\ \ x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$; d) $\int \frac{dx}{3+\cos x},\ \ x\in(-\pi,\pi)$;

e) $\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)},\ \ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; f) $\int \cos x\cos 3x\cos 6x\,dx,\ \ x\in\mathbb{R}$.

**28.** Să se calculeze integrala: $I=\int e^{ax}\sin mx\sin nx\cos px\,dx$.

**29.** Să se calculeze integralele:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}},\ \ x\in(-\infty,0)$; b) $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\,dx,\ \ x\in\mathbb{R}$;

c) $\int x\mathrm{arctg}\,x\cdot\ln(1+x^2)\,dx,\ \ x\in\mathbb{R}$; d) $\int \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\,dx,\ \ x\in(1,\infty)$;

e) $\int \mathrm{ch}^4 x\,dx,\ \ x\in\mathbb{R}$; f) $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}\,x+2\mathrm{ch}\,x},\ \ x\in\mathbb{R}$; g) $\int \mathrm{sh}\,ax\cdot\cos bx\,dx,\ \ x\in\mathbb{R}$.

**30.** Să se calculeze integrala: $I=\int \frac{dx}{(\sin x+2\cos x)^3},\ \ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

## §2. INTEGRALE DEFINITE

Fie $f$ o funcţie definită pe un interval mărginit şi închis $[a,b]$. Se numeşte *diviziune* a intervalului $[a,b]$ un sistem de puncte $\Delta=(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)$ din $[a,b]$ a.î. $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. Cea mai mare dintre lungimile intervalelor $[x_0,x_1],\ [x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$ se numeşte *norma diviziunii* $\Delta$ şi se notează $\|\Delta\|$. Pentru un sistem de puncte intermediare $\xi_i\in[x_{i-1},x_i],\ i=\overline{1,n}$ numărul real:

$$\sigma_\Delta(f,\xi)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

se numeşte *suma Riemann* asociată funcţiei $f$, diviziunii $\Delta$ şi punctelor intermediare $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Funcţia $f : [a, b] \to I\!R$ se numeşte *integrabilă Riemann* sau simplu *integrabilă* (notat $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$) dacă există un număr real $I_f$ cu proprietatea: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta_\varepsilon > 0$ a.î. pentru $\forall$ diviziune $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ a intervalului $[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$ şi orice puncte intermediare $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i,\; i = \overline{1, n}$ are loc inegalitatea:

$$|\sigma_\Delta(f, \xi) - I_f| < \varepsilon.$$

Numărul real $I_f$ se numeşte *integrala* sau *integrala definită* a funcţiei $f$ pe intervalul $[a, b]$ şi se notează $\int_a^b f(x)\,dx$. Numărul $I_f$ este unic determinat.

**Teorema 1.2.1.** Pentru o funcţie $f : [a, b] \to I\!R$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:

i) $f$ este integrabilă;

ii) există un număr real $I$ a.î. oricare ar fi şirul de diviziuni $\Delta_n = (x_0^n, x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n)$, $n \in I\!N$ ale intervalului $[a, b]$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$ şi oricare ar fi punctele intermediare $\xi_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n],\; i = \overline{1, k_n},\; n \in I\!N$ şirul sumelor Riemann $\{\sigma_\Delta(f, \xi^n)\}_{n\in I\!N}$ converge la $I$.

*Proprietăţi* ale funcţiilor integrabile:

a) Orice funcţie integrabilă $f : [a, b] \to I\!R$ este mărginită.

b) Dacă $f : [a, b] \to I\!R$ este o funcţie integrabilă care admite primitive pe $[a, b]$, atunci pentru orice primitivă $F$ a lui $f$ are loc egalitatea:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

(formula lui Leibniz-Newton).

c) Dacă $f,\ g : [a, b] \to I\!R$ sunt două funcţii integrabile, iar $\lambda,\ \mu \in I\!R$ atunci $\lambda f + \mu g$ este integrabilă şi:

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

d) Dacă $f : [a, b] \to I\!R$ este o funcţie integrabilă cu $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a, b]$ atunci $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

e) Dacă $f : [a, b] \to I\!R$ este integrabilă şi $m \leq f(x) \leq M,\ \forall x \in [a, b]$ atunci:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b - a).$$

f) Fie $f : [a, b] \to I\!R$ şi $c \in (a, b)$ a.î. restricţiile lui $f$ la $[a, c]$ şi la $[c, b]$ sunt integrabile. Atunci $f$ este integrabilă şi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Şi reciproc, dacă $f$ este integrabilă pe $[a, b]$, $c \in (a, b)$, atunci $f$ este integrabilă pe $[a, c]$ şi pe $[c, b]$ şi are loc relaţia de mai sus.

**Teorema 1.2.2.** Orice funcţie continuă $f : [a,b] \to I\!R$ este integrabilă.

**Teorema 1.2.3.** Orice funcţie monotonă $f : [a,b] \to I\!R$ este integrabilă.

**Teorema 1.2.4.** Orice funcţie mărginită care are un număr finit de puncte de discontinuitate pe $[a,b]$ este integrabilă pe $[a,b]$.

Fie $f : [a,b] \to I\!R$ o funcţie mărginită şi $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ o diviziune a intervalului $[a,b]$. Notăm cu:

$m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ – marginea inferioară a mulţimii $f([x_{i-1}, x_i])$,

$M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ – marginea superioară a mulţimii $f([x_{i-1}, x_i])$,

$s_\Delta(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ – suma Darboux inferioară,

$S_\Delta(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ – suma Darboux superioară

asociate funcţiei $f$ şi diviziunii $\Delta$.

**Teorema 1.2.5.** Funcţia $f : [a,b] \to I\!R$ este integrabilă dacă şi numai dacă $f$ este mărginită şi continuă pe $[a,b] \setminus A$, cu $m(A) = 0$.

Prin definiţie $m(A) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists$ un şir de intervale deschise $\{I_n\}_{n \in I\!N^*}$ cu proprietatea că $A \subset \bigcup_{n \ge 1} I_n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \text{lung}\,(I_n) < \varepsilon$.

**Teorema 1.2.6.** Fie funcţia $f : [a,b] \to I\!R_+$ integrabilă pe $[a,b]$. Atunci:

$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow \exists\, A \subset [a,b]$ cu $m(A) = 0$ a.î. $f(x) = 0,\ \forall\, x \in [a,b] \setminus A$.

**Teorema 1.2.7.** Fie $f : [a,b] \to I\!R$ o funcţie mărginită. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

i) pentru orice $\varepsilon > 0\ \exists\, \eta_\varepsilon > 0$ a.î. $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$, oricare ar fi diviziunea $\Delta$ a intervalului $[a,b]$ cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$;

ii) funcţia $f$ este integrabilă.

**Teorema 1.2.8** (Teorema de medie). Dacă $f : [a,b] \to I\!R$ este o funcţie continuă atunci $\exists\, \xi \in [a,b]$ a.î.:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi).$$

**Teorema 1.2.9** (Teorema de existenţă a primitivelor unei funcţii continue). Pentru orice funcţie continuă $f : [a,b] \to I\!R$ funcţia $F : [a,b] \to I\!R$ definită prin:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,\ \ \forall\, x \in [a,b]$$

este o primitivă a lui $f$ care se anulează în punctul $a$.

**Teorema 1.2.10** (Formula de integrare prin părţi). Dacă $f,\ g : [a,b] \to I\!R$ sunt două funcţii derivabile cu derivate continue atunci:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

**Teorema 1.2.11** (Prima formulă de schimbare de variabilă). Fie $[a,b] \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} I\!R$ ($J$ interval din $I\!R$) două funcţii cu proprietăţile:

i) $f$ este continuă pe $J$;

ii) $\varphi$ este derivabilă cu derivata continuă pe $[a,b]$.

Atunci: $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$

**Teorema 1.2.12** (A doua formulă de schimbare de variabilă). Dacă $[a,b] \xrightarrow{\varphi} [c,d] \xrightarrow{f}$ $\to I\!R$ sunt două funcţii cu proprietăţile:

i) $f$ este continuă pe $[c,d]$;

ii) $\varphi$ este bijectivă, $\varphi$ şi $\varphi^{-1}$ sunt derivabile cu derivate continue

atunci: $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \cdot (\varphi^{-1})'(x)\,dx.$

**Aplicaţii ale integralei definite**

Fie $f : [a,b] \to I\!R_+$. Notăm cu $\Gamma_f$ mulţimea:

$$\Gamma_f = \{(x,y) \in I\!R^2;\ \ a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\},$$

numită subgraficul lui $f$.

**Teorema 1.2.13.** Dacă $f : [a,b] \to I\!R_+$ este o funcţie continuă atunci:

i) $\Gamma_f$ are arie  şi  ii) $\text{aria}\,(\Gamma_f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx.$

Dacă $f : [a,b] \to I\!R$ este continuă atunci $\text{aria}\,(\Gamma_f) = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx.$

Aria domeniului mărginit de graficele funcţiilor continue $y = f_1(x),\ y = f_2(x)$, $x \in [a,b],\ (f_2(x) \ge f_1(x))$ şi de dreptele de ecuaţii $x = a,\ x = b$ este egală cu:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx.$$

**Teorema 1.2.14.** Dacă $f : [a,b] \to I\!R_+$ este o funcţie continuă, atunci:

i) corpul de rotaţie determinat de $f$, adică mulţimea:

$$C_f = \{(x,y,z) \in I\!R^3;\ \ \sqrt{y^2+z^2} \le f(x),\ a \le x \le b\}$$

(corpul obţinut prin rotirea subgraficului funcţiei $f$ în jurul axei $Ox$) are volum şi

ii) $V = \text{vol}\,(C_f) = \pi \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,dx.$

**Teorema 1.2.15.** Dacă funcţia $f : [a,b] \to I\!R$ este derivabilă, cu derivata continuă, atunci:

i) graficul lui $f$ are lungime finită şi

ii) $l(f) = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$

**Teorema 1.2.16.** Dacă $f:[a,b]\to I\!R_+$ este o funcţie derivabilă cu derivata continuă, atunci:

i) suprafaţa de rotaţie determinată de $f$ are arie şi

ii) $A(f)=2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$

Dacă $A$ este o placă plană care se identifică cu o mulţime de forma:

$$\Gamma_{f,g}=\{(x,y)\in I\!R^2;\ \ a\le x\le b,\ f(x)\le y\le g(x)\},$$

unde $f$, $g:[a,b]\to I\!R$ sunt funcţii continue, atunci *centrul de greutate* al lui $A$ este punctul $G(x_G,y_G)$ ale cărui coordonate sunt:

$$x_G=\frac{\int_a^b x[g(x)-f(x)]\,dx}{\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx},\quad y_G=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b [g^2(x)-f^2(x)]\,dx}{\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx}.$$

**Calculul aproximativ al integralelor definite**

*Metoda dreptunghiurilor.* Fie $f:[a,b]\to I\!R$ o funcţie derivabilă pe $[a,b]$ cu derivata continuă şi $\Delta$ o diviziune a intervalului $[a,b]$ în $n$ intervale egale prin punctele $x_i=$ $=a+ih,\ h=\dfrac{b-a}{n},\ i=\overline{0,n}.$ Atunci:

$$\int_a^b f(x)\,dx=h[f(a)+f(x_1)+\cdots f(x_{n-1})]+R_n(x),$$

şi $|R_n(x)|\le\dfrac{M_1(b-a)^2}{n}$, unde $M_1=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$.

*Metoda trapezelor.* Dacă $f:[a,b]\to I\!R$ are derivata $f''$ continuă şi $\Delta$ este o diviziune a intervalului $[a,b]$ definită ca mai sus, atunci:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{2n}\{f(a)+f(b)+2[f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})]\}+R_n(x),$$

unde $|R_n(x)|\le\dfrac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$, cu $M_2=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$.

*Formula lui Simpson.* Fie $f:[a,b]\to I\!R$ având derivata de ordinul al patrulea continuă şi $\widetilde{\Delta}$ diviziunea intervalului $[a,b]$ în $2n$ intervale parţiale egale prin punctele $x_i=a+ih,\ h=\dfrac{b-a}{2n},\ i=\overline{0,2n}.$ Atunci:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{6n}\{f(a)+f(b)+4[f(x_1)+f(x_3)+\cdots+f(x_{2n-1})]+$$
$$+2[f(x_2)+f(x_4)+\cdots+f(x_{2n-2})]\}+R_n(x),$$

unde $|R_n(x)|\le\dfrac{M_3(b-a)^5}{180n^4}$, $M_3=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f^{(4)}(x)|$.

## PROBLEME REZOLVATE

**1.** Să se arate, cu ajutorul definiţiei, că funcţia $f(x) = \sin x$ este integrabilă pe orice interval $[a, b] \subset I\!R$ şi:

$$\int_a^b \sin x\, dx = \cos a - \cos b.$$

**Rezolvare.** Fie $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ şi fie $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i],\ i = \overline{1, n}$ puncte intermediare arbitrare.

Aplicând teorema creşterilor finite (Lagrange) funcţiei $g(x) = -\cos x$ pe fiecare interval $[x_{i-1}, x_i],\ i = \overline{1, n}$ obţinem punctele $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ a.î.:

$$-\cos x_i + \cos x_{i-1} = (x_i - x_{i-1}) \cdot \sin c_i,\quad i = \overline{1, n}.$$

Conform acestor egalităţi putem scrie:

$$\sigma_\Delta(f, \xi) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \sin \xi_i = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sin c_i + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(\sin \xi_i - \sin c_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^n [-\cos x_i + \cos x_{i-1}] + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(\sin \xi_i - \sin c_i) = \cos a - \cos b +$$

$$+ \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot (\sin \xi_i - \sin c_i).$$

Să aplicăm în continuare teorema lui Lagrange funcţiei $f(x) = \sin x$ pe intervalul $[\xi_i, c_i]$ sau $[c_i, \xi_i]$. Rezultă că $\exists$ un punct $\eta_i \in (\xi_i, c_i)$ a.î.:

$$\sin \xi_i - \sin c_i = (\xi_i - c_i) \cdot \cos \eta_i,$$

de unde obţinem:

$$|\sin \xi_i - \sin c_i| \le |\xi_i - c_i| \cdot |\cos \eta_i| \le |\xi_i - c_i| \le \|\Delta\|,\quad i = \overline{1, n}.$$

Deci: $\left| \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1} \cdot (\sin \xi_i - \sin c_i) \right| \le \|\Delta\| \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = (b - a)\|\Delta\|.$

Revenind la suma Riemann $\sigma_\Delta(f, \xi_i)$, deducem:

$$|\sigma_\Delta(f, \xi) - \cos a + \cos b| \le (b - a)\|\Delta\|.$$

Pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar, momentan fixat, alegem $\eta_\varepsilon$ a.î. $0 < \eta_\varepsilon < \dfrac{\varepsilon}{(b - a)}$. Atunci, pentru orice diviziune $\Delta$ cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$ şi pentru orice puncte intermediare $\xi_i$ are loc inegalitatea:

$$|\sigma_\Delta(f, \xi) - (\cos a - \cos b)| < \varepsilon.$$

Aceasta arată că funcţia $f(x) = \sin x$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi $\displaystyle\int_a^b \sin x\, dx = \cos a - \cos b$.

**2.** Să se arate că funcţia $f : [a, b] \to I\!R$,

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{dacă } x \text{ este raţional,}\\ -1, & \text{dacă } x \text{ este iraţional}\end{cases}$$

nu este integrabilă.

**Rezolvare.** Fie $\Delta=(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ o diviziune a intervalului $[0,1]$ şi fie $\xi_i',\ \xi_i''\in\in[x_{i-1},x_i],\ i=\overline{1,n}$ două sisteme de puncte intermediare alese a.î. $\xi_i'\in Q$ şi $\xi_i''\in I\!R\setminus Q$, $i=\overline{1,n}$. Atunci $f(\xi_i')=1$ şi $f(\xi_i'')=-1,\ i=\overline{1,n}$, iar $\sigma_\Delta(f,\xi')=(b-a)$ şi $\sigma_\Delta(f,\xi'')==-(b-a)$. Deoarece $\sigma_\Delta(f,\xi')\to(b-a)\neq-(b-a)\leftarrow\sigma_\Delta(f,\xi'')$ pentru $\|\Delta\|\to0$ rezultă că limita sumelor integrale depinde de alegerea punctelor $\xi_i$, deci funcţia $f$ nu este integrabilă pe $[a,b]$.

**3.** Folosind Teorema 1.2.1 şi Teorema 1.2.2 să se calculeze integrala:

$$I=\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx.$$

**Rezolvare.** Deoarece funcţia $f(x)=\cos x$ este continuă pe intervalul $[0,\pi/2]$ rezultă că ea este integrabilă pe $[0,\pi/2]$. Pentru a calcula integrala $I$ vom considera şirul de diviziuni $\Delta_n=(x_0^n,x_1^n,x_2^n,\cdots,x_n^n)$, $x_0^n=0$, $x_1^n=\dfrac{\pi}{2n}$, $x_2^n=\dfrac{\pi}{n},\ldots,x_n^n=\dfrac{n\pi}{2n}=\dfrac{\pi}{2}$ şi punctele $\xi_i^n=x_i^n,\ i=\overline{1,n}$. Atunci:

$$\sigma_\Delta(f,\xi^n)=\sum_{i=1}^n f(x_i^n)(x_i^n-x_{i-1}^n)=\frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^n\cos\frac{\pi i}{2n}=\frac{\pi}{2n}\left[\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\cdots+\right.$$

$$\left.+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}+\cos\frac{n\pi}{2n}\right]=\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{(n+1)\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}=\sqrt{2}\frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\cdot\cos\frac{(n+1)\pi}{4n}.$$

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_\Delta(f,\xi^n)=1$, deci $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=1$.

**4.** Să se studieze existenţa primitivelor, precum şi proprietatea de integrabilitate pentru următoarele funcţii:

a) $f:[-1,1]\to I\!R,\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x\in[-1,1]\setminus\{0\};\\ 0, & \text{dacă } x=0.\end{cases}$

b) $f:[-1,1]\to I\!R,\ f(x)=\begin{cases}-1, & \text{dacă } x\in[-1,0);\\ 0, & \text{dacă } x=0;\\ 1, & \text{daă } x\in(0,1].\end{cases}$

c) $f:[-1,1]\to I\!R,\ f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & \text{dacă } x\in[-1,1]\setminus\{0\};\\ 0, & \text{dacă } x=0.\end{cases}$

d) $f:[-1,1]\to I\!R,\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}, & \text{dacă } x\in[-1,1]\setminus\{0\};\\ 1, & \text{dacă } x=0.\end{cases}$

**Rezolvare.** a) Dacă funcţia $f$ ar admite primitive, atunci acestea ar avea forma:

$$F(x)=\begin{cases} \ln|x|+c_1, & \text{dacă } x\in[-1,1]\setminus\{0\};\\ c_2, & \text{dacă } x=0.\end{cases}$$

Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = -\infty$ rezultă că $F$ nu este continuă în $x = 0$, deci $F$ nu poate fi primitivă pentru funcţia $f$.

În plus, deoarece $f$ este nemărginită pe $[-1, 1]$ rezultă că nu este integrabilă pe acest interval.

b) Deoarece funcţia $f$ nu are proprietatea lui Darboux ($\nexists$ nici un punct în care $f$ ia valoarea $1/2$) rezultă că $f$ nu admite primitive, (o funcţie care admite primitive are proprietatea lui Darboux).

Funcţia $f$ este integrabilă pe $[-1, 0]$, deoarece $f$ diferă de funcţia $g : [-1, 0] \to I\!R$, $g(x) = -1$ doar în punctul $x = 0$. De asemenea ea este integrabilă pe intervalul $[0, 1]$, deoarece $f(x) = h(x)$, $\forall\, x \in (0, 1]$, unde $h : [0, 1] \to I\!R$, $h(x) = 1$. Deci funcţia $f$ este integrabilă pe intervalul $[-1, 1]$ şi:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0}(-1)\,dx + \int_0^1 1\,dx = -1 + 1 = 0.$$

c) Funcţia $f$ admite primitive:

$$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2}+c_1, & \text{dacă } x\in[-1,1]\setminus\{0\},\\ c_1, & \text{dacă } x=0,\end{cases}$$

($F$ este derivabilă şi $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in (-1, 1)$), dar deoarece $f$ este nemărginită rezultă că nu este integrabilă.

d) Funcţia $f$ fiind continuă pe $[-1, 1]$ rezultă că ea admite primitive şi este integrabilă pe acest interval.

**5.** Să se specifice (cu ajutorul diagramelor) relaţiile care există între diverse clase de funcţii definite pe un interval $[a, b]$ (funcţii integrabile, monotone, continue, mărginite, cu primitive, cu proprietatea lui Darboux).

**Rezolvare.** Obţinem schemă din Figura 1.2.1.

Prezentăm în continuare câteva funcţii cu diverse proprietăţi, numerotate ca în Figura 1.2.1:

1. Funcţia $f : [0, 1] \to I\!R$, $f(x)\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x\in(0,1],\\ 0, & \text{dacă } x=0\end{cases}$

admite primitive $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}+c_1, & \text{dacă } x\in(0,1];\\ c_1, & \text{dacă } x=0.\end{cases}$

În plus $f$ este integrabilă (este mărginită cu un singur punct $x = 0$ de discontinuitate). Evident $f$ nu este continuă pe $[0, 1]$ ($\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$) şi nu este nici monotonă.

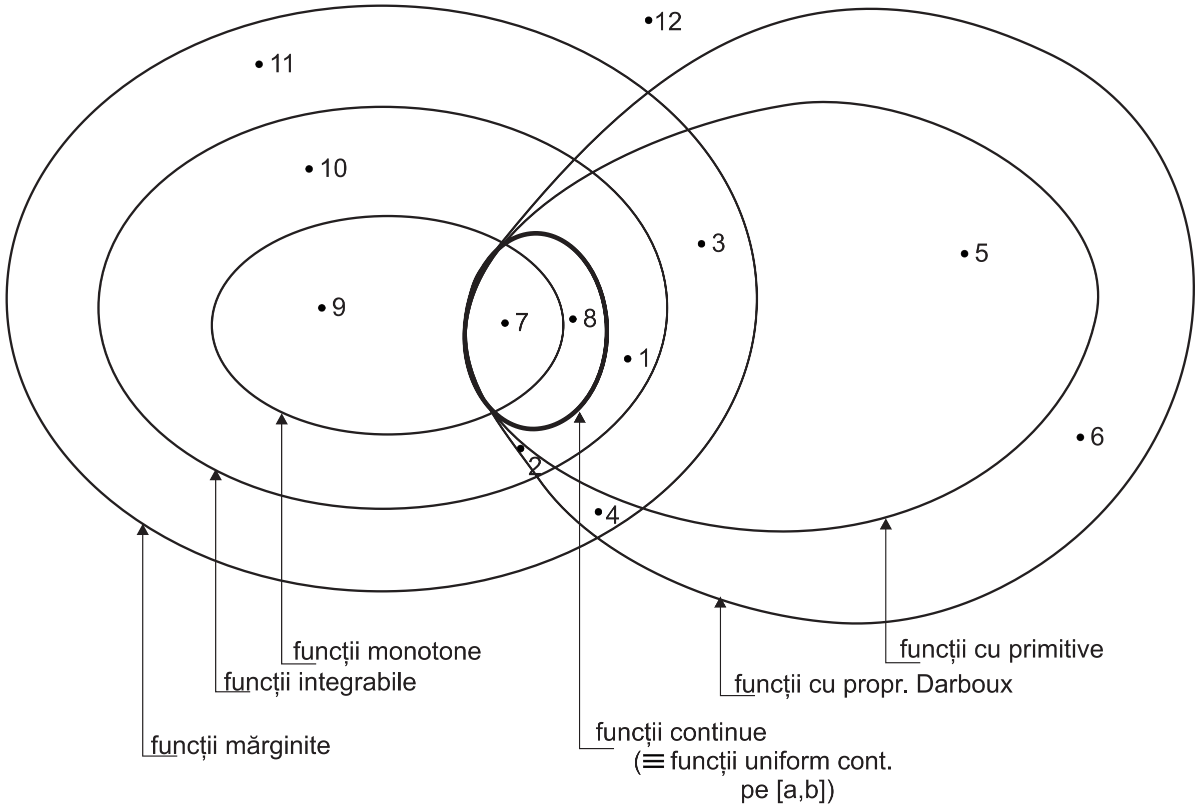


Figura 1.2.1

2. Funcţia $f : [0,1] \to I\!R,\ \ f(x) = \begin{cases} \cos^2 \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \in (0,1], \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$

este integrabilă (este continuă pe $(0,1]$), are proprietatea lui Darboux (se arată asemănător cu $\{$[20], Capitolul 4, Problema 5$\}$), dar nu admite primitive (vezi $\{$Capitolul 1, §1, Problema 20, c)$\}$).

3. (Exemplu dat de D. Pompeiu) Să considerăm funcţia:

$$h : [a,b] \to I\!R,\ \ h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(x - r_n)^{1/3},\ \ x \in [a,b],\ \ a < b,$$

unde $\{r_n\}$ este şirul numerelor raţionale din intervalul $[a,b]$. Seria din membrul drept este o serie convergentă pe $[a,b]$, deoarece:

$$\left|\frac{1}{2^n}(x - r_n)^{1/3}\right| \leq \frac{(b-a)^{1/3}}{2^n},$$

iar seria geometrică $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ este convergentă.

Funcţia $h$ este continuă (vezi $\{$Capitolul 2, §2$\}$) şi monotonă (strict crescătoare) pe $[a,b]$, deci este bijectivă. Rezultă că $\exists\, h^{-1} = g$ continuă şi strict crescătoare pe $[h(a), h(b)]$.

Atunci funcţia $f = g'$ este o funcţie mărginită, care evident admite primitive şi care

nu este integrabilă pe nici un subinterval compact $\subset [h(a), h(b)]$, (se arată că funcţia $g'|_{[c,d]}$, $[c, d] \subset [h(a), h(b)]$ este discontinuă pe o mulţime de măsură $\neq 0$; se utilizează de asemenea Teorema 1.2.5).

4. Funcţia $f : [0, 1] \to I\!R$, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, unde $f_1$ este funcţia de la punctul 2., iar $f_2$ este funcţia $f$ de la punctul 3., (cu $[h(a), h(b)] = [0, 1]$) are proprietatea lui Darboux, nu admite primitive, nu este integrabilă, dar este mărginită.

5. Funcţia $f : [-1, 1] \to I\!R$, $f(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} \cos \dfrac{1}{x^2}, & \text{dacă } x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$

admite primitive (vezi Problema 4, c)), este nemărginită, deci nu este integrabilă.

6. Fie funcţia $f : [0, 1] \to I\!R$, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, unde:

$f_1(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \in (0, 1], \\ \dfrac{1}{2}, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$ şi $f_2(x) = \begin{cases} 2x \cos \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x} \sin \dfrac{1}{x^2}, & \text{dacă } x \in (0, 1], \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

Funcţia $f$ nu admite primitive ($f_1$ nu admite primitive, vezi {Capitolul 1, §1, Problema 20, c)}), este nemărginită ($f_1$ este mărginită, $f_2$ nemărginită), deci $f$ nu este integrabilă. Dar $f$ are proprietatea lui Darboux. Într-adevăr, fie $a$, $b \in [0, 1]$, $a < b$ şi $\lambda \in (f(a), f(b))$. Considerăm cazul $a = 0$, (pentru $a > 0$ evident $f_1$, $f_2$ sunt continue pe $[a, 1]$, deci $f_1 + f_2$ este continuă şi $f$ are proprietatea lui Darboux). Presupunem că $f(0) = \dfrac{1}{2} < f(b)$, deci $\dfrac{1}{2} < \lambda < f(b)$. Deoarece $f$ este nemărginită pe $(0, b)$ rezultă că $\exists\, a' \in (0, b)$ a.î. $f(a') > \lambda$. Cum $f$ este continuă pe $[a', b]$ rezultă că $\exists\, c \in (a', b)$ a.î. $f(c) = \lambda$. Analog se tratează cazul $f(0) > f(b)$.

7. Funcţia $f : [-1, 1] \to I\!R$, $f(x) = x$ este continuă, deci admite primitive şi este integrabilă pe $[-1, 1]$. În plus $f$ este monotonă.

8. Funcţia $f : [-1, 1] \to I\!R$, $f(x) = x^2$ este continuă, dar nu este monotonă.

9. Funcţia $f : [-1, 1] \to I\!R$, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [-1, 0], \\ 1, & \text{dacă } x \in (0, 1] \end{cases}$ este monotonă (crescătoare), dar nu are proprietatea lui Darboux.

10. Funcţia $f : [-1, 1] \to I\!R$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$ este integrabilă pe $[-1, 1]$, dar nu este monotonă şi nu are proprietatea lui Darboux.

11. Funcţia $f : [-1, 1] \to I\!R$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in [-1, 1] \cap Q, \\ -1, & \text{dacă } x \in [-1, 1] \cap (I\!R \setminus Q) \end{cases}$ nu este integrabilă (vezi Problema 2), nu are proprietatea lui Darboux (nu se anulează nicăieri pe intervalul $[-1, 1]$), dar este o funcţie mărginită.

12. Funcţia $f:[0,1]\to I\!R,\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & \text{dacă } x\in[0,1),\\ 1, & \text{dacă } x=1\end{cases}$ este nemărginită pe intervalul $[0,1]$ şi nu are proprietatea lui Darboux.

**6.** Să se arate că deşi funcţiile:

$$f_1:[-1,1]\to I\!R,\ \ f_1(x)=\begin{cases}1, & \text{dacă } x\in[-1,1]\cap Q,\\ -1, & \text{dacă } x\in[-1,1]\cap(I\!R\setminus Q)\end{cases}$$

şi $$f_2:[-1,1]\to I\!R,\ \ f_2(x)=\begin{cases}-1, & \text{dacă } x\in[-1,1]\cap Q,\\ 1, & \text{dacă } x\in[-1,1]\cap(I\!R\setminus Q)\end{cases}$$

nu sunt integrabile pe intervalul $[-1,1]$, totuşi funcţiile $f_1+f_2$ şi $f_1\cdot f_2$ sunt integrabile pe $[-1,1]$.

**Rezolvare.** Conform Problemei 2, $f_1$ şi $f_2$ nu sunt integrabile, dar evident funcţiile $f_1+f_2,\ f_1\cdot f_2:[-1,1]\to I\!R,\ (f_1+f_2)(x)=0,\ (f_1\cdot f_2)(x)=-1,\ \forall\, x\in[-1,1]$ sunt integrabile pe $[-1,1]$.

**7.** Să se arate că funcţiile de mai jos sunt integrabile şi să se calculeze integralele acestora:

a) $\displaystyle\int_0^2 e^x f(x)\,dx$, unde $f:[0,2]\to I\!R,\ f(x)=\max\{1,x^2\},\ x\in[0,2]$.

b) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$, unde $f:[0,1]\to I\!R,\ f(x)=E[2^5x]$,

unde $E[y]$ înseamnă partea întreagă a numărului $y$, (notată uneori mai simplu cu $[y]$).

c) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\sin x\,dx$, unde $f:\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\to[-1,1],\ f(x)=\max\{\sin x,\sin^3 x\}$.

d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, unde $f:[-1,1]\to I\!R,\ f(x)=\max\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^x,2^x\right\}$.

**Rezolvare.** a) Avem $f(x)=\begin{cases}1, & \text{dacă } x\in[0,1],\\ x^2, & \text{dacă } x\in[1,2].\end{cases}$

Deci $f(x)\cdot e^x=\begin{cases}e^x, & \text{dacă } x\in[0,1],\\ x^2e^x, & \text{dacă } x\in[1,2],\end{cases}$ care este integrabilă pe $[0,2]$, fiind o funcţie continuă. Obţinem:

$$I=\int_0^1 e^x\,dx+\int_1^2 x^2e^x\,dx=e^x\Big|_0^1+x^2e^x\Big|_1^2-2\int_1^2 xe^x\,dx=e-1+4e^2-e-2xe^x\Big|_1^2+$$
$$+2e^x\Big|_1^2=4e^2-1-4e^2+2e+2e^2-2e=2e^2-1.$$

b) Avem:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{dacă } x\in[0,1/32)\,;\\ 1, & \text{dacă } x\in[1/32,2/32)\,;\\ 2, & \text{dacă } x\in[2/32,3/32)\,;\\ \vdots & \\ k-1, & \text{dacă } x\in[(k-1)/32,k/32)\,;\\ \vdots & \\ 31, & \text{dacă } x\in[31/32,1);\\ 32, & \text{dacă } x=1. \end{cases}$$

Funcţia $f$ este integrabilă pe fiecare interval $\left(\dfrac{k-1}{32},\dfrac{k}{32}\right)$, $k=\overline{0,32}$, deci $f$ este integrabilă pe intervalul $[0,1]$ şi:

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^{1/32}0\,dx+\int_{1/32}^{2/32}1\,dx+\cdots+\int_{(k-1)/32}^{k/32}(k-1)\,dx+\cdots+\int_{31/32}^{1}31\,dx=$$
$$=\frac{1}{32}(1+2+\cdots+31)=\frac{31}{2}.$$

c) Deoarece $\sin^3x\ge\sin x\Leftrightarrow\sin x(\sin^2x-1)\ge0\Leftrightarrow\sin x\le0,\ \forall x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ şi $\sin^3x\le\sin x,\ \forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ rezultă:

$$I=\int_{-\pi/2}^{0}\sin^4x\,dx+\int_0^{\pi/2}\sin^2x\,dx=\int_{-\pi/2}^{0}\frac{(1-\cos2x)^2}{4}\,dx+\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos2x}{2}\,dx=$$
$$=\int_{-\pi/2}^{0}\frac{1-2\cos2x+\cos^22x}{4}\,dx+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\sin2x\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\sin2x\Big|_{-\pi/2}^{0}+\frac{1}{8}\int_{-\pi/2}^{0}(1+$$
$$+\cos4x)\,dx+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{16}+\frac{1}{32}\sin4x\Big|_{-\pi/2}^{0}=\frac{7\pi}{16}.$$

d) Deoarece $f(x)=\begin{cases}2^{-x}, & \text{dacă } x\in[-1,0),\\ 2^x, & \text{dacă } x\in[0,1],\end{cases}$ rezultă:

$$I=\int_{-1}^{0}2^{-x}\,dx+\int_0^1 2^x\,dx=-\frac{1}{\ln2}2^{-x}\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{\ln2}2^x\Big|_0^1=-\frac{1}{\ln2}(1-2)+\frac{1}{\ln2}(2-1)=\frac{2}{\ln2}.$$

**8.** Să se calculeze cu ajutorul integralelor definite limitele următoarelor şiruri:

a) $S_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n},\ \ n\in I\!N^*.$

b) $S_n=\dfrac{1}{n}\left[\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\dfrac{n}{n}}\right],\ \ n\in I\!N^*.$

c) $S_n=\dfrac{\pi}{2n}\left[1+\cos\dfrac{\pi}{2n}+\cos\dfrac{2\pi}{2n}+\cdots+\cos\dfrac{(n-1)\pi}{2n}\right],\ \ n\in I\!N^*.$

d) $S_n=\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{9n^2}{9n^2+2^2}+\dfrac{9n^2}{9n^2+5^2}+\cdots+\dfrac{9n^2}{9n^2+(3n-1)^2}\right],\ \ n\in I\!N^*.$

**Rezolvare.** a) Scriem pe $S_n$ sub forma:

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right].$$

Considerăm funcţia $f : [0,1] \to I\!R$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ şi pentru $n \geq 1$ formăm diviziunea:

$$\Delta_n = \left(x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < x_2 = \frac{2}{n} < \cdots < x_n = \frac{n}{n} = 1\right)$$

de normă $\|\Delta_n\| = \dfrac{1}{n}$, iar în fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$ alegem punctul intermediar $\xi_i \stackrel{def}{=}$ $= x_i = \dfrac{i}{n}$, $i = \overline{1,n}$.

Atunci se observă că termenul general al şirului din enunţ este chiar suma Riemann asociată funcţiei $f$, diviziunii $\Delta_n$ şi punctelor intermediare $\xi_i$:

$$\sigma_{\Delta_n}(f,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{i}{n}}\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+n} = S_n.$$

Funcţia $f$ este continuă, deci integrabilă. Rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln(x+1)\Big|_0^1 = \ln 2.$$

b) Considerăm funcţia $f : [0,1] \to I\!R$, $f(x) = \sqrt{1+x}$ continuă pe $[0,1]$, deci integrabilă pe intervalul $[0,1]$. Atunci se observă că $S_n = \sigma_{\Delta_n}(f,\xi)$, deci:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\cdot 2^{3/2} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

c) Considerăm funcţia $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to I\!R$, $f(x) = \cos x$ şi diviziunea:

$$\Delta'_n = \left(x_0 = 0 < x_1 = \frac{\pi}{2n} < \cdots < x_n = \frac{\pi n}{2n}\right)$$

de normă $\|\Delta\| = \dfrac{\pi}{2n}$, iar în fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$ alegem punctul intermediar $\xi'_i =$ $= x_{i-1} = \dfrac{(i-1)\pi}{2n}$, $i = \overline{1,n}$. Atunci:

$$S_n = \sigma_{\Delta'_n}(f,\xi') = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n} \cos\frac{(i-1)\pi}{2n}.$$

Funcţia $f$ fiind integrabilă rezultă că $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^{\pi/2} \cos\,dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = 1.$

d) Avem:

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{2}{3n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{5}{3n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{1+\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^2}\right].$$

Considerăm funcţia $f : [0,1] \to I\!R$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, diviziunea:

$$\Delta_n = \left(x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < x_2 = \frac{2}{n} < \cdots < x_n = \frac{n}{n} = 1\right)$$

şi punctele intermediare $\xi_i = \dfrac{3i-1}{3n}$, $i = \overline{1,n}$. Se verifică uşor că $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ şi $S_n = \sigma_{\Delta_n}(f,\xi)$. Funcţia considerată fiind integrabilă pe $[0,1]$ rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

**9.** Să se calculeze o primitivă pentru funcţiile:

a) $f:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to I\!\!R,\ \ f(x)=\sin^5 x.$

b) $f:[1,2]\to I\!\!R,\ \ f(x)=\sqrt{(x-1)(2-x)}.$

**Rezolvare.** a) Funcţia $f$ este continuă pe intervalul $[0,\pi/2]$, deci o primitivă a sa este funcţia:

$F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x \sin^5 t\,dt=\int_0^x \sin t\cdot(1-\cos^2 t)^2\,dt=-\int_0^x(\cos t)'\cdot(1-2\cos^2 t+$
$+\cos^4 t)\,dt=\left(-\cos t+\dfrac{2}{3}\cos^3 t-\dfrac{1}{5}\cos^5 t\right)\Big|_0^x=-\cos x+\dfrac{2}{3}\cos^3 x-\dfrac{1}{5}\cos^5 x+1-\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{5}=$
$=-\cos x+\dfrac{2}{3}\cos^3 x-\dfrac{1}{5}\cos^5 x+\dfrac{8}{15}.$

b) Funcţia $f$ este continuă pe intervalul $[1,2]$ deci o primitivă a sa este funcţia:

$$F(x)=\int_1^x f(t)\,dt=\int_1^x\sqrt{(t-1)(2-t)}\,dt.$$

Facem schimbarea de variabilă $\sqrt{\dfrac{t-1}{2-t}}=y$. Rezultă $t=\dfrac{2y^2+1}{y^2+1}$, iar $dt=\dfrac{2y}{(y^2+1)^2}dy.$
Pentru $t=1$ rezultă $y=0$, iar pentru $t=x$ avem $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}\overset{not}{=}y_0$. Obţinem:

$$F(x)=\int_0^{y_0} y\left(2-\frac{2y^2+1}{y^2+1}\right)\frac{2y}{(y^2+1)^2}\,dy=\int_0^{y_0}\frac{2y^2}{(y^2+1)^3}\,dy=$$
$=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{y_0}\left(\frac{1}{(y^2+1)^2}\right)' y\,dy=-\frac{y}{2(y^2+1)^2}\Big|_0^{y_0}+\frac{1}{2}\int_0^{y_0}\frac{1+y^2-y^2}{(y^2+1)^2}\,dy=-\frac{y}{2(y^2+1)^2}\Big|_0^{y_0}+$
$+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{y_0}\frac{dy}{y^2+1}+\frac{1}{4}\int_0^{y_0}\left(\frac{1}{y^2+1}\right)' y\,dy=-\frac{y}{2(y^2+1)^2}\Big|_0^{y_0}+\frac{1}{2}\int_0^{y_0}\frac{dy}{y^2+1}+\frac{y}{4(y^2+1)}\Big|_0^{y_0}-$
$-\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^{y_0}\frac{dy}{y^2+1}=-\frac{1}{2}\sqrt{(x-1)(2-x)}\cdot(2-x)+\frac{1}{4}\sqrt{(x-1)(2-x)}+\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}=$
$=\dfrac{1}{4}(2x-3)\sqrt{(x-1)(2-x)}+\dfrac{1}{4}\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}.$

Integrala $F(x)=\displaystyle\int_1^x\sqrt{(t-1)(2-t)}\,dt$ o mai putem calcula făcând schimbarea de variabilă $t=1+\sin^2 y$, $(t\in[1,x]$, iar $x\in[1,2])$, $y\in[0,\pi/2]$. Rezultă $dt=$
$=2\sin y\cos y\,dy=\sin 2y\,dy$. Pentru $t=1$ rezultă $y=0$, iar pentru $t=x$ avem $\sin^2 y=x-1$, deci $y=\arcsin\sqrt{x-1}\overset{not}{=}y_1$. Rezultă:

$F(x)=\displaystyle\int_0^{y_1}\sin y\cos y\sin 2y\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{y_1}\sin^2 2y\,dy=\frac{1}{4}\int_0^{y_1}(1-\cos 4y)\,dy=$
$=\dfrac{1}{4}\arcsin\sqrt{x-1}-\dfrac{1}{16}\sin 4y\Big|_0^{y_1}=\dfrac{1}{4}\arcsin\sqrt{x-1}-\dfrac{1}{8}\sin 2y\cos 2y\Big|_0^{y_1}=\dfrac{1}{4}\arcsin\sqrt{x-1}-$
$-\dfrac{1}{4}\sin y\cos y(1-2\sin^2 y)\Big|_0^{y_1}=\dfrac{1}{4}\arcsin\sqrt{x-1}-\dfrac{1}{4}\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{1-(x-1)}(1-2x+2)=$
$=\dfrac{1}{4}\arcsin\sqrt{x-1}-\dfrac{1}{4}(3-2x)\sqrt{(x-1)(2-x)}.$

**10.** Să se calculeze:

a) $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$; , b) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; c) $\int_0^1 \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$; d) $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$;
e) $\int_\pi^{5\pi/4} \frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx$; f) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\cdot\cos^2 x\,dx$; g) $\int_0^\pi (x\sin x)^2\,dx$;
h) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$; i) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+a\cos^2 x}$, $a>-1$; j) $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

**Rezolvare.** a) Facem schimbarea de variabilă $x^2+9=t \Rightarrow 2x\,dx=dt$, iar pentru $x=0 \Rightarrow t=9$, $x=4 \Rightarrow t=25$. Obţinem:

$$I=\frac{1}{2}\int_9^{25}\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{3/2}}{3/2}\Big|_9^{25}=\frac{1}{3}(125-27)=\frac{98}{3}.$$

b) Facem schimbarea de variabilă $e^x=t \Rightarrow dx=\frac{dt}{t}$. Pentru $x=0\Rightarrow t=1$, $x=1\Rightarrow t=e$. Rezultă:

$$I=\int_1^e \frac{dt}{t\left(t+\frac{1}{t}\right)}=\int_1^e \frac{dt}{t^2+1}=\operatorname{arctg} e-\frac{\pi}{4}.$$

c) Notăm $\sqrt{x}=t$. Rezultă $x=t^2$, $dx=2t\,dt$. Pentru $x=0\Rightarrow t=0$, $x=1\Rightarrow t=1$. Obţinem:

$$I=\int_0^1 \frac{2t}{2+t}\,dt=2t\Big|_0^1-4\ln|t+2|\Big|_0^1=2-4\ln\frac{3}{2}.$$

d) Notăm $\sqrt{\frac{5-x}{1+x}}=t\Rightarrow x=\frac{5-t^2}{t^2+1}$, $dx=\frac{-12t}{(t^2+1)^2}\,dt$. Pentru $x=2\Rightarrow t=1$, iar pentru $x=4\Rightarrow t=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Deci:

$$I=\int_1^{1/\sqrt{5}}\frac{1}{t\left(1+\frac{5-t^2}{t^2+1}\right)}\cdot\frac{-12t}{(t^2+1)^2}\,dt=\int_{1/\sqrt{5}}^1\frac{2}{t^2+1}\,dt=2\operatorname{arctg} t\Big|_{1/\sqrt{5}}^1=\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

e) $$I=\int_\pi^{5\pi/4}\frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx=\int_\pi^{5\pi/4}\frac{\sin 2x}{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-\frac{1}{2}\sin^2 2x}\,dx=$$
$$=\int_\pi^{5\pi/4}\frac{\sin 2x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}\,dx=-\int_\pi^{5\pi/4}\frac{(\cos 2x)'}{2-1+\cos^2 2x}\,dx=-\int_\pi^{5\pi/4}\frac{(\cos 2x)'}{1+\cos^2 2x}\,dx=$$
$$=-\operatorname{arctg}(\cos 2x)\Big|_\pi^{5\pi/4}=-\operatorname{arctg}0+\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}.$$

f) $$I=\int_0^{\pi/2}\sin^3 x\cdot\cos^2 x\,dx=\int_0^{\pi/2}\sin x\cdot\cos^2 x\,(1-\cos^2 x)\,dx=-\int_0^{\pi/2}(\cos x)'(\cos^2 x-$$
$$-\cos^4 x)\,dx=-\frac{\cos^3 x}{3}\Big|_0^{\pi/2}+\frac{\cos^5 x}{5}\Big|_0^{\pi/2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}.$$

g) $$I=\int_0^\pi (x\sin x)^2\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\pi x^2(1-\cos 2x)\,dx=\frac{x^3}{6}\Big|_0^\pi-\frac{1}{4}\int_0^\pi x^2(\sin 2x)'\,dx=\frac{\pi^3}{6}-$$
$$-\frac{1}{4}x^2\sin 2x\Big|_0^\pi+\frac{1}{2}\int_0^\pi x\sin 2x\,dx=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{4}\int_0^\pi x(\cos 2x)'\,dx=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{4}x\cos 2x\Big|_0^\pi+\frac{1}{8}\sin 2x\Big|_0^\pi=$$
$$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}.$$

h) Notăm $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\Rightarrow x=2\operatorname{arctg} t$, $dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt$. Pentru $x=0\Rightarrow t=0$, iar

pentru $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$. Rezultă:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{3 + 2\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int_0^1 \frac{2}{t^2+5}\, dt = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}}\Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

i) Dacă $a = 0$ atunci $I = 2\pi$. Presupunem că $a \neq 0$. Atunci:

$$I = \underbrace{\int_0^\pi \frac{dx}{1 + a\cos^2 x}}_{I_1} + \underbrace{\int_\pi^{2\pi} \frac{dx}{1 + a\cos^2 x}}_{I_2}.$$

Pentru $I_1$ facem schimbarea de variabilă $x - \dfrac{\pi}{2} = y \Rightarrow dx = dy$. Deci $I_1 =$ $= \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dy}{1 + a\sin^2 y}$. Pentru $I_2$ facem schimbarea de variabilă $x - \dfrac{3\pi}{2} = y \Rightarrow dx = dy$. Deci $I_2 = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dy}{1 + a\sin^2 y}$. Rezultă:

$$I = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1 + a\sin^2 x} = 2 \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\pi/2+\varepsilon}^{\pi/2-\varepsilon} \frac{dx}{1 + a\sin^2 x}.$$

Pentru integrala $I_0 = \displaystyle\int_{-\pi/2+\varepsilon}^{\pi/2-\varepsilon} \frac{dx}{1 + a\sin^2 x}$ facem schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow$ $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$. Deci:

$$I_0 = \int_{tg(-\pi/2+\varepsilon)}^{tg(\pi/2-\varepsilon)} \frac{1}{1 + a\frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int_{-tg(\pi/2-\varepsilon)}^{tg(\pi/2-\varepsilon)} \frac{dt}{(a+1)t^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{a+1}\sqrt{a+1} \operatorname{arctg} t\sqrt{a+1}\Big|_{-tg(\pi/2-\varepsilon)}^{tg(\pi/2-\varepsilon)} = \frac{2}{\sqrt{a+1}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{a+1} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right).$$

Rezultă $I = \dfrac{4}{\sqrt{a+1}} \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{a+1} \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right)\right) = \dfrac{2\pi}{\sqrt{a+1}}$.

j) Notăm $\sqrt{x^2+1} = x + t$; rezultă $x = \dfrac{1-t^2}{2t}$, $dx = \dfrac{-t^2-1}{2t^2}\, dt$. Pentru $x = 0 \Rightarrow$ $t = 1$, iar pentru $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Obţinem:

$$I = \int_1^{1/\sqrt{3}} \frac{-(t^2+1)\, dt}{2t^2\left[2\frac{(1-t^2)^2}{4t^2} + 1\right]\left(t + \frac{1-t^2}{2t}\right)} = \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{2t(t^2+1)\, dt}{(1 - 2t^2 + t^4 + 2t^2)(2t^2 + 1 - t^2)} =$$

$$= \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{2t(t^2+1)\, dt}{(t^2+1)(t^4+1)} = \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{(t^2)'\, dt}{[(t^2)^2 + 1]} = \operatorname{arctg} t^2\Big|_{1/\sqrt{3}}^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$

**11.** Să se calculeze:

a) $\displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{|x^2 - a| + 30}$, $a \in (4, 25)$; b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} |\sin x - \cos x|\, dx$;

c) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^4 + ax^2}$, $a > -1$.

**Rezolvare.** a) Pentru $2 \leq x \leq \sqrt{a}$ avem $|x^2 - a| = a - x^2$, iar pentru $\sqrt{a} \leq x \leq 5$ avem $|x^2 - a| = x^2 - a$. Deci:

$$I = \int_2^{\sqrt{a}} \frac{dx}{-x^2 + a + 30} + \int_{\sqrt{a}}^5 \frac{dx}{x^2 - a + 30} = -\frac{1}{2\sqrt{a+30}} \ln\left|\frac{x - \sqrt{a+30}}{x + \sqrt{a+30}}\right|\Bigg|_2^{\sqrt{a}} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{30-a}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{30-a}}\Big|_{\sqrt{a}}^{5}=-\frac{1}{2\sqrt{a+30}}\ln\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+30}}{\sqrt{a}+\sqrt{a+30}}\cdot\frac{2+\sqrt{a+30}}{2-\sqrt{a+30}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{30-a}}\left(\operatorname{arctg}\frac{5}{\sqrt{30-a}}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{30-a}}\right)=\frac{1}{\sqrt{30-a}}\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{30-a}-\sqrt{a(30-a)}}{30-a+5\sqrt{a}}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{a+30}}\ln\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{a+30})(\sqrt{a+30}-2)}{(\sqrt{a+30}-\sqrt{a})(\sqrt{a+30}+2)}.$$

b) $I=\int_0^{\pi/2}|\sin x-\cos x|\,dx=\int_0^{\pi/4}(\cos x-\sin x)\,dx+\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\sin x-\cos x)\,dx=$
$=(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\pi/4}+(-\cos x-\sin x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}=2\sqrt{2}-2.$

c) Dacă $a=0$ atunci $I=\int_1^3\frac{dx}{x^4}=-\frac{1}{3x^3}\Big|_1^3=-\frac{1}{81}+\frac{1}{3}=\frac{26}{81}$. Dacă $a\in(-1,0)$ atunci $I=\int_1^3\frac{dx}{x^2(x^2+a)}$. Descompunem fracţia de sub semnul integrală în fracţii simple:

$$\frac{1}{x^2(x^2+a)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-\sqrt{-a}}+\frac{D}{x+\sqrt{-a}}\Leftrightarrow$$

$Ax^3+Aax+Bx^2+aB+Cx^3+\sqrt{-a}Cx^2+Dx^3-D\sqrt{-a}x^2=1\Rightarrow A+C+D=0$, $B+C\sqrt{-a}-D\sqrt{-a}=0,\ \ Aa=0,\ \ Ba=1.$

Obţinem $A=0,\ \ B=\frac{1}{a},\ \ C=-\frac{1}{2a\sqrt{-a}},\ \ D=\frac{1}{2a\sqrt{-a}}$. Deci:

$$I=\frac{1}{a}\int_1^3\frac{dx}{x^2}-\frac{1}{2a\sqrt{-a}}\int_1^3\frac{dx}{x-\sqrt{-a}}+\frac{1}{2a\sqrt{-a}}\int_1^3\frac{dx}{x+\sqrt{-a}}=-\frac{1}{ax}\Big|_1^3-$$

$$-\frac{1}{2a\sqrt{-a}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{-a}}{x+\sqrt{-a}}\right|\Big|_1^3=-\frac{1}{3a}+\frac{1}{a}-\frac{1}{2a\sqrt{-a}}\ln\left(\frac{3-\sqrt{-a}}{3+\sqrt{-a}}\cdot\frac{1+\sqrt{-a}}{1-\sqrt{-a}}\right)=\frac{2}{3a}-$$

$$-\frac{1}{2a\sqrt{-a}}\ln\frac{3+2\sqrt{-a}+a}{3-2\sqrt{-a}+a}.$$

Dacă $a\in(0,\infty)$ atunci $I=\int_1^3\frac{dx}{x^2(x^2+a)}$. Avem:

$$\frac{1}{x^2(x^2+a)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+a}\Leftrightarrow Ax(x^2+a)+B(x^2+a)+Cx^3+Dx^2=1\Rightarrow$$

$A+C=0,\ \ B+D=0,\ \ Aa=0,\ \ Ba=1$. Rezultă $A=C=0,\ \ B=\frac{1}{a},\ \ D=-\frac{1}{a}$. Deci:

$$I=\frac{1}{a}\int_1^3\frac{dx}{x^2}-\frac{1}{a}\int_1^3\frac{dx}{x^2+a}=-\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{x}\Big|_1^3-\frac{1}{a\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{a}}\Big|_1^3=-\frac{1}{3a}+\frac{1}{a}-\frac{1}{a\sqrt{a}}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{a}}-\right.$$

$$\left.-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{a}}\right)=\frac{2}{3a}-\frac{1}{a\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{a}}{3+a}.$$

**12.** Fără a calcula integralele să se demonstreze următoarele inegalităţi:
a) $\sqrt{10}\le\int_{-4}^{-3}\sqrt{x^2+1}\,dx\le\sqrt{17}$; b) $0\le\int_{-1/2}^{0}x\ln(1-x^2)\,dx\le\frac{1}{4}\ln\frac{4}{3}$;
c) $\int_1^2\ln(1+x)\,dx>\int_1^2\frac{x}{1+x}\,dx$; d) $\int_0^{\pi}\frac{x\sin^2 ax}{1+x^2}\,dx<\frac{\pi}{2},\ \ a\in I\!R$.

**Rezolvare.** a) Funcţia $f:I\!R\to I\!R,\ f(x)=\sqrt{x^2+1}$ este strict descrescătoare

pe $I\!R^*_-$ $\left(f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 0,\ \forall x \in (-\infty, 0)\right)$. Deci $f(-3) \le \sqrt{x^2+1} \le f(-4)$, $\forall x \in [-4,-3]$. Deoarece $f(-3) = \sqrt{10}$, $f(-4) = \sqrt{17}$, rezultă:
$\sqrt{10}(-3+4) \le \int_{-4}^{-3} \sqrt{x^2+1}\,dx \le \sqrt{17}(-3+4)$ , deci $\sqrt{10} \le \int_{-4}^{-3} \sqrt{x^2+1}\,dx \le \sqrt{17}$.

b) Considerăm funcţia $f : (-1, 0] \to I\!R$, $f(x) = x\ln(1-x^2)$. Deoarece:

$$f'(x) = \ln(1-x^2) - 2x^2\frac{1}{1-x^2} = \ln(1-x^2) + \frac{2x^2}{x^2-1} < 0,\ \forall x \in (-1, 0),$$

rezultă că $f(0) \le f(x) \le f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, $\forall x \in \left[-\dfrac{1}{2}, 0\right]$. Deci $0 \le f(x) \le -\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{4}$. Rezultă:

$$0 \le \int_{-1/2}^{0} x\ln(1-x^2)\,dx \le \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}\int_{-1/2}^{0} dx \ \Leftrightarrow\ 0 \le \int_{-1/2}^{0} x\ln(1-x^2)\,dx \le \frac{1}{4}\ln\frac{4}{3}.$$

c) Vom demonstra inegalitatea:

$$\ln(1+x) > \frac{x}{1+x},\ \forall x \in [1,2] \ \Leftrightarrow\ \ln(1+x) - \frac{x}{1+x} > 0,\ \forall x \in [1,2].$$

Considerăm funcţia $f : (-1, \infty) \to I\!R$, $f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$. Deoarece $f'(x) =$ $= \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{x}{(1+x)^2} > 0$, $\forall x > 0$, iar $f(0) = 0$ deducem că $f(x) > f(0) = 0$, $\forall x > 0$. Rezultă că: $\ln(1+x) > \dfrac{x}{1+x}$, $\forall x \in [1,2]$. Integrând pe intervalul $[1,2]$ obţinem inegalitatea din enunţ.

d) Avem $\dfrac{x\,\sin^2 ax}{1+x^2} \le \dfrac{x}{1+x^2}$, $\forall x \in [0, \pi]$.
Integrând inegalitatea de mai sus obţinem

$$\int_0^{\pi} \frac{x\,\sin^2 ax}{1+x^2}\,dx \le \int_0^{\pi} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}\ln(1+\pi^2) < \frac{\pi}{2}.$$

**13.** Să se arate că:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x+a)}{\sin(x+b)}\,dx = \frac{\pi}{2}\cos(a-b) + \sin(a-b)\ln|\mathrm{ctg}\,b|.$$

**Rezolvare.** Avem:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\cos a + \cos x\sin a}{\sin x\cos b + \cos x\sin b}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x\cos a + \cos x\sin a}{\sin x\cos b + \cos x\sin b}\,dx +$$
$$+ \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x\cos a + \cos x\sin a}{\sin x\cos b + \cos x\sin b}\,dx.$$

Făcând în a doua integrală de mai sus schimbarea de variabilă $\dfrac{\pi}{2} - x = y$ obţinem:

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x\cos a + \cos x\sin a}{\sin x\cos b + \cos x\sin b}\,dx + \int_0^{\pi/4} \frac{\cos a\cos y + \sin a\sin y}{\cos b\cos y + \sin b\sin y}\,dy =$$
$$= \underbrace{\int_0^{\pi/4} \frac{\cos a\,\mathrm{tg}\,x + \sin a}{\cos b\,\mathrm{tg}\,x + \sin b}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{\pi/4} \frac{\sin a\,\mathrm{tg}\,y + \cos a}{\sin b\,\mathrm{tg}\,y + \cos b}\,dy}_{I_2}.$$

Pentru $I_1$ notăm $\mathrm{tg}\,x = y \Rightarrow x = \mathrm{arctg}\,y$, $dx = \dfrac{dy}{1+y^2}$. Deci:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{y\cos a + \sin a}{(y^2+1)(y\cos b + \sin b)}\,dy.$$

Descompunem fracţia de sub semnul integrală de mai sus:

$$\frac{y\cos a+\sin a}{(y^2+1)(y\cos b+\sin b)}=\frac{Ay+B}{y^2+1}+\frac{C}{y\cos b+\sin b}\Rightarrow$$
$$(Ay+B)(y\cos b+\sin b)+C(y^2+1)=y\cos a+\sin a\Leftrightarrow$$
$$Ay^2\cos b+Ay\sin b+By\cos b+B\sin b+Cy^2+C=y\cos a+\sin a\Rightarrow$$
$$A\cos b+C=0,\quad A\sin b+B\cos b=\cos a,\quad B\sin b+C=\sin a.$$

Rezultă $A=\sin(b-a)$, $B=\cos(b-a)$, $C=-\cos b\sin(b-a)$. Deci:

$$I_1=\int_0^1\frac{\sin(b-a)y+\cos(b-a)}{y^2+1}\,dy-\cos b\sin(b-a)\int_0^1\frac{dy}{y\cos b+\sin b}=$$
$$=\frac{1}{2}\sin(b-a)\ln(y^2+1)\Big|_0^1+\cos(b-a)\operatorname{arctg}y\Big|_0^1-\sin(b-a)\ln|y\cos b+\sin b|\Big|_0^1=$$
$$=\frac{1}{2}\sin(b-a)\ln 2+\cos(b-a)\cdot\frac{\pi}{4}-\sin(b-a)\ln\left|\frac{\cos b+\sin b}{\sin b}\right|.$$

Procedând în mod asemănător, obţinem pentru $I_2$ ($\operatorname{tg}y=z$):

$$I_2=\int_0^1\frac{\sin(a-b)z+\cos(a-b)}{z^2+1}\,dz-\sin b\cdot\sin(a-b)\int_0^1\frac{dz}{z\sin b+\cos b}=$$
$$=\frac{1}{2}\sin(a-b)\ln(z^2+1)\Big|_0^1+\cos(a-b)\operatorname{arctg}z\Big|_0^1-\sin(a-b)\ln|z\sin b+\cos b|\Big|_0^1=$$
$$=\frac{1}{2}\sin(a-b)\ln 2+\cos(a-b)\cdot\frac{\pi}{4}-\sin(a-b)\ln\left|\frac{\sin b+\cos b}{\cos b}\right|.$$

Rezultă:

$$I=I_1+I_2=\frac{\pi}{2}\cos(a-b)+\sin(a-b)\ln\left|\frac{\cos b+\sin b}{\sin b}\cdot\frac{\cos b}{\cos b+\sin b}\right|=$$
$$=\frac{\pi}{2}\cos(a-b)+\sin(a-b)\ln|\operatorname{ctg}b|.$$

**14.** Să se calculeze integrala:

$$I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx,$$

folosind schimbarea de variabilă $x=\operatorname{tg}\varphi$.

**Rezolvare.** Pentru $x=\operatorname{tg}\varphi$, $dx=\dfrac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=(1+\operatorname{tg}^2\varphi)\,d\varphi$; $x=0\Rightarrow\varphi=0$; $x=1\Rightarrow\varphi=\dfrac{\varphi}{4}$. Rezultă:

$$I=\int_0^{\pi/4}\ln(1+\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi.$$

Folosind formula $1+\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}{\cos\varphi}$, deducem:

$$I=\int_0^{\pi/4}\ln\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}{\cos\varphi}\,d\varphi=\frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2}+\int_0^{\pi/4}\ln\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)\,d\varphi-\int_0^{\pi/4}\ln\cos\varphi\,d\varphi=$$
$$=\frac{\pi}{8}\ln 2+\int_0^{\pi/4}\ln\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)\,d\varphi-\int_0^{\pi/4}\ln\cos\varphi\,d\varphi.$$

În integrala $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\ln\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)\,d\varphi$ facem schimbarea de variabilă $\dfrac{\pi}{4}-\varphi=t$, deci $\varphi=\dfrac{\pi}{4}-t$. Obţinem:

$$I=\frac{\pi}{8}\ln 2+\int_0^{\pi/4}\ln\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\,dt-\int_0^{\pi/4}\ln\cos\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{8}\ln 2+\int_0^{\pi/4}\ln\cos t\,dt-$$
$$-\int_0^{\pi/4}\ln\cos\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

Deci $I=\dfrac{\pi}{8}\ln 2.$

**15.** Să se calculeze integralele:

$$J_m=\int_0^{\pi/2}\sin^m x\,dx;\quad J'_m=\int_0^{\pi/2}\cos^m x\,dx,\quad m\in\mathbb{N}.$$

**Rezolvare.** Avem:

$$J_m=-\int_0^{\pi/2}\sin^{m-1}x\,(\cos x)'\,dx=-\sin^{m-1}x\cos x\Big|_0^{\pi/2}+(m-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{m-2}x\cos^2 x\,dx=$$
$$=(m-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{m-2}x\,dx-(m-1)\int_0^{\pi/2}\sin^m x\,dx.$$

Deci $J_m=(m-1)J_{m-2}-(m-1)J_m$, de unde rezultă relaţia de recurenţă:

$$J_m=\frac{m-1}{m}J_{m-2}.$$

Pentru $m=2n$ avem $J_{2n}=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}J_0$, unde $J_0=\displaystyle\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2}$. Deci:

$$J_{2n}=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Pentru $m=2n+1$ avem $J_{2n+1}=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx=\frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}J_1$, unde $J_1=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi/2}=1$. Deci:

$$J_{2n+1}=\frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}.$$

Deoarece $J'_m=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^m x\,dx\overset{\pi/2-x=y}{=}\int_0^{\pi/2}\sin^m y\,dy$, rezultă că:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^m x\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos^m x\,dx=\begin{cases}\dfrac{(m-1)!!}{m!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{pentru } m \text{ par } (\geq 2);\\[2mm] \dfrac{(m-1)!!}{m!!}, & \text{pentru } m \text{ impar } (\geq 1),\end{cases}$$

unde $m!!=\begin{cases}2\cdot 4\cdots m, & \text{dacă } m \text{ este par,}\\ 1\cdot 3\cdots m, & \text{dacă } m \text{ este impar,}\end{cases}$ se numeşte semifactoriala numărului $m$, $m\in\mathbb{N}^*$.

Pentru $m=0$, $J_0=J'_0=\dfrac{\pi}{2}$.

**16.** Folosind inegalităţile:

$$\sin^{2n+1}x<\sin^{2n}x<\sin^{2n-1}x,\quad\forall\,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\quad n\in\mathbb{N}^*$$

şi Problema 15 să se demonstreze că:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2},$$

(formula lui Wallis).

**Rezolvare.** Integrăm şirul de inegalităţi din enunţul problemei pe intervalul $(0, \pi/2)$. Obţinem:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\, dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\, dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x\, dx.$$

Conform Problemei 15 inegalităţile de mai sus ne conduc la:

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \quad \text{sau}$$

(1) $$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n}.$$

Diferenţa dintre cele două expresii de la extremităţile relaţiei (1) este:

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n(2n+1)} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 = \left(\frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}\right)^2 \frac{2n+1}{2n} <$$

$$< \frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{4}{2n+2} \to 0, \text{ pentru } n \to \infty,$$

(am folosit inegalitatea $\dfrac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} < \dfrac{2}{\sqrt{2n+2}}$, $\forall\, n \in I\!N^*$).

Rezultă că $\dfrac{\pi}{2}$ este limita comună a celor două expresii de la extremităţile relaţiei (1). Deci:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} \quad \text{sau} \quad \frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots 2n \cdot 2n}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n-1)(2n+1)}.$$

*Observaţie.* Formula lui Wallis are un interes deosebit din punct de vedere istoric, ea fiind prima reprezentare a numărului $\pi$ sub formă de limită a unui şir de numere raţionale, uşor de calculat.

**17.** Să se arate că:

a) $S_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n\, dx = 2^{2n} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$, $n \in I\!N$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$.

**Rezolvare.** a) Avem:

$$S_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\, dx = \int_0^1 (1-x^2)^{n-1} \cdot (1-x^2)\, dx = \int_0^1 (1-x^2)^{n-1}\, dx -$$

$$- \int_0^1 (1-x^2)^{n-1} \cdot x^2\, dx = S_{n-1} + \frac{1}{2n} \cdot \int_0^1 [(1-x^2)^n]' \cdot x\, dx = S_{n-1} + \frac{1}{2n} x(1-x^2)^n \Big|_0^1 -$$

$$- \frac{1}{2n} \int_0^1 (1-x^2)^n\, dx = S_{n-1} - \frac{1}{2n} S_n, \quad \forall\, n \geq 1.$$

Deci $S_n = \dfrac{2n}{2n+1} S_{n-1}$.

Rezultă că $S_n = \dfrac{2n \cdot (2n-2) \cdots 2}{(2n+1)(2n-1) \cdots 3} S_0$, $\forall\, n \geq 1$, unde $S_0 = \displaystyle\int_0^1 dx = 1$. Deci:

$$S_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{(2n+1)!}, \quad \forall\, n \in I\!N.$$

b) Deoarece:

$$0 < \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{2\cdot 4\cdots 2n}{3\cdot 5\cdots (2n+1)} < \frac{2}{\sqrt{2n+2}},$$

rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$.

**18.** Folosind Problema 15 să se calculeze:

$$I_n = \lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \int_0^t \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\quad n\in I\!N.$$

**Rezolvare.** Notăm $x = \sin y \Rightarrow dx = \cos y\,dy$. Atunci:

$$I_{t,n} = \int_0^t \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{arcsin\,t} \frac{\sin^n y}{\cos y}\cdot \cos y\,dy = \int_0^{\arcsin t} \sin^n y\,dy.$$

Rezultă că:

$$I_n = \lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \int_0^{arcsint} \sin^n y\,dy = \int_0^{\pi/2} \sin^n y\,dy = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{pentru } n \text{ par},\ n\geq 2;\\[2mm] \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{pentru } n \text{ impar},\ n\geq 1,\end{cases}$$

cu observaţia că pentru $n = 0$, $I = \dfrac{\pi}{2}$.

**19.** Să se arate că:

$$I_{m,n} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \int_t^1 x^m\cdot(\ln x)^n\,dx = (-1)^n\frac{n!}{(m+1)^{n+1}},\quad n,\,m\in I\!N.$$

**Rezolvare.** Avem:

$$I_{t,m,n} = \int_t^1 x^m(\ln x)^n\,dx = \frac{1}{m+1}\int_t^1 (x^{m+1})'(\ln x)^n\,dx = \frac{1}{m+1}x^{m+1}(\ln x)^n\Big|_t^1 -$$

$$-\frac{n}{m+1}\int_t^1 \frac{x^{m+1}}{x}(\ln x)^{n-1}\,dx = -\frac{t^{m+1}}{m+1}(\ln t)^n - \frac{n}{m+1}I_{t,m,n-1}.$$

Deci:

$$I_{t,m,n} = -\frac{t^{m+1}}{m+1}(\ln t)^n - \frac{n}{m+1}\left[-\frac{t^{m+1}}{m+1}(\ln t)^{n-1} - \frac{n-1}{m+1}I_{t,m,n-2}\right] = -\frac{t^{m+1}}{m+1}(\ln t)^n +$$

$$+\frac{nt^{m+1}}{(m+1)^2}(\ln t)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2}I_{t,m,n-2} = -\frac{t^{m+1}}{m+1}(\ln t)^n + \frac{n}{(m+1)^2}t^{m+1}(\ln t)^{n-1} -$$

$$-\frac{n(n-1)}{(m+1)^3}t^{m+1}(\ln t)^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n(n-1)\cdots 2}{(m+1)^n}t^{m+1}(\ln t) + (-1)^n\frac{n!}{(m+1)^n}I_{t,m,0}.$$

Dar: $I_{t,m,0} = \displaystyle\int_t^1 x^m\,dx = \frac{1}{m+1}x^{m+1}\Big|_t^1 = \frac{1}{m+1}(1-t^{m+1})$.

Deci:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} I_{t,m,n} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\left[-\frac{t^{m+1}}{m+1}(\ln t)^n + \frac{n}{(m+1)^2}t^{m+1}(\ln t)^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n!}{(m+1)^n}t^{m+1}\ln t +\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}(1-t^{m+1})\right] = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}},\quad \forall\, m,\,n\in I\!N,$$

(în paranteza pătrată de mai sus avem un număr finit de termeni $(n+1)$, deci putem trece la limită în fiecare, iar limitele primilor $n$ termeni, pentru $t\to 0$, $t>0$, sunt 0:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} t^{m+1}(\ln t)^k = 0,\quad k = \overline{1,n},\quad m\in I\!N.)$$

**20.** Fie $f : I\!R_+ \to I\!R_+$ o funcţie continuă, strict crescătoare cu $f(0) = 0$. Atunci pentru $\forall\, a \in I\!R_+$ şi $b \in f(I\!R_+) \subset I\!R_+$ să se demonstreze inegalitatea:

$$ab \leq \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(y)\,dy,$$

(inegalitatea lui Young).

**Rezolvare.** Notăm cu $S_1 = \int_0^a f(x)\,dx$ şi $S_2 = \int_0^b f^{-1}(y)\,dy$. Cantităţile de mai sus reprezintă aria domeniului plan mărginit de axa $Ox$, graficul funcţiei $f$ şi dreptele $x = 0$ şi $x = a$, respectiv aria domeniului plan mărginit de axa $Ox$, graficul funcţiei $f^{-1}$ şi dreptele $x = 0$ şi $x = b$ (vezi Figura 1.2.2).

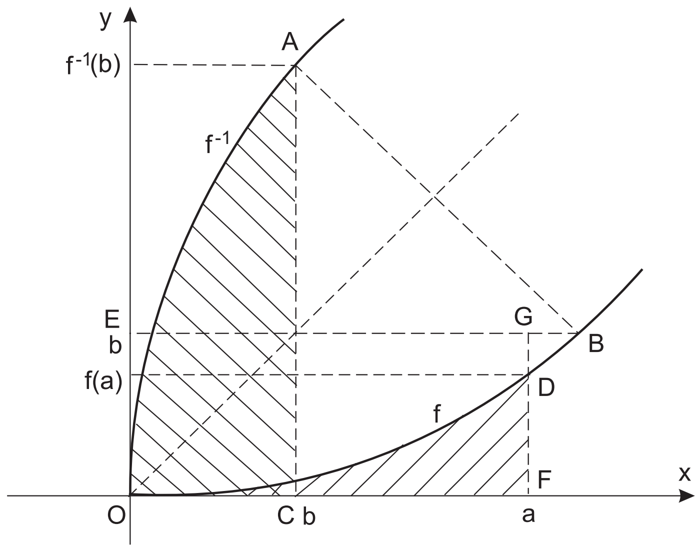


Figura 1.2.2

Punctele $A$ şi $B$ din Figura 1.2.2 au coordonatele $A(b, f^{-1}(b))$ şi $B(f^{-1}(b), b)$. Aria triunghiului curbiliniu $OCA$ ($S_2$) este egală cu aria triunghiului curbiliniu $OBE$. Din figura de mai sus se vede că suma ariilor triunghiurilor curbilinii $OFD$ şi $OBE$ este mai mare decât aria dreptunghiului $OFGE$, deci:

$$S_1 + S_2 \geq ab \quad \text{sau} \quad \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(y)\,dy \geq ab.$$

**21.** Fie $a,\, b \in I\!R,\ p,\, q \in I\!R,\ p > 1$ cu $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Să se demonstreze inegalitatea:

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}.$$

**Rezolvare.** Presupunem, fără a restrânge generalitatea problemei, că $a \geq 0,\ b \geq 0$. Considerăm $\alpha > 0$ şi funcţia $f : I\!R_+ \to I\!R,\ f(x) = x^\alpha$. Această funcţie este continuă, strict crescătoare pe $I\!R_+$ şi $f(0) = 0$. Conform Problemei 20 obţine inegalitatea:

$$ab \leq \int_0^a x^\alpha\,dx + \int_0^b y^{1/\alpha}\,dy \quad \text{sau} \quad ab \leq \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{b^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{\frac{\alpha+1}{\alpha}}.$$

Luăm $\alpha = p-1 \Rightarrow \alpha+1 = p,\ \dfrac{\alpha+1}{\alpha} = \dfrac{p}{p-1} = q$. Rezultă astfel inegalitatea:

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

**22.** Să se arate că pentru două funcţii $f, g : [a,b] \to I\!R$ integrabile pe $[a,b]$, $p, q \in I\!R_+$, $p > 1,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ are loc inegalitatea:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q},$$

(inegalitatea lui Hölder).

**Rezolvare.** Dacă $\int_a^b |f(x)|^p\,dx = 0$ sau $\int_a^b |g(x)|^q\,dx = 0$ deducem, conform Teoremei 1.2.6 că $\exists\, A \subset [a,b]$ cu $m\,(A) = 0$ a.î. $f(x) = 0$ sau $g(x) = 0,\ \ \forall\, x \in [a,b] \setminus A$. Rezultă atunci că $(f \cdot g)(x) = 0,\ \ \forall\, x \in [a,b] \setminus A$, deci $\int_a^b |f(x) \cdot g(x)|\,dx = 0$. Astfel în acest caz inegalitatea din enunţ este verificată.

Presupunem acum că $\int_a^b |f(x)|^p\,dx > 0$ şi $\int_a^b |g(x)|^q\,dx > 0$. Notăm cu:

$$\alpha = \frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}} \quad \text{şi} \quad \beta = \frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}}.$$

Folosim inegalitatea din Problema 21, cu $a = \alpha$ şi $b = \beta$. Rezultă $\alpha\beta \le \dfrac{\alpha^p}{p} + \dfrac{\beta^q}{q} \Leftrightarrow$

$$\frac{|f(x)| \cdot |g(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}} \le \frac{|f(x)|^p}{p\int_a^b |f(x)|^p\,dx} + \frac{|g(x)|^q}{q\int_a^b |g(x)|^q\,dx}.$$

Integrând inegalitatea de mai sus pe intervalul $[a,b]$ obţinem:

$$\frac{\int_a^b |f(x)| \cdot |g(x)|\,dx}{\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}} \le \underbrace{\frac{\int_a^b |f(x)|^p\,dx}{p\int_a^b |f(x)|^p\,dx} + \frac{\int_a^b |g(x)|^q\,dx}{q\int_a^b |g(x)|^q\,dx}}_{1}$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

*Observaţie.* Pentru $p = q = 2$ obţinem inegalitatea lui Buniakowski:

$$\left(\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx\right)^2 \le \left(\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right) \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^2\,dx\right).$$

**23.** Fie $f,\ g : [a,b] \to I\!R$ două funcţii integrabile pe $[a,b]$, iar $p \in I\!R,\ \ p \ge 1$. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p},$$

(inegalitatea lui Minkowski).

**Rezolvare.** Dacă $p = 1$ inegalitatea este evidentă:
$$\int_a^b |f(x) + g(x)|\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx + \int_a^b |g(x)|\, dx.$$
De asemenea dacă $\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\, dx = 0$ atunci inegalitatea este adevărată:
$$0 \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\, dx\right)^{1/p}.$$
Putem presupune în continuare că $p > 1$ şi $\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\, dx > 0$. Atunci:
$|f(x) + g(x)|^p = |f(x) + g(x)|^{p-1} \cdot |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} +$
$+ |g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1}$.

Integrăm inegalitatea de mai sus pe intervalul $[a, b]$:
$$\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\, dx \leq \int_a^b |f(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1}\, dx + \int_a^b |g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1}\, dx.$$
Pentru fiecare dintre termenii din membrul drept al inegalităţii obţinute aplicăm inegalitatea lui Hölder. Obţinem:
$$\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{(p-1)q}\, dx\right)^{1/q} +$$
$$+ \left(\int_a^b |g(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{(p-1)q}\, dx\right)^{1/q},$$
unde $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$.

Rezultă:
$$\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\, dx\right)^{1/q} +$$
$$+ \left(\int_a^b |g(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\, dx\right)^{1/q}.$$
Împărţind inegalitatea de mai sus prin $\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\, dx\right)^{1/q}$, avem:
$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\, dx\right)^{1/p},$$
adică inegalitatea dorită.

*Observaţie.* Pentru $p = 2$ inegalitatea devine:
$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b f^2(x)\, dx\right)^{1/2} + \left(\int_a^b g^2(x)\, dx\right)^{1/2}.$$
**24.** Să se calculeze ariile mărginite de următoarele curbe de ecuaţii:

a) $y^2 = 8(2 - x)$, $y^2 = 24(2 + x)$; b) $y = 2x - x^2$, $x + y = 0$;

c) $y = e^{-x} \sin x$, $y = 0$, $x \geq 0$.

**Rezolvare.** a) Reprezentând grafic cele două funcţii obţinem Figura 1.2.3. Intersectând cele două parabole obţinem punctele $C(-1, 2\sqrt{6})$, $D(-1, -2\sqrt{6})$.

Aria figurii cuprinsă între parabole este:

$$S = 2(S_{BCE} + S_{ECA}) = 2\int_{-2}^{-1} 2\sqrt{6}\cdot\sqrt{2+x}\,dx + 2\int_{-1}^{2} 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x}\,dx =$$

$$= 4\sqrt{6}\cdot\frac{2}{3}(x+2)^{3/2}\Big|_{-2}^{-1} - 4\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}(2-x)^{3/2}\Big|_{-1}^{2} = \frac{8\sqrt{6}}{3} + \frac{8\sqrt{2}}{3}\cdot 3\sqrt{3} = \frac{32\sqrt{6}}{3}.$$

b) Reprezentăm grafic cele două funcţii. Obţinem Figura 1.2.4.

Aria domeniului delimitat de cele două curbe este:

$$S = \int_0^3 (2x - x^2 + x)\,dx = \int_0^3 (3x - x^2)\,dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 = \frac{9}{2}.$$

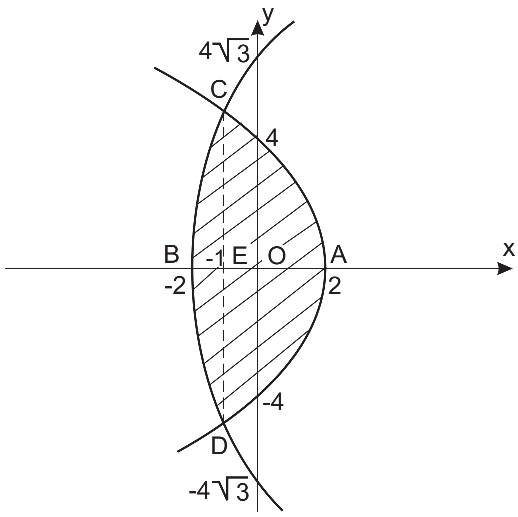

Figura 1.2.3

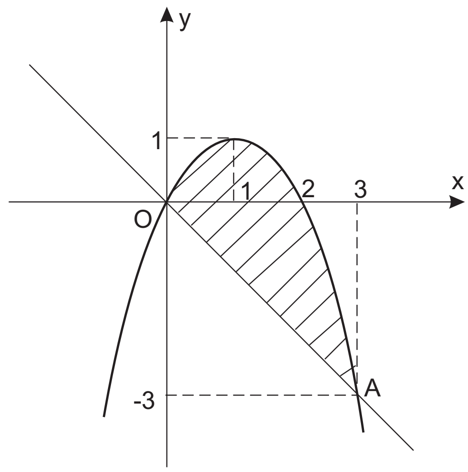

Figura 1.2.4

c) Reprezentând grafic funcţia $y = e^{-x}\sin x,\ \ x \geq 0$ obţinem Figura 1.2.5.

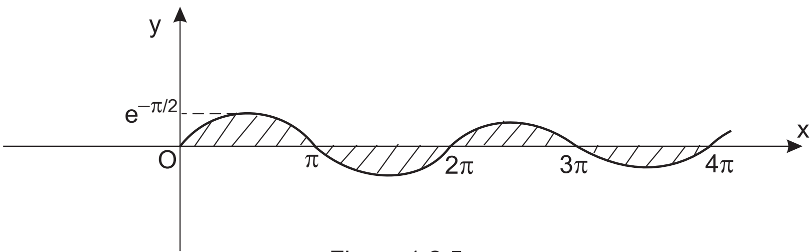

Figura 1.2.5

Avem $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} e^{-x}\sin x\,dx - \int_{2k\pi+\pi}^{2k\pi+2\pi} e^{-x}\sin x\,dx\right).$

Deoarece:

$$\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} e^{-x}\sin x\,dx = -e^{-x}\sin x\Big|_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} + \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} e^{-x}\cos x\,dx = -e^{-x}\cos x\Big|_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} -$$

$$-\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} e^{-x}\sin x\,dx,$$

rezultă că: $\displaystyle\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} e^{-x}\sin x\,dx = \frac{1}{2}\left(e^{-(2k\pi+\pi)} + e^{-2k\pi}\right).$

Apoi:

$$\int_{2k\pi+\pi}^{2k\pi+2\pi} e^{-x}\sin x\,dx = -e^{-x}\sin x\Big|_{2k\pi+\pi}^{2k\pi+2\pi} + \int_{2k\pi+\pi}^{2k\pi+2\pi} e^{-x}\cos x\,dx = -e^{-x}\cos x\Big|_{2k\pi+\pi}^{2k\pi+2\pi} -$$

$$-\int_{2k\pi+\pi}^{2k\pi+2\pi} e^{-x}\sin x\,dx,$$

de unde rezultă că: $\displaystyle\int_{2k\pi+\pi}^{2k\pi+2\pi} e^{-x}\sin x\,dx = \frac{1}{2}\left(e^{-(2k\pi+2\pi)} + e^{-(2k\pi+\pi)}\right).$

Obţinem astfel:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(e^{-(2k\pi+2\pi)} + 2e^{-(2k\pi+\pi)} + e^{-2k\pi}\right) = \frac{1}{2}e^{-2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-2k\pi} + e^{-\pi}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-2k\pi} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-2k\pi}.$$

Deoarece $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}e^{-2k\pi} = \lim_{k\to\infty}\frac{1-e^{-2k\pi}}{1-e^{-2\pi}} = \frac{1}{1-e^{-2\pi}} = \frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi}-1},$

rezultă că:

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^{2\pi}-1} + \frac{e^{\pi}}{e^{2\pi}-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi}-1} = \frac{(e^{\pi}+1)^2}{2(e^{2\pi}-1)} = \frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)} = \frac{1}{2}\mathrm{cth}\,\frac{\pi}{2}.$$

**25.** Să se calculeze aria domeniului mărginit de graficul funcţiei $f : \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \to I\!R$, $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+\cos x}$, axa $Ox$ şi dreptele de ecuaţii $x = 0,\ \ x = \dfrac{3\pi}{4}$.

**Rezolvare.** Aria domeniului este:

$$S = \int_0^{3\pi/4}\left|\frac{\cos x}{1+\cos x}\right|dx = \int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx - \int_{\pi/2}^{3\pi/4}\frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx.$$

Vom calcula integrala nedefinită $\displaystyle\int\frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx$. Facem schimbarea de variabilă $\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2\mathrm{arctg}\,t,\ \ dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt$. Obţinem:

$$\int\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int\frac{1-t^2}{1+t^2}\,dt = -t + 2\int\frac{dt}{t^2+1} = -t+$$
$$+2\mathrm{arctg}\,t + \mathcal{C} = -\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + 2\mathrm{arctg}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + \mathcal{C}.$$

Rezultă că o primitivă a funcţiei $\dfrac{\cos x}{1+\cos x}$ este $F(x) = -\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2} + 2\mathrm{arctg}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}$. Atunci:

$$S = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) - F\left(\frac{3\pi}{4}\right) + F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(-1+\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\mathrm{tg}\frac{3\pi}{8} + 2\mathrm{arctg}\,\mathrm{tg}\frac{3\pi}{8}\right) =$$
$$= -2 + \mathrm{tg}\,\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{4}.$$

**26.** Să se calculeze volumele corpurilor mărginite de suprafeţele obţinute rotind următoarele curbe în jurul axei $Ox$:

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{x},\ \ a \le x \le b,\ \ a,\, b > 0;$

b) $f(x) = \sin x,\ \ y = 0,\ \ 0 \le x \le \pi;$ c) $f(x) = e^{-x}\sqrt{\sin x},\ \ x \ge 0.$

**Rezolvare.** a) Avem:

$$V = \pi\int_a^b\frac{(x-a)(b-x)}{x^2}\,dx = \pi\int_a^b\frac{-x^2+(a+b)x-ab}{x^2}\,dx = -\pi(b-a) + \pi(b+$$
$$+a)\ln x\Big|_a^b + \frac{ab\pi}{x}\Big|_a^b = -\pi(b-a) + \pi(b+a)\ln\frac{b}{a} + ab\pi\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right) = \pi(b+a)\ln\frac{b}{a} - \pi b + \pi a+$$
$$+\pi a - \pi b = \pi(b+a)\ln\frac{b}{a} + 2\pi(a-b).$$

b) $V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx = 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \pi \left(x - \right.$
$\left. -\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{2}.$

c) $V = \pi \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} e^{-2x} \sin x\, dx, \quad (\sin x \geq 0).$

Deoarece:
$\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} e^{-2x} \sin x\, dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} \sin x \Big|_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} + \frac{1}{2} \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} e^{-2x} \cos x\, dx = -\frac{1}{4} e^{-2x} \cos x \Big|_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} -$
$-\frac{1}{4} \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} e^{-2x} \sin x\, dx,$

rezultă că $\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} e^{-2x} \sin x\, dx = \frac{1}{5}\left(e^{-2\pi}+1\right) e^{-4k\pi}.$

Deci: $V = \frac{\pi}{5}(e^{-2\pi}+1) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-4k\pi} = \frac{\pi}{5}(e^{-2\pi}+1) \frac{e^{4\pi}}{e^{4\pi}-1} = \frac{\pi e^{2\pi}}{5(e^{2\pi}-1)}.$

**27.** Să se calculeze lungimile graficelor funcţiilor:

a) $f(x) = \ln \frac{1}{1-x^2}, \quad 0 \leq x \leq \frac{2}{3}$; b) $f(x) = \ln \cos x, \quad 0 \leq x \leq a < \frac{\pi}{2}$.

**Rezolvare.** a) Derivata funcţiei $f$ este: $f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2} \cdot (1-x^2) = \frac{2x}{1-x^2}$.
Rezultă:

$$l(f) = \int_0^{2/3} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}}\, dx = \int_0^{2/3} \frac{1+x^2}{1-x^2}\, dx = -x\Big|_0^{2/3} - \frac{2}{2} \ln \left|\frac{x-1}{x+1}\right| \Bigg|_0^{2/3} =$$

$$= -\frac{2}{3} - \ln \left|\frac{2/3-1}{2/3+1}\right| = -\frac{2}{3} + \ln 5.$$

b) Derivata funcţiei $f$ este $f'(x) = -\operatorname{tg} x$. Avem:

$$l(f) = \int_0^a \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\, dx = \int_0^a \frac{dx}{\cos x}.$$

Notăm $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$. Pentru $x = 0 \Rightarrow t = 0$, pentru $x = a \Rightarrow t = \operatorname{tg} \frac{a}{2}$. Rezultă:

$$l(f) = \int_0^{tg\,\frac{a}{2}} \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} = -2 \int_0^{tg\,\frac{a}{2}} \frac{dt}{t^2-1} = -\ln \left|\frac{t-1}{t+1}\right| \Bigg|_0^{tg\,\frac{a}{2}} = \ln \frac{1+\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{a}{2}} =$$

$$= \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right).$$

**28.** Să se calculeze ariile suprafeţelor de rotaţie obţinute prin rotirea următoarelor curbe în jurul axei $Ox$:

a) $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{a}} \sqrt{x(3a-x)^2}, \quad 0 \leq x \leq 3a, \quad a > 0$; b) $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

**Rezolvare.** a) Derivata funcţiei $f$ este:
$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt{a}} \cdot \frac{(3a-x)^2 - 2x(3a-x)}{2\sqrt{x(3a-x)^2}} = \frac{1}{3\sqrt{a}} \cdot \frac{3x^2 - 12ax + 9a^2}{2\sqrt{x(3a-x)^2}} = \frac{(x-a)(x-3a)}{2\sqrt{a} \cdot \sqrt{x} \cdot (3a-x)} =$$
$$= \frac{a-x}{2\sqrt{ax}}.$$

Rezultă:

$$A(f) = 2\pi \int_0^{3a} \frac{1}{3\sqrt{a}}\sqrt{x}(3a-x)\sqrt{1+\frac{(a-x)^2}{4ax}}\,dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{a}}\int_0^{3a} \frac{(3a-x)(a+x)}{2\sqrt{a}}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{3a}\int_0^{3a}(3a^2+2ax-x^2)\,dx = 3\pi a^2.$$

b) Derivata lui $f$ este $f' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Avem:

$$A(f) = 2\pi \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \cdot \sqrt{1+\frac{1}{\cos^4 x}}\,dx = -2\pi \int_0^{\pi/4} \frac{(\cos x)'}{\cos x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{\cos^4 x}}\,dx \overset{\cos x = y}{=}$$

$$= 2\pi \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1+y^4}}{y^3}\,dy = \pi \int_{\sqrt{2}/2}^{1} (y^2)'\frac{\sqrt{1+y^4}}{y^4}\,dy \overset{y^2=z}{=} \pi \int_{1/2}^{1} \frac{\sqrt{1+z^2}}{z^2}\,dz.$$

Pentru a calcula integrala obţinută facem schimbarea de variabilă $\sqrt{1+z^2} = z+u$ $\Rightarrow z = \dfrac{1-u^2}{2u}$, $dz = \dfrac{-u^2-1}{2u^2}\,du$. Pentru $z = \dfrac{1}{2} \Rightarrow u_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, iar pentru $z = 1 \Rightarrow$ $u_1 = \sqrt{2}-1$. Obţinem:

$$A(f) = \pi \int_{u_1}^{u_2} \frac{(u^2+1)^2}{u(u^2-1)^2}\,du.$$

Fracţia $\dfrac{(u^2+1)^2}{u(u^2-1)^2}$ se descompune în fracţii simple astfel:

$$\frac{(u^2+1)^2}{u(u^2-1)^2} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1} + \frac{C}{(u-1)^2} + \frac{D}{u+1} + \frac{E}{(u+1)^2}$$

$\Rightarrow\ A(u^2-1)^2 + Bu(u-1)(u+1)^2 + Cu(u+1)^2 + Du(u-1)^2(u+1) + Eu(u-1)^2 = (u^2+1)^2$

$\Rightarrow A+B+D = 1,\ \ B+C-D+E = 0,\ \ -2A-B+2C-D-2E = 2,$

$-B+C+D+E = 0,\ \ A = 1.$

Rezultă $A = 1,\ B = 0,\ C = 1,\ D = 0,\ E = -1$. Deci:

$$A(f) = \pi \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{u} + \pi \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{(u-1)^2} - \pi \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{(u+1)^2} = \left(\pi \ln|u| - \frac{2\pi}{u^2-1}\right)\Bigg|_{u_1}^{u_2} =$$

$$= \pi \ln \frac{(\sqrt{5}-1)}{2(\sqrt{2}-1)} - \frac{4\pi}{1-\sqrt{5}} + \frac{\pi}{1-\sqrt{2}} = \pi \ln \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{2}+1)}{2} + \frac{4\pi(\sqrt{5}+1)}{4} - \frac{\pi(\sqrt{2}+1)}{1} =$$

$$= \pi \ln \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{2}+1)}{2} + \pi(\sqrt{5}-\sqrt{2}).$$

**29.** Să se găsească coordonatele centrelor de greutate ale suprafeţelor mărginite de curbele:

a) $y = 0,\ \ y = \sqrt{1-x^2},\ \ x = 0,\ \ x = 1;$ b) $ax = y^2,\ \ ay = x^2,\ \ a > 0.$

**Rezolvare.** a) Avem:

$$x_G = \frac{\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx}{\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx}, \qquad y_G = \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)\,dx}{\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx}.$$

Calculăm integralele care apar în cele două formule de mai sus:

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)'\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3},$$
$$\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)\,dx = \frac{1}{3},$$
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x\Big|_0^1 + \int_0^1 (\sqrt{1-x^2})'\cdot x\,dx =$$
$$= \frac{\pi}{2} + x\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \;\Rightarrow\; \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Deci $x_G = \dfrac{1/3}{\pi/4} = \dfrac{4}{3\pi}$, $y_G = \dfrac{1/3}{\pi/4} = \dfrac{4}{3\pi}$.

b) Reprezentând grafic cele două curbe, obţinem Figura 1.2.6.

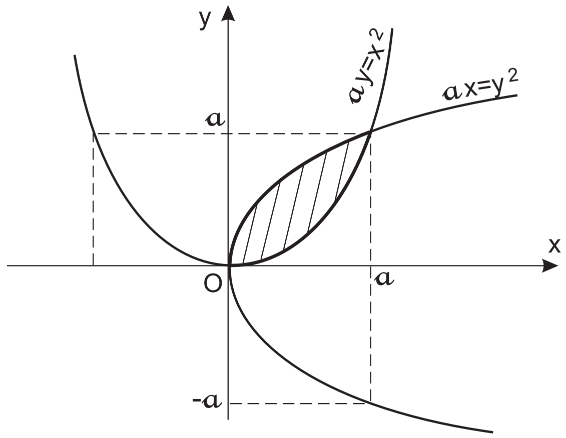


Figura 1.2.6

Avem:

$$x_G = \frac{\displaystyle\int_0^a x\left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right)dx}{\displaystyle\int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right)dx}, \quad y_G = \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^a \left(ax - \frac{x^4}{a^2}\right)dx}{\displaystyle\int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right)dx}.$$

Rezultă atunci:

$$x_G = \frac{\displaystyle\int_0^a \left(a^{1/2}x^{3/2} - a^{-1}x^3\right)dx}{\displaystyle\int_0^a \left(a^{1/2}x^{1/2} - a^{-1}x^2\right)dx} = \frac{\left(\frac{2}{5}a^{1/2}x^{5/2} - \frac{1}{4}a^{-1}x^4\right)\Big|_0^a}{\left(\frac{2}{3}a^{1/2}x^{3/2} - \frac{1}{3}a^{-1}x^3\right)\Big|_0^a} = \frac{\frac{2}{5}a^3 - \frac{1}{4}a^3}{\frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{3}a^2} = \frac{9a}{20}$$

şi $\quad y_G = \dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{5}a^{-2}x^5\right)\Big|_0^a}{\frac{1}{3}a^2} = \dfrac{9a}{20}.$

Deci $x_G = y_G = \dfrac{9a}{20}$.

**30.** Să se calculeze valoarea aproximativă a integralei:

$$I = \int_0^1 \sin\sqrt{x}\,dx$$

cu ajutorul formulelor dreptunghiurilor şi a trapezelor pentru $n = 4$ şi apoi cu ajutorul formulei lui Simpson cu $n = 2$. Să se compare rezultatele obţinute cu valoarea exactă a

integralei.

**Rezolvare.** Avem:

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{4} < x_2 = \frac{1}{2} < x_3 = \frac{3}{4} < x_4 = 1, \ \ h = \frac{1}{4}, \ \ f(x) = \sin\sqrt{x}.$$

Aplicând formula dreptunghiurilor, obţinem:

$$\int_0^1 \sin\sqrt{x}\, dx \simeq \frac{1}{4}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\right] \simeq 0,47271.$$

Aplicând formula trapezelor, obţinem:

$$\int_0^1 \sin\sqrt{x}\, dx \simeq \frac{1}{8}\left\{f(0) + f(1) + 2\left[f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\right]\right\} \simeq 0,57789.$$

Aplicând formula lui Simpson cu $n = 2$, obţinem:

$$\int_0^1 \sin\sqrt{x}\, dx \simeq \frac{1}{12}\left\{f(0) + f(1) + 4\left[f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\right] + 2f\left(\frac{1}{2}\right)\right\} \simeq 0,59212.$$

Valoarea exactă a integralei este:

$$I = \int_0^1 \sin\sqrt{x}\, dx \overset{\sqrt{x}=y}{=} \int_0^1 2y\sin y\, dy = -\int_0^1 2y(\cos y)'\, dy = -2y\cos y\Big|_0^1 +$$
$$+2\int_0^1 \cos y\, dy = -2\cos 1 + 2\sin 1 \simeq 0,60234.$$

Erorile comise prin aproximarea integralei cu cele trei formule de mai sus sunt:

$$\varepsilon_1 = 0,12963, \quad \varepsilon_2 = 0,02445 \quad \text{şi resp.} \quad \varepsilon_3 = 0,01022.$$

**31.** Să se calculeze $\int_0^1 e^{x^2}\, dx$ cu o aproximaţie de $0,001$ folosind metoda lui Simpson.

**Rezolvare.** Să considerăm funcţia $f(x) = e^{x^2}$, $x \in [0,1]$. Calculăm derivatele lui $f$ până la ordinul al patrulea:

$$f'(x) = 2xe^{x^2}, \quad f''(x) = (2+4x^2)e^{x^2}, \quad f'''(x) = (12x+8x^3)e^{x^2}, \quad f^{(4)}(x) = (12+48x^2+$$
$$+16x^4)e^{x^2}.$$

Avem $M_3 = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)| = f^{(4)}(1) = 76e$. Pentru a determina $n$ din formula lui Simpson a.î. eroarea să fie mai mică decât $10^{-3}$ impunem condiţia:

$$\frac{76\, e}{180\, n^4} \le 10^{-3} \Leftrightarrow n^4 \ge \frac{3800\, e}{9} \Rightarrow n \ge 5,8.$$

Rezultă $n = 6$. Deci vom împărţi intervalul $[0,1]$ în $2n = 12$ intervale egale obţinând diviziunea:

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{12} < x_2 = \frac{1}{6} < x_3 = \frac{1}{4} < x_4 = \frac{1}{3} < x_5 = \frac{5}{12} < x_6 = \frac{1}{2} < x_7 = \frac{7}{12} <$$
$$< x_8 = \frac{2}{3} < x_9 = \frac{3}{4} < x_{10} = \frac{5}{6} < x_{11} = \frac{11}{12} < x_{12} = 1.$$

Conform formulei lui Simpson, obţinem:

$$I = \int_0^1 e^{x^2}\, dx \simeq \frac{1}{6\cdot 6}\left\{f(0) + f(1) + 4\left[f\left(\frac{1}{12}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{5}{12}\right) + f\left(\frac{7}{12}\right) +\right.\right.$$
$$\left.\left.+f\left(\frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{11}{12}\right)\right] + 2\left[f\left(\frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{5}{6}\right)\right]\right\} \simeq 1,46266.$$

Deci $I \simeq 1,463$.

## PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

**32.** Să se arate cu ajutorul definiţiei că funcţia $f(x)=\cos x$ este integrabilă pe orice interval $[a,b]\subset I\!R$ şi:
$$\int_a^b \cos x\,dx=\sin b-\sin a.$$

**33.** Să se cerceteze integrabilitatea funcţiei $f:[0,1]\to I\!R$,
$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{dacă } x\in[0,1]\cap Q;\\ -x, & \text{dacă } x\in[0,1]\cap(I\!R\setminus Q).\end{cases}$$

**34.** Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$; b) $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$; c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos x+\cos^3x}$; d) $\displaystyle\int_1^e \ln^3x\,dx$;

e) $\displaystyle\int_2^3\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$; f) $\displaystyle\int_0^3\frac{dx}{(x^2+3)^{5/2}}$; g) $\displaystyle\int_0^a\frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$, $a>0$;

h) $\displaystyle\int_0^1\sqrt{(1-x^2)^3}\,dx$; i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin(x+a)\cos(x+b)\,dx$, $a,\,b\in I\!R$.

**35.** Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\displaystyle\int_0^2\frac{dx}{x^2+ax+4}$, $a\geq 0$; b) $\displaystyle\int_{-2}^2|x^2-1|\,dx$; c) $\displaystyle\int_1^{2e}|\ln x-1|\,dx$;

d) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{dx}{\sin x\cos x+\sin^3x}$; e) $\displaystyle\int_0^{a\sqrt{7}}\frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{a^2+x^2}}$, $a>0$; f) $\displaystyle\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$;

g) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\frac{1}{6}\sin^2x}$; h) $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{|e^x-a|+3}$, $a\in I\!R$; i) $\displaystyle\int_1^3\frac{dx}{|x-a|+1}$, $a\in I\!R$;

j) $\displaystyle\int_2^3\frac{dx}{x^2+2x\sin\alpha+\frac{1}{4}}$, $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

**36.** Să se calculeze sumele Darboux asociate următoarelor funcţii şi diviziuni:

a) $f:[1,2]\to I\!R$, $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$, unde $\Delta_1=\left(1,\,\dfrac{9}{8},\,\dfrac{7}{6},\,\dfrac{5}{4},\,\dfrac{3}{2},\,2\right)$, $\Delta_2=\left(1,\,\dfrac{7}{6},\,\dfrac{3}{2},2\right)$.

b) $f:[-1,1]\to I\!R$, $f(x)=e^{2x}$, cu $\Delta_1=\left(-1,-\dfrac{1}{2},\,0,\,\dfrac{1}{2},\,1\right)$, $\Delta_2=(-1,\,0,\,1)$.

**37.** Să se calculeze, cu ajutorul integralelor definite, limitele următoarelor şiruri:

a) $S_n=\dfrac{1}{n^2}e^{\frac{1}{n^2}}+\dfrac{2}{n^2}e^{\frac{4}{n^2}}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}e^{\frac{(n-1)^2}{n^2}}+\dfrac{n}{n^2}e^{\frac{n^2}{n^2}}$;

b) $S_n=n\left[\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right]$;

c) $S_n=\dfrac{1}{n^5}\left[1+2^4+3^4+\cdots+(n-1)^4+n^4\right]$;

d) $S_n=\dfrac{1}{n}\left[\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{4}{n^2}}+\cdots+\sqrt{1+\dfrac{(n-1)^2}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{n^2}{n^2}}\right]$;

e) $S_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n \mathrm{tg}^2\frac{k\pi}{3n}$; f) $S_n=\dfrac{1}{n^4}\displaystyle\sum_{k=1}^n k^2\sqrt[3]{k^3+n^3}$;

g) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(2n+k)\sqrt{(2n+k)k}}$.

**38.** Să se calculeze:

a) $\int_0^1 f(x)\,dx$, unde $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } 0 \le x \le t; \\ t \cdot \dfrac{1-x}{1-t}, & \text{dacă } t \le x \le 1. \end{cases}$

b) $\int_0^6 E[x] \cdot \sin \frac{\pi x}{6}\,dx$; c) $\int_0^\pi x \cdot \operatorname{sgn}(\cos x)\,dx$; d) $\int_0^1 \operatorname{sgn}(\sin(\ln x))\,dx$.

**39.** Fără a calcula integralele, să se demonstreze următoarele inegalităţi:

a) $\int_2^{10} x \operatorname{arctg} x\,dx > \int_2^{10} \ln(1+x^2)\,dx$; b) $\int_0^{\pi/2} e^{-\sin x}\,dx \le \frac{\pi}{2}$;

c) $\frac{1}{3} \le \int_4^7 \frac{x-3}{x+5}\,dx \le 1$; d) $\frac{16}{3} \le \int_4^6 \frac{x^2}{x+2}\,dx \le 9$.

**40.** Se consideră şirul:

$$s_n = \int_{1/10^{n+1}}^{1} E\left[\lg \frac{1}{x}\right]\,dx.$$

Să se arate că $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{9}$.

**41.** Să se arate că:

$$\int_{1/n}^{1} xE\left[\frac{1}{x}\right]\,dx = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2n}.$$

**42.** Fie $I_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n\,dx$. Să se arate că:

$$I_{m,n} = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}.$$

**43.** Să se calculeze:

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n} x\,dx.$$

**44.** Să se arate că:

a) $\lim_{\alpha\to 0} \int_\alpha^{\pi/2} \frac{\sin 2nx}{\sin x}\,dx = 2\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right]$;

b) $\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} \int_\alpha^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

**45.** Să se calculeze:

a) aria domeniului mărginit de graficul funcţiei:

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}},$$

de axa $Ox$ şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 0,75$.

b) aria domeniului mărginit de curba care are ecuaţia $x^2 y^2 = 4(x-1)$ şi dreapta care trece prin punctele ei de inflexiune.

**46.** Interiorul elipsei de ecuaţie $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ este despărţit de hiperbola de ecuaţie $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ în trei regiuni. Să se calculeze aria fiecăreia dintre ele.

**47.** Să se calculeze aria mulţimii cuprinsă între parabolele $y^2 = 8x$ şi $x^2 = y$.

**48.** Să se calculeze volumele corpurilor mărginite de suprafeţele obţinute rotind următoarele curbe în jurul axei $Ox$:

a) $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $x \in [0, a]$; b) $y = \sqrt{\dfrac{x(x-3)}{x-4}}$, $x \in [0, 3]$;

c) $y = b\left(\dfrac{x}{a}\right)^2$, $y = b\left|\dfrac{x}{a}\right|$.

**49.** Să se calculeze lungimile curbelor care au ecuaţiile:

a) $y = x^{3/2}$, $x \in [0, 4]$; b) $y = \sqrt{2px}$, $x \in [1, 5]$, $p > 0$; c) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

**50.** Să se calculeze ariile suprafeţelor de rotaţie obţinute prin rotirea următoarelor curbe în jurul axei $Ox$:

a) $y = x\sqrt{\dfrac{x}{3}}$, $x \in [0, 3]$; b) $y = \cos\dfrac{\pi x}{4}$, $|x| \le 2$; c) $y = \sqrt{2px}$, $x \in [0, 2]$, $p > 0$.

**51.** Să se determine coordonatele centrului de greutate al următoarei plăci plane omogene:

$$A = \{(x, y);\ 0 \le y \le \sin x;\ 0 \le x \le \pi\}.$$

**52.** Să se calculeze coordonatele centrului de greutate pentru figura mărginită de curba închisă care are ecuaţia $y^2 = ax^3 - x^4$, $a > 0$.

**53.** Să se calculeze valorile aproximative ale următoarelor integrale:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin^2 x}\, dx$, folosind metoda dreptunghiurilor şi metoda trapezelor cu $n = 6$;

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{3 + \cos x}\, dx$, folosind metoda lui Simpson cu $n = 3$.

**54.** Să se calculeze:

$$4\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}\ \big(= \pi\big),$$

cu aproximaţie de $0,001$ folosind metoda lui Simpson, deducându-se astfel numărul $\pi$ cu trei zecimale exacte.

# Capitolul 2
# ŞIRURI ŞI SERII DE FUNCŢII

## §1. ŞIRURI DE FUNCŢII

Şirul de funcţii $(f_n)_{n\in I\!N}$, (sau $(f_n)_{n\in I\!N^*}$), $f_n : A \to I\!R$, $A \subset I\!R$, $n \in I\!N$, *converge punctual* la funcţia $f : A \to I\!R$ dacă pentru $\forall x \in A$, $f_n(x) \to f(x)$, pentru $n \to \infty$. Notăm $f_n \xrightarrow{p} f$, pe $A$, $n \to \infty$.

Şirul $(f_n)_{n\in I\!N}$, $f_n : A \to I\!R$, $n \in I\!N$, converge punctual la funcţia $f : A \to I\!R$ daca:

$\forall x \in A$ şi $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in I\!N$ a.î. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0(\varepsilon, x)$.

Şirul $(f_n)_{n\in I\!N}$, $f_n : A \to I\!R$, $n \in I\!N$, *converge uniform* la funcţia $f : A \to I\!R$ dacă:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0(\varepsilon) \in I\!N$ a.î. $\forall n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in A$.

Notăm $f_n \xrightarrow{u} f$, pe $A$, $n \to \infty$.

**Teorema 2.1.1. (Cauchy)** Şirul $(f_n)_{n\in I\!N}$ converge uniform pe mulţimea $A$ dacă şi numai dacă:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0(\varepsilon) \in I\!N$ a.î. $\forall n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in A$, $\forall p \in I\!N$.

**Teorema 2.1.2.** Şirul de funcţii $(f_n)_{n\in I\!N}$ converge uniform la funcţia $f$ pe mulţimea $A$ dacă şi numai dacă:

$$\lim_{n\to\infty} \Big\{ \underbrace{\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|}_{M_n} \Big\} = 0.$$

**Teorema 2.1.3.** Dacă $\exists\, (\alpha_n)_{n\in I\!N} \subset I\!R_+$, $\alpha_n \to 0$ pentru $n \to \infty$, astfel încât:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n, \ \ \forall n \in I\!N, \ \ \forall x \in A$$

atunci $f_n \xrightarrow{u} f$, pe $A$, $n \to \infty$.

**Teorema 2.1.4.** Fie şirul de funcţii $(f_n)_{n\in I\!N}$, $f_n : A \to I\!R$, $n \in I\!N$, mărginite pe $A$. Dacă $f_n \xrightarrow{u} f$, pe $A$, atunci şi funcţia $f$ este mărginită pe $A$.

**Teorema 2.1.5.** Fie $f_n : A \to I\!R$, $n \in I\!N$ şi $x_0$ un punct de acumulare pentru $A$. Dacă sunt îndeplinite condiţiile:

a) $f_n \xrightarrow{u} f$, pe $A$, $n \to \infty$,

b) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = l_n, \ \forall\, n \in I\!N$

atunci $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} l_n$, adică:

$$\lim_{x \to x_0} \left( \lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to \infty} \left( \lim_{x \to x_0} f_n(x) \right).$$

**Teorema 2.1.6.** a) Fie $f_n : A \to I\!R, \ n \in I\!N$, funcţii continue într-un punct $x_0 \in A$. Dacă $f_n \xrightarrow{u} f$, pe $A$, atunci şi funcţia $f$ este continuă în $x_0$.

b) Dacă $(f_n)_{n \in I\!N}, \ f_n : A \to I\!R$, este un şir de funcţii continue pe $A$ şi $f_n \xrightarrow{u} f$, pe $A$, atunci $f$ este continuă pe $A$.

**Teorema 2.1.7.** Fie funcţiile $f_n : I \to I\!R, \ n \in I\!N$, $I$ un interval mărginit din $I\!R$, iar $x_0 \in I$. Dacă:

a) $\{f_n(x_0)\}_{n \in I\!N}$ este un şir numeric convergent,

b) funcţiile $f_n, \ n \in I\!N$, sunt derivabile pe $I$,

c) $f_n' \xrightarrow{u} g$, pe $I$, $n \to \infty$,

atunci:

a') $\exists\, f : I \to I\!R$ a.î. $f_n \xrightarrow{u} f$, pe $I$, $n \to \infty$,

b') $f$ este derivabilă şi $f' = g$, adică:

$$\lim_{n \to \infty} f_n'(x) = \Big( \underbrace{\lim_{n \to \infty} f_n(x)}_{f} \Big)'.$$

**Teorema 2.1.8.** Dacă funcţiile $f_n : [a, b] \to I\!R, \ n \in I\!N$, satisfac condiţiile:

a) $f_n \xrightarrow{u} f$, pe $[a, b]$, $n \to \infty$,

b) funcţiile $f_n, \ n \in I\!N$, sunt integrabile pe $[a, b]$

atunci:

a') $f$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi

b') $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \underbrace{\lim_{n \to \infty} f_n(x)}_{f}\, dx.$

## PROBLEME REZOLVATE

**1.** Să se studieze punctuala şi uniforma convergenţă pentru următoarele şiruri de funcţii:

a) $f_n(x) = \dfrac{\sin^n x}{n^\alpha}, \ x \in I\!R, \ \alpha > 0, \ n \geq 1;$ b) $f_n(x) = x^2 + \dfrac{1}{n^3} \sin nx, \ x \in I\!R, \ n \geq 1;$

c) $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^2 x^2}, \ x \in [0, 1], \ n \geq 1;$ d) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \ x \in [0, 1], \ n \geq 1.$

**Rezolvare.** a) Pentru $\forall x \in I\!R$ fixat, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Deci $f_n \xrightarrow{p} f$, pe $I\!R$, $n \to \infty$, unde $f : I\!R \to I\!R$, $f(x) = 0$, $\forall x \in I\!R$. Deoarece:

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| \le \frac{1}{n^\alpha},\ \forall n \ge 1,\ \forall x \in I\!R,$$

rezultă conform Teoremei 2.1.3, (cu $\alpha_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \to 0,\ n \to \infty$), că $f_n \xrightarrow{u} 0$, pe $I\!R$, $n \to \infty$.

b) Pentru $x \in I\!R$ fixat, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = x^2$, deci $f_n \xrightarrow{p} f$, pe $I\!R$, unde $f : I\!R \to I\!R$, $f(x) = = x^2$. În plus:

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n^3}|\sin nx| \le \frac{1}{n^3},\ \forall x \in I\!R,\ \forall n \ge 1.$$

Conform Teoremei 2.1.3, cu $\alpha_n = \dfrac{1}{n^3} \to 0,\ n \to \infty$, rezultă că $f_n \xrightarrow{u} f$, pe $I\!R$, $n \to \infty$.

c) Pentru $x = 0$, $f_n(0) = 0 \to 0$; pentru $x \in (0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Deci $f_n \xrightarrow{p} f$, pe $[0,1]$, unde $f : [0,1] \to I\!R$, $f(x) = 0$. Deoarece:

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x}{1+n^2x^2} \le \frac{1}{2n},\ \forall x \in [0,1],\ \forall n \ge 1,$$

rezultă, conform aceleiaşi Teoreme 2.1.3, cu $\alpha_n = \dfrac{1}{2n} \to 0,\ \to \infty$, că $f_n \xrightarrow{u} 0$, pe $[0,1]$, $n \to \infty$.

d) Pentru $\forall x \in [0,1)$ fixat avem $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, iar pentru $x = 1$, $f_n(x) = 0 \to 0$, $n \to \infty$. Deci $f_n \xrightarrow{p} 0$, pe $[0,1]$. Pentru a studia convergenţa uniformă a şirului $f_n$ vom aplica Teorema 2.1.2. Să calculăm $M_n = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1]} f_n(x)$. Pentru aceasta calculăm derivatele funcţiilor $f_n$: $f_n'(x) = x^{n-1}[n-(n+1)x]$. Avem $f_n'(x) = 0$ pentru $x = \dfrac{n}{n+1}$, iar $f_n'(x) > 0, \forall x \in \left(0, \dfrac{n}{n+1}\right)$ şi $f_n'(x) < 0, \forall x \in \left(\dfrac{n}{n+1}, 1\right)$. Rezultă că:

$$M_n = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \cdot \frac{1}{n+1} \to 0,\ n \to \infty.$$

Conform Teoremei 2.1.2 deducem că $f_n \xrightarrow{u} 0$, pe $[0,1]$, $n \to \infty$.

**2.** Să se arate, folosind Teorema 2.1.1, că şirul $(f_n)_{n\ge1}$ definit prin:

$$f_n(x) = \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \cdots + \frac{\cos nx}{n^2},\ x \in I\!R,\ n \ge 1,$$

este uniform convergent pe $I\!R$.

**Rezolvare.** Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar, momentan fixat. Vom determina un rang $n_0(\varepsilon) \in I\!N^*$ a.î. $\forall n \ge n_0(\varepsilon)$ să avem: $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in I\!R,\ \forall p \in I\!N$. Avem:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = \left|\frac{\cos(n+1)x}{(n+1)^2} + \frac{\cos(n+2)x}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{\cos(n+p)x}{(n+p)^2}\right| \le \frac{1}{(n+1)^2} +$$

$$+ \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n},$$

$\forall\, x \in I\!R,\ \forall\, p \in I\!N$.

Impunând condiţia $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ găsim rangul $n_0(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, pentru care:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon,\ \forall\, n \geq n_0(\varepsilon),\ \forall\, p \in I\!N,\ \forall\, x \in I\!R.$$

Deci pentru $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ a.î. $\forall\, n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, $\forall\, x \in I\!R$, $\forall\, p \in I\!N$, adică conform Teoremei 2.1.1, $f_n$ converge uniform pe mulţimea $I\!R$.

**3.** Să se demonstreze că şirurile de mai jos, deşi sunt punctual convergente, nu converg uniform pe mulţimile menţionate:

a) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2},\ x \in [0,1],\ n \geq 1$; b) $f_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2x^2},\ x \in [0,1],\ n \geq 1$;

c) $f_n(x) = (x+1)\mathrm{arctg}\, nx,\ x \in I\!R,\ n \geq 1$.

**Rezolvare.** a) Pentru $\forall\, x \in [0,1]$ fixat, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, deci $f_n \xrightarrow{p} 0$, pe $[0,1]$, $n \to \infty$. Avem: $f_n'(x) = n\dfrac{1 - n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$, $x \in [0,1]$, $\forall n \geq 1$. Rezulta că $f_n'(x) = 0$ pentru $x = \dfrac{1}{n}(\in [0,1])$. Rezultă că $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2} \not\to 0$, $n \to \infty$. Conform Teoremei 2.1.2 deducem că $f_n \overset{u}{\not\to} 0$, pe $[0,1]$.

b) Pentru $x \in [0,1]$ fixat, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 2x \lim\limits_{n\to\infty} n^2 e^{-n^2x^2} = 0$, deci $f_n \xrightarrow{p} 0$, pe $[0,1]$. Apoi, calculând $f_n'(x) = 2n^2e^{-n^2x^2}(1 - 2n^2x^2)$, cu $n$ fixat momentan, obţinem că $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n\left(\dfrac{1}{n\sqrt{2}}\right) = n\sqrt{2}e^{-1/2} \not\to 0$, $n \to \infty$. Rezultă, conform Teoremei 2.1.2, că şirul $f_n \overset{u}{\not\to} 0$, pe $[0,1]$.

c) Pentru $x > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{\pi}{2}(x+1)$; pentru $x < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = -\dfrac{\pi}{2}(x+1)$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. Deci $f_n \xrightarrow{p} f$, pe $I\!R$, unde:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}(x+1), & \text{dacă } x > 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}(x+1), & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Pentru a arăta că şirul $f_n$ nu este uniform convergent, vom studia funcţia $g_n$, cu $n$ fixat:

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} (x+1)\left(\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\, nx\right), & \text{dacă } x > 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \\ (x+1)\left(\dfrac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\, nx\right), & \text{dacă } -1 < x < 0, \\ -(x+1)\left(\dfrac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\, nx\right), & \text{dacă } x \leq -1. \end{cases}$$

Deoarece $M_n = \sup\limits_{x\in I\!R} g_n(x) = \lim\limits_{x\to 0} g_n(x) = \dfrac{\pi}{2}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} M_n \neq 0$, deci $f_n \overset{u}{\not\to} f$, pe $I\!R$.

O altă metodă de rezolvare a problemei de la punctul c) este următoarea: dacă presupune că $f_n \xrightarrow{u} f$, pe $I\!R$, atunci, deoarece funcţiile $f_n$ sunt continue pe $I\!R$, ar rezulta,

conform Teoremei 2.1.6, că $f$ este şi ea continuă pe $I\!R$. Absurd, deoarece $f$ nu este continuă, deci $f_n \overset{u}{\not\to} f$, pe $I\!R$.

**4.** Fie şirul de funcţii $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n : [0,1] \to I\!R$ date prin:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in E_n = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}, \\ 0, & \text{dacă } x \in [0,1] \setminus E_n, \quad n \geq 1, \end{cases}$$

unde $E = \{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ este mulţimea numerelor raţionale din intervalul $[0,1]$. Să se studieze convergenţa acestui şir, precum şi proprietatea de integrare termen cu termen a lui.

**Rezolvare.** Pentru $x \in [0,1]$ arbitrar, dar fixat, avem:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in E, \\ 0, & \text{dacă } x \in [0,1] \setminus E. \end{cases}$$

Deci $f_n \xrightarrow{p} f$, pe $[0,1]$, unde $f$ este funcţia de mai sus, adică funcţia caracteristică a mulţimii numerelor raţionale din intervalul $[0,1]$. Funcţiile $f_n$, $n \geq 1$, având un număr finit de puncte de discontinuitate, rezultă că sunt integrabile pe $[0,1]$. Cu ajutorul sumelor Riemann se arată că $f$ nu este integrabilă pe $[0,1]$, (vezi {Capitolul 1, §2, Problema 2}), deci $f_n \overset{u}{\not\to} f$, pe $[0,1]$. Într-adevăr, dacă am presupune că $f_n \xrightarrow{u} f$, pe $[0,1]$, atunci, conform Teoremei 2.1.8 ar rezulta că $f$ este integrabilă Riemann pe $[0,1]$, ceea ce este absurd. Deci $f_n \overset{u}{\not\to} f$ şi $(f_n)_{n\geq 1}$ nu are proprietatea de integrare termen cu termen a şirului de funcţii.

**5.** Să se arate că pentru următoarele şiruri convergente, limita integralei nu este egală cu integrala limitei:

a) $$f_n(x) = \begin{cases} \sin x + ne^{-nx}, & \text{dacă } x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right], \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

b) $$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x, & \text{dacă } x \in \left[0, \dfrac{1}{2n}\right], \\ 2n - 2n^2 x, & \text{dacă } x \in \left(\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{n}\right], \\ 0, & \text{dacă } x \in \left(\dfrac{1}{n}, 1\right], \quad n \geq 1. \end{cases}$$

**Rezolvare.** a) Pentru $x = 0$, $f_n(0) = 0 \to 0$, $n \to \infty$; pentru $x \in (0, \pi/2]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \sin x$. Deci $f_n \xrightarrow{p} f$, pe $[0, \pi/2]$, unde $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi/2]$. Apoi:

$$\int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi/2} - e^{-nx}\Big|_0^{\pi/2} = 2 - e^{-n\pi/2},$$

iar $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx = 2$.

Deoarece $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi/2} = 1$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx \neq \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$,

de unde deducem, aplicând Teorema 2.1.8, că $f_n \overset{u}{\not\to} f$, pe $[0,\pi/2]$.

b) Deoarece pentru $\forall\, x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, rezultă că $f_n \xrightarrow{p} f$, pe $[0,1]$, unde $f(x) = 0,\ \ \forall\, x \in [0,1]$. Apoi:

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{1/(2n)} 2n^2x\,dx + \int_{1/(2n)}^{1/n} (2n-2n^2x)\,dx = n^2x^2\Big|_0^{1/(2n)} + 2nx\Big|_{1/(2n)}^{1/n} -$$

$$-n^2x^2\Big|_{1/(2n)}^{1/n} = \frac{1}{2},\quad \text{iar } \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Deoarece $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, rezultă că $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 f(x)\,dx$, iar $f_n \overset{u}{\not\to} f$, pe $[0,1]$.

**6.** Să se arate pentru şirul de mai jos că limita derivatelor şirului nu este egală cu derivata limitei:

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\operatorname{arctg} nx,\quad x\in I\!R,\ n\geq 1.$$

**Rezolvare.** Deoarece $|f_n(x)| = \dfrac{1}{n}|\operatorname{arctg} nx| \leq \dfrac{\pi}{2n},\ \ \forall\, x \in I\!R,\ \forall\, n\geq 1$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{2n} = 0$, rezultă conform Teoremei 2.1.3 că $f_n \xrightarrow{u} f$, pe $I\!R$, unde $f(x) = 0,\ \ \forall\, x\in I\!R$. Derivata acestei limite este funcţia identic zero. Totuşi limita derivatelor este:

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+n^2x^2} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x\neq 0,\\ 1, & \text{dacă } x = 0.\end{cases}$$

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) \neq \Big(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\Big)'$.

**7.** Să se arate că şirul de funcţii $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n(x) = e^{-nx^4}\sin nx,\ \ x\in I\!R,\ n\geq 1$, nu converge uniform pe $I\!R$, dar converge uniform pe mulţimea $A = \{x\in I\!R, |x|\geq \alpha\}$, unde $\alpha > 0$.

**Rezolvare.** Evident pentru $\forall\, x\in I\!R$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, deci $f_n \xrightarrow{p} f$, pe $I\!R$, unde $f(x) = 0,\ \ \forall\, x\in I\!R$. Deoarece:

$$\sup_{x\in I\!R}|f_n(x)| \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-1/n^3}\sin 1 \geq e^{-1}\sin 1,$$

rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\Big\{\sup\limits_{x\in I\!R}|f_n(x)|\Big\} \neq 0$, deci, conform Teoremei 2.1.2, $f_n \overset{u}{\not\to} f$, pe $I\!R$, $n\to\infty$.

Pentru $\alpha > 0$ avem $|f_n(x)| \leq e^{-n\alpha^4},\ \forall\, n\geq 1,\ \forall\, x\in I\!R,\ |x|\geq\alpha$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n\alpha^4} = 0$, rezultă conform Teoremei 2.1.3 că $f_n \xrightarrow{u} f$, pe $A$, $n\to\infty$.

## PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

**8.** Să se studieze punctuala şi uniforma convergenţă a următoarelor şiruri de funcţii:

a) $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n^2+x^4},\ \ x\in[1,\infty),\ n\geq 1$; b) $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2}\operatorname{arctg} nx,\ \ x\in I\!R,\ n\geq 1$;

c) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$, $x \in [0,\infty)$, $n \geq 1$; d) $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+n^2x^4}$, $x \in [0,1]$, $n \geq 1$.

**9.** Folosind teorema de caracterizare a lui Cauchy, să se arate că următoarele şiruri sunt uniform convergente pe $I\!R$:

a) $f_n(x) = \dfrac{\sin x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{2^2} + \cdots + \dfrac{\sin nx}{2^n}$, $x \in I\!R$, $n \geq 1$;

b) $f_n(x) = \dfrac{\cos x}{1\cdot 2} + \dfrac{\cos x^2}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{\cos x^n}{n\cdot(n+1)}$, $x \in I\!R$, $n \geq 1$.

**10.** Să se arate că şirul $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n : I\!R \to I\!R$, definite prin:

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\operatorname{arctg} x^n, \quad x \in I\!R, \ n \geq 1,$$

este uniform convergent pe $I\!R$, dar $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(1) \neq \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)'(1)$. Să se explice rezultatul.

**11.** Fie funcţiile $f_n(x) = nx^n(1-x)$, $x \in [0,1]$, $n \geq 1$.

a) Să se găsească $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in [0,1]$.

b) Converge $f_n$ la $f$ în mod uniform pe $[0,1]$ ?

c) Converge $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ la $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$, pentru $n \to \infty$ ?

# §2. SERII DE FUNCŢII

Fie funcţiile $f_n : A \to I\!R$, $A \subset I\!R$, $n \geq 1$. Numim *serie de funcţii*, notată $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, cuplul de funcţii $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots, S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, unde:

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x), \ \forall\, n \geq 1, \ \forall\, x \in A.$$

Un punct $x_0 \in A$ se numeşte *punct de convergenţă* a seriei de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, dacă seria numerică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ este convergentă. Mulţimea $B$ a punctelor $x \in A$ în care seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este convergentă se numeşte *mulţimea de convergenţă* a acestei serii, iar funcţia $f : B \to I\!R$ definită prin $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ se numeşte *suma seriei.*

Spunem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este *simplu convergentă* pe $B \subset A$ sau *converge punctual* pe mulţimea $B$ dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 1}$ este convergent punctual pe mulţimea $B$. Spunem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniform* pe mulţimea $B \subset A$ dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 1}$ este uniform convergent pe mulţimea $B$. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ se numeşte *absolut*

*convergentă* pe mulţimea $B \subset A$ dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ este simplu convergentă pe $B$.

**Teorema 2.2.1 (Cauchy).** Seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe mulţimea $B \subset A$ dacă şi numai dacă:

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\varepsilon)$ a.î. $\forall\, n \geq n_0(\varepsilon): \quad |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon,$
$\forall\, p \in I\!\!N,\ \forall\, x \in B.$

**Teorema 2.2.2 (Criteriul lui Weierstrass).** Fie seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Dacă există o serie numerică convergentă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \ a_n \geq 0,\ \forall\, n \geq 1$ astfel încât:

$$|f_n(x)| \leq a_n,\ \ \forall\, n \geq 1,\ \ \forall\, x \in B \subset A,$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform şi absolut convergentă pe $B$.

**Teorema 2.2.3 (Criteriul lui Abel).** Fie şirurile de funcţii $f_n,\ g_n : A \to I\!\!R$, $n \geq 1$. Dacă:

a) seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe $A$;

b) şirul $(g_n(x))_{n\geq 1}$ este monoton, $\forall\, x \in A$;

c) şirul $(g_n)_{n\geq 1}$ este uniform mărginit, adică:

$$\exists\, K > 0 \ \text{a.î.}\ |g_n(x)| \leq K,\ \ \forall\, n \geq 1,\ \ \forall\, x \in A,$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ este uniform convergentă pe $A$.

**Teorema 2.2.4 (Criteriul lui Dirichlet).** Fie şirurile de funcţii $f_n,\ g_n : A \to I\!\!R$, $n \geq 1$. Dacă:

a) seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ are şirul sumelor parţiale uniform mărginit, adică:

$$\exists\, K > 0 \ \text{a.î.}\ |S_n(x)| \leq K,\ \ \forall\, n \geq 1,\ \ \forall\, x \in A,$$

unde $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$;

b) şirul $(g_n)_{n\geq 1}$ este uniform convergent la 0 şi şirul $(g_n(x))_{n\geq 1}$ este monoton descrescător, $\forall\, x \in A$,

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ este uniform convergentă pe $A$.

**Consecinţa 2.2.1 (Criteriul lui Leibniz).** Fie funcţiile $f_n : A \to I\!\!R,\ \ n \geq 1$. Dacă pentru $\forall\, x \in A$ şirul $(f_n(x))_{n\geq 1}$ este monoton descrescător şi $f_n \xrightarrow{u} 0$, pe $A$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n$ este uniform convergentă pe $A$.

**Teorema 2.2.5.** Fie seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n,\ f_n : A \to I\!\!R,\ \ n \geq 1$. Dacă:

a) seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe $A$;

b) funcţiile $f_n,\ \ n \geq 1$ sunt mărginite pe mulţimea $A$,

atunci suma $f$ a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este o funcţie mărginită pe $A$.

**Teorema 2.2.6.** Fie seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n,\ \ f_n : A \to \mathbb{R},\ \ n \geq 1$ şi $x_0$ un punct de acumulare pentru $A$. Dacă:

a) seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe $A$;

b) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = l_n,\ \ \forall\, n \geq 1$,

atunci:

a') funcţia sumă $f$ a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ are limită în $x_0$,

b') $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} l_n$, adică $\lim\limits_{x \to x_0} \left( \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left( \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) \right)$.

**Teorema 2.2.7.** Fie seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n,\ \ f_n : A \to \mathbb{R},\ \ n \geq 1$. Dacă:

a) funcţiile $f_n,\ \ n \geq 1$ sunt continue pe $A$;

b) seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe $A$ cu suma $f$,

atunci $f$ este o funcţie continuă pe $A$.

**Teorema 2.2.8.** Fie seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $f_n : I \to \mathbb{R}$, $I$ interval mărginit din $\mathbb{R}$, iar $x_0 \in I$. Dacă:

a) seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ este o serie numerică convergentă;

b) funcţiile $f_n,\ \ n \geq 1$, sunt derivabile pe $I$;

c) seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ este uniform convergentă pe $I$ cu suma $g : I \to \mathbb{R}$,

atunci:

a') seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe $I$ cu suma $f : I \to \mathbb{R}$,

b') funcţia $f$ este derivabilă pe $I$ şi $f' = g$, adică:

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

**Teorema 2.2.9.** Fie seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n,\ \ f_n : [a,b] \to \mathbb{R},\ \ n \geq 1$. Dacă:

a) seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe $[a,b]$ cu suma $f$;

b) funcţiile $f_n$ sunt integrabile pe $[a,b]$, $\forall\, n \geq 1$,

atunci:

a') funcţia $f$ este integrabilă pe $[a,b]$ şi

b') $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$ sau $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$

## PROBLEME REZOLVATE

**1.** Să se determine domeniul de convergenţă (absolută şi simplă) pentru următoarele serii de funcţii:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n\cdot\left(\frac{1-x}{1+3x}\right)^n$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\cdot\frac{\cos^n x}{n}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{5n^2+n+1}\cdot\left(\frac{x}{3x+1}\right)^n$; d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}5^n\cdot\sqrt{n}\,(x-x^2)^n$.

**Rezolvare.** Vom studia convergenţa punctuală (simplă) sau absolută a acestor serii de funcţii aplicând criterii de convergenţă de la serii numerice. Să notăm cu $f_n(x)$ termenul general al seriilor de mai sus.

a) Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}\cdot\left|\frac{1-x}{1+3x}\right|=\left|\frac{1-x}{1+3x}\right|.$$

Seria dată este absolut convergentă pentru $\forall\, x$ care verifică inegalitatea $\left|\dfrac{1-x}{1+3x}\right|<$ $<1$. Rezolvând această inecuaţie obţinem $x\in(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$. Dacă $\left|\dfrac{1-x}{1+3x}\right|\geq 1$, adică $x\in[-1,0]\setminus\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$ atunci $\sqrt[n]{|f_n(x)|}=\dfrac{n}{n-1}\cdot\left|\dfrac{1-x}{1+3x}\right|>1$, $\forall\, n\in I\!N$. De aici deducem că pentru $x\in[-1,0]\setminus\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$ seria este divergentă. Deci mulţimea de convergenţă este $(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$. Pentru seria dată observăm că mulţimea de convergenţă coincide cu mulţimea de convergenţă absolută, adică cu mulţimea punctelor $x$ în care seria este absolut convergentă.

b) Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{|\cos x|}{\sqrt[n]{n}}=\frac{2|\cos x|}{\sqrt{3}}.$$

Pentru $|\cos x|<\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow x\in\displaystyle\bigcup_{k\in Z}\left(\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{5\pi}{6}+k\pi\right)$ seria este absolut convergentă.

Pentru $|\cos x|>\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow x\in\displaystyle\bigcup_{k\in Z}\left\{\left[k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6}+k\pi,(k+1)\pi\right)\right\}$ seria este divergentă.

Pentru $|\cos x|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow x\in\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\dfrac{5\pi}{6}+k\pi,\ k\in Z\right\}$ atunci

seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este: $\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \text{ (D)}, & \text{dacă } x \in \left\{\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z\right\}, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} \text{ (S.C.)}, & \text{dacă } x \in \left\{\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z\right\}. \end{cases}$

c) Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+3}{5n^2+n+1}} \cdot \left|\frac{x}{3x+1}\right| = \left|\frac{x}{3x+1}\right|,$$

(deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^2+3}{5n^2+n+1}} = 1$, ca o consecinţă imediată a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 1$, cu $b_n = \dfrac{n^2+3}{5n^2+n+1}$).

Dacă $\left|\dfrac{x}{3x+1}\right| < 1 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{4}, \infty\right)$ atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ (A.C.); dacă $\left|\dfrac{x}{3x+1}\right| > 1 \Leftrightarrow x \in \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right) \setminus \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$ atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ (D).

Dacă $x = -\dfrac{1}{2}$ seria devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+3}{5n^2+n+1}$ (D), $\left(\dfrac{n^2+3}{5n^2+n+1} \not\to 0,\ n \to \infty\right)$, iar pentru $x = -\dfrac{1}{4}$ seria devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n^2+3}{5n^2+n+1}$ (D), $\left((-1)^n \dfrac{n^2+3}{5n^2+n+1} \not\to 0,\ n \to \infty\right)$.

d) Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = 5|x - x^2|$ deducem: pentru $|x - x^2| < \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow x \in \left(\dfrac{5-3\sqrt{5}}{10}, \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\right) \cup \left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}, \dfrac{5+3\sqrt{5}}{10}\right)$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este (A.C.); pentru $|x - x^2| > \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \dfrac{5-3\sqrt{5}}{10}\right) \cup \left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}, \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}\right) \cup \left(\dfrac{5+3\sqrt{5}}{10}, \infty\right)$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ (D); pentru $|x - x^2| = \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow x \in \left\{\dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{10}, \dfrac{5 \pm 3\sqrt{5}}{10}\right\}$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ are una din formele $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$ sau $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n}$, care sunt divergente, deoarece termenii lor generali nu tind la zero pentru $n \to \infty$.

**2.** Să se studieze convergenţa (simplă, uniformă) a următoarelor serii de funcţii pe mulţimile indicate:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{nx}{1+nx} - \dfrac{(n-1)x}{1+(n-1)x}\right]$, $x \in [0,1]$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x\,(1-x)^n$ : b$_1$) $x \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$; b$_2$) $x \in [0,2)$.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ : c$_1$) $x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, $0 < \varepsilon < 2\pi$; c$_2$) $x \in [0, 2\pi]$.

**Rezolvare.** a) Termenul general al şirului sumelor parţiale este:

$$S_n(x) = \frac{x}{1+x} + \frac{2x}{1+2x} - \frac{x}{1+x} + \frac{3x}{1+3x} - \frac{2x}{1+2x} + \cdots + \frac{nx}{1+nx} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)x} = \frac{nx}{1+nx},$$

$\forall\, n \geq 1,\ \forall\, x \in [0,1]$. Pentru $x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in (0,1], \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$ Rezultă că şirul de funcţii $(S_n)_{n\geq 1}$ este simplu convergent la funcţia $S(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in (0,1], \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

Dar şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ nu converge uniform, deoarece:

$$M_n = \sup_{x\in[0,1]} |S_n(x) - S(x)| \geq \left|S_n\left(\frac{1}{n}\right) - S\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{2}, \quad \text{deci } M_n \not\to 0,\ n \to \infty.$$

Rezultă că seria de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este simplu convergentă pe mulţimea $[0,1]$.

b) Calculăm $S_n(x)$:

$$S_n(x) = x(1-x) + x(1-x)^2 + \cdots + x(1-x)^n = x[(1-x) + (1-x)^2 + \cdots (1-x)^n] =$$
$$= \begin{cases} (1-x)[1-(1-x)^n], & \text{dacă } x \neq 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

b$_1$) Dacă $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ atunci $S_n(x) = (1-x)[1-(1-x)^n]$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = 1-x = S(x)$, $\forall\, x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Mai mult şirul $(S_n)$ converge uniform la $S$ pe $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, deoarece:

$$|S_n(x) - S(x)| = |1-x|^{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}},\ \ \forall\, x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right],\ \ \forall\, n \geq 1, \quad \text{iar} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0.$$

Deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x(1-x)^n$ este uniform convergentă pe $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

b$_2$) Dacă $x \in [0,2)$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \widetilde{S}(x)$, unde $\widetilde{S}(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{dacă } x \in (0,2), \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

Deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x(1-x)^n$ este simplu convergentă pe $[0,2)$ cu suma $\widetilde{S}$. Totuşi convergenţa nu este uniformă, deoarece:

$$M_n = \sup_{x\in[0,2)} |S_n(x) - \widetilde{S}(x)| \geq \left|S_n\left(\frac{1}{n}\right) - \widetilde{S}\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} \to e^{-1},\ \ n \to \infty,$$

deci $M_n \not\to 0,\ \ n \to \infty$.

c) În cazul c$_1$) $x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ vom aplica criteriul lui Dirichlet de convergenţă uniformă. Deoarece:

$$|\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx| = \left|\frac{\sin\frac{nx}{2} \cdot \sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \leq \frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}},$$

$\forall\, x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$ este un şir de funcţii uniform mărginit pe intervalul $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$.

Şirul cu termenul general $\frac{1}{n}$ este descrescător şi converge la 0. Deoarece la şirurile numerice convergenţa uniformă coincide cu convergenţa simplă, rezultă că seria dată

verifică condiţiile din criteriul lui Dirichlet, deci este uniform convergentă pe intervalul $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$.

În cazul c$_2$) $x \in [0, 2\pi]$ seria este simplu convergentă, conform criteriului lui Dirichlet de la serii numerice. Pentru $x \in (0, 2\pi)$ şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$ este mărginit: $|S_n| \leq \dfrac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}$, $\forall n \geq 1$, iar şirul $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ este monoton descrescător, convergent la 0. Pentru $x = 0$ sau $x = 2\pi$ toţi termenii seriei sunt egali cu 0, deci seria este convergentă şi în aceste puncte.

Vom demonstra în continuare că seria dată nu este uniform convergentă pe $[0, 2\pi]$, neîndeplinind condiţia din criteriul lui Cauchy, adică:

$\exists\, \varepsilon_0 = \dfrac{1}{4}$ a.î. $\forall\, n \in I\!N^*$ $\exists\, x_n \in [0, 2\pi]$, $x_n = \dfrac{\pi}{4n}$ şi $\exists\, p \in I\!N$, $p = n$ a.î. :

$$|f_{n+1}(x_n) + f_{n+2}(x_n) + \cdots + f_{2n}(x_n)| > \frac{1}{4},$$

unde $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$.

Într-adevăr:

$$\left| \frac{\sin (n+1)\frac{\pi}{4n}}{n+1} + \frac{\sin (n+2)\frac{\pi}{4n}}{n+2} + \cdots + \frac{\sin (2n)\frac{\pi}{4n}}{2n} \right| > \frac{n \cdot \sin n\frac{\pi}{4n}}{2n} = \frac{\sqrt{2}}{4} > \frac{1}{4}.$$

Deci $\exists\, \varepsilon > 0$ $(\varepsilon = \frac{1}{4})$ a.î. $\forall\, n \in I\!N^*$ inegalitatea:

$$\left| \frac{\sin (n+1)x}{n+1} + \frac{\sin (n+2)x}{n+2} + \cdots + \frac{\sin (n+p)x}{n+p} \right| > \varepsilon$$

are loc cel puţin într-un punct din intervalul $[0, 2\pi]$ şi cel puţin pentru un $p \in I\!N^*$. Deci seria nu este uniform convergentă pe $[0, 2\pi]$.

**3.** Să se studieze natura următoarelor serii de funcţii:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} nx}{n^5 x^2 + 1}$, $x \in I\!R$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}$, $x \in I\!R$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{n^3 + x^2}$, $x \in I\!R$; d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \cdot a^{nx}}{1 + n^2 x^2}$, $x \in [b, 1]$; $a, b \in (0, 1)$.

**Rezolvare.** Vom studia aceste serii cu ajutorul criteriului lui Weierstrass. Notăm cu $f_n(x)$ termenul general al seriilor de mai sus.

a) Avem:

$$|f_n(x)| = \frac{n|x|}{n^5 x^2 + 1} \leq \frac{1}{2n^{3/2}}, \ \forall\, n \geq 1, \ \forall\, x \in I\!R,$$

iar seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2}}$ este convergentă. Deducem că seria de funcţii $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform şi absolut convergentă pe $I\!R$.

b) Din inegalitatea:

$$|f_n(x)| = \frac{|\cos nx|}{\sqrt[3]{n^4+x^4}} \leq \frac{1}{n^{4/3}}, \ \forall\, n \geq 1, \ \forall\, x \in I\!R,$$

seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$ fiind convergentă, deducem că seria de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform şi absolut convergentă pe $I\!R$.

c) Folosind inegalitatea $|\operatorname{arctg} x| \leq |x|, \ \forall\, x \in I\!R$, deducem:

$$|f_n(x)| = \left|\operatorname{arctg} \frac{2x}{n^3+x^2}\right| \leq \frac{2|x|}{n^3+x^2} \leq \frac{1}{n^{3/2}}, \ \forall\, n \geq 1, \ \forall\, x \in I\!R.$$

Deoarece seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ este convergentă, rezultă că seria de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform şi absolut convergentă pe $I\!R$.

d) Avem:

$$|f_n(x)| \leq \frac{a^{nb}}{2n}, \ \forall\, x \in [b,1], \ \forall\, n \geq 1.$$

Seria numerică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^{nb}}{2n}$ este convergentă, după cu rezultă din criteriul lui D'Alembert. Notând cu $\alpha_n = \frac{a^{nb}}{2n}$, avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{(n+1)b}}{2(n+1)} \cdot \frac{2n}{a^{nb}} = a^b < 1.$$

Rezultă atunci conform criteriului lui Weierstrass că seria de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform şi absolut convergentă pe $[b,1], \ 0 < b < 1$.

**4.** Să se arate că seria de mai jos nu este uniform convergentă pe segmentul $[0,1]$ şi totuşi suma sa este funcţie continuă pe acest segment:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right].$$

**Rezolvare.** Termenul general al seriei este:

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}, \ x \in [0,1].$$

Calculând suma parţială de ordinul n pentru această serie obţinem:

$$S_n(x) = \frac{x}{1+x^2} + \left(\frac{2x}{1+4x^2} - \frac{x}{1+x^2}\right) + \left(\frac{3x}{1+9x^2} - \frac{2x}{1+4x^2}\right) + \cdots + \left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right] = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \ x \in [0,1].$$

Deoarece pentru $\forall\, x \in [0,1] \ \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = 0$, rezultă că seria converge simplu pe intervalul $[0,1]$, având suma funcţia identic zero, care este o funcţie continuă.

Pe de altă parte, şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ nu converge uniform pe $[0,1]$, deoarece:

$$M_n = \sup_{x\in[0,1]} |S_n(x)| = S_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}, \ \text{deci} \ M_n \not\to 0, \ n \to \infty.$$

Rezultă că seria de funcţii din enunţ nu converge uniform pe intervalul $[0,1]$.

Din acest exemplu deducem că convergenţa uniformă a unei serii de funcţii continue pe o mulţime $A$ este doar o condiţie suficientă, nu şi o condiţie necesară pentru continuitatea pe mulţimea $A$ a sumei acestei serii.

**5.** Să se arate că seria de funcţii discontinue în fiecare punct $x \in I\!R$:

$$f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x)}{n(n+1)}, \quad x \in I\!R, \qquad \text{unde } f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in Q, \\ 0, & \text{dacă } x \notin Q, \end{cases}$$

converge uniform pe $I\!R$ la o funcţie continuă.

**Rezolvare.** Termenul general al seriei de funcţii de mai sus este funcţia $g_n(x) = \frac{f(x)}{n(n+1)}$, $(n \geq 1)$, care este discontinuă în fiecare punct $x \in I\!R$, (această proprietate o are funcţia $f$).

Calculăm suma parţială de ordinul $n$:

$$S_n(x) = f(x) - \frac{f(x)}{1 \cdot 2} - \frac{f(x)}{2 \cdot 3} - \cdots - \frac{f(x)}{n(n+1)} = f(x) - f(x)\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] = \frac{f(x)}{n+1}, \quad n \geq 1, \ x \in I\!R.$$

Deoarece $|S_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$, $\forall\, n \geq 1$, $\forall\, x \in I\!R$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ rezultă că seria considerată converge uniform pe $I\!R$, având suma funcţia identic zero, care este o funcţie continuă pe $I\!R$.

Din acest exemplu deducem că proprietatea de continuitate a termenilor unei serii de funcţii, uniform convergentă pe o mulţime $A$, nu este o condiţie necesară pentru continuitatea pe $A$ a sumei acestei serii.

**6.** Să se arate că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3 + x^3}$ este uniform convergentă pe $I = [0, A]$, pentru $\forall\, A > 0$, iar:

$$\lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3 + x^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}.$$

**Rezolvare.** Fie $A > 0$ arbitrar, momentan fixat. Pentru $\forall\, x \in [0, A]$ şi pentru $\forall\, n \in I\!N^*$, avem:

$$\frac{nx^2}{n^3 + x^3} \leq \frac{A^2 n}{n^3} = \frac{A^2}{n^2}.$$

Deoarece seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{A^2}{n^2}$ este convergentă, rezultă conform criteriului lui Weierstrass că seria de funcţii iniţială este uniform şi absolut convergentă pe $[0, A]$.

Luând $A = 1$, deci $I = [0, 1]$ putem aplica Teorema 2.2.6 cu $x_0 = 1$ punct de acumulare pentru $I$. Deoarece seria de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe $I$ şi $\exists \lim\limits_{x\to 1} f_n(x) = \frac{n}{n^3 + 1}$ rezultă că funcţia sumă $f$ a seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ are limită în $x_0 = 1$ şi:

$$\underbrace{\lim_{x\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^2}{n^3+x^3}}_{f(x)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}.$$

**7.** Este permisă derivarea termen cu termen a seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-nx^2}-e^{-(n-1)x^2}\right],\ \ x\in[0,1]\ ?$$

**Rezolvare.** Având în vedere forma termenului general al seriei:

$$f_n(x)=e^{-nx^2}-e^{-(n-1)x^2},$$

care este o funcţie derivabilă pe $[0,1]$, calculăm suma parţială de ordinul $n$:

$$S_n(x)=e^{-nx^2}-1,\ \ \forall\, n\geq 1,\ \ \forall\, x\in[0,1].$$

Pentru $\forall\, x\in(0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=-1$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(0)=0$. Deci seria dată este simplu convergentă pe intervalul $[0,1]$, având suma funcţia:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{dacă } x=0,\\ -1, & \text{dacă } x\in(0,1],\end{cases}$$

care este discontinuă în punctul $x=0$, deci nu este derivabilă în $x=0$.

Pe de altă parte, seria derivatelor:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[-2nxe^{-nx^2}+2(n-1)xe^{-(n-1)x^2}\right]$$

are suma parţială de ordinul $n$:

$$\widetilde{S}_n(x)=-2nxe^{-nx^2},\ \ \forall\, n\geq 1,\ \ \forall\, x\in[0,1].$$

Pentru $\forall\, x\in[0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{S}_n(x)=0$, deci şirul de funcţii $(\widetilde{S}_n)_{n\geq 1}$ converge simplu pe $[0,1]$ la funcţia identic zero, funcţie derivabilă. Deducem astfel că nu este posibilă derivarea termen cu termen a seriei date.

Nu putem aplica Teorema 2.2.8 deoarece seria derivatelor nu converge uniform pe $[0,1]$, şirul $(\widetilde{S}_n)_{n\geq 1}$ având proprietatea:

$$M_n=\sup_{x\in[0,1]}|\widetilde{S}_n(x)|=\left|\widetilde{S}_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\right|=\sqrt{2n}e^{-1}\to\infty\neq 0,\ \ n\to\infty.$$

**8.** Este permisă integrarea termen cu termen a seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty}2x\left[n^2e^{-n^2x^2}-(n-1)^2e^{-(n-1)^2x^2}\right],\ \ x\in[0,1]\ ?$$

**Rezolvare.** Suma parţială de ordinul $n$ a seriei este:

$$S_n(x)=2n^2xe^{-n^2x^2},\ \ n\geq 1,\ \ x\in[0,1].$$

Pentru fiecare $x\in[0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=0$, deci seria converge punctual pe $[0,1]$, având suma funcţia $f(x)=0,\ \ \forall\, x\in[0,1]$.

Deoarece $M_n=\sup\limits_{x\in[0,1]}|S_n(x)|=S_n\left(\dfrac{1}{n\sqrt{2}}\right)=n\sqrt{2}e^{-1/2}\to\infty\neq 0,\ \ n\to\infty,$ rezultă că seria dată nu converge uniform pe $[0,1]$, deci nu putem aplica Teorema 2.2.9.

Pe de altă parte, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, iar:

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \left[2n^2xe^{-n^2x^2} - 2(n-1)^2xe^{-(n-1)^2x^2}\right] dx = \left[-e^{-n^2x^2} + e^{-(n-1)^2x^2}\right]\Big|_0^1 =$$
$$= \frac{1}{e^{(n-1)^2}} - \frac{1}{e^{n^2}}.$$

Seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{e^{(n-1)^2}} - \frac{1}{e^{n^2}}\right]$ are şirul sumelor parţiale $\widetilde{S}_n(x) = 1 - \dfrac{1}{e^{n^2}}$ convergent la 1 pentru $n \to \infty$. Deci:

$$0 = \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right] dx \neq \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1,$$

adică nu este posibilă integrarea termen cu termen a seriei date.

**9.** Să se arate că pentru $|x| < 1$ are loc:

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \frac{8x^7}{1+x^8} + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

**Rezolvare.** Plecăm de la seria:

$$\ln(1+x) + \ln(1+x^2) + \cdots + \ln(1+x^{2^n}) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\ln(1+x^{2^n}).$$

Deoarece:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\ln(1+x^{2^k}) = \ln\prod_{k=0}^{n}(1+x^{2^k}) = \ln(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n}) =$$
$$= \ln\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \quad \text{şi} \quad \exists \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \ln\frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in (-1,1).$$

Rezultă că seria $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\ln(1+x^{2^n})$ este punctual convergentă şi are suma $\ln\dfrac{1}{1-x}$, $\forall x \in$ $\in (-1,1)$. Deci:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\ln(1+x^{2^n}) = \ln\frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in (-1,1).$$

Vom aplica acestei serii de funcţii Teorema 2.2.8 de derivare termen cu termen. Fie $\alpha \in (0,1)$, arbitrar momentan fixat. Pentru $I = [-\alpha, \alpha]$ avem:

– seria $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(0)$, unde $f_n(x) = \ln(1+x^{2^n})$, $f_n : I \to \mathbb{R}$, este convergentă ($\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 0$);

– funcţiile $f_n$, $n \geq 1$ sunt derivabile pe $I$;

– seria derivatelor $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}$ este uniform convergentă pe $I$ cu suma $g(x)$. Într-adevăr:

$$\left|\frac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}\right| \leq \frac{2^n \cdot |x^{2^n-1}|}{2x^{2^{n-1}}} = 2^{n-1}\cdot|x|^{2^n-2^{n-1}-1} \leq 2^{n-1}\alpha^{2^n-2^{n-1}-1} = 2^{n-1}\cdot\alpha^{2^{n-1}-1},$$

$\forall n \geq 1$, $\forall x \in [-\alpha, \alpha]$, iar seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\alpha^{2^{n-1}-1}$ este convergentă, conform criteriului raportului al lui D'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot\alpha^{2^n-1}}{2^{n-1}\cdot\alpha^{2^{n-1}-1}} = \lim_{n\to\infty} 2\alpha^{2^{n-1}} = 0 < 1.$$

Rezultă că seria de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}$ este uniform convergentă pe $I$ cu suma $h(x)$. Deci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'$ este şi ea uniform convergentă cu suma $g(x) = \dfrac{1}{1+x} + h(x)$.

Conform Teorema 2.2.8 rezultă că seria de funcţii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe $I = [-\alpha, \alpha]$ cu suma $f(x) = \ln \dfrac{1}{1-x}$. În plus $f' = g$, deci $g(x) = \left(\ln \dfrac{1}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{1-x}$.

Deducem astfel că:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = \frac{1}{1-x}, \ \forall x \in [-\alpha, \alpha] \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{1-x}, \ \forall x \in [-\alpha, \alpha].$$

Deoarece $\alpha$ este arbitrar din $(0,1)$, rezultă că egalitatea de mai sus are loc pe întreg intervalul $(-1,1)$. Deci:

$$\frac{1}{1-x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \frac{8x^7}{1+x^8} + \cdots = \frac{1}{1-x}, \ \forall x \in (-1,1).$$

## PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

**10.** Să se determine domeniul de convergenţă (absolută şi simplă) pentru următoarele serii de funcţii:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n}{3n+1}\right)^n \cdot \left(\dfrac{x}{x+2}\right)^n$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n/2}\sin^n x}{n}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+1}{3n^2+n+2} \cdot \left(\dfrac{x}{2x-1}\right)^n$.

**11.** Să se studieze convergenţa (simplă, uniformă) a următoarelor serii de funcţii pe mulţimile indicate:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x-1)(2-x)^n$ : a$_1$) $x \in \left[\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right]$; a$_2$) $x \in [1,3)$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{\sqrt{n}}$ : b$_1$) $x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, $0 < \varepsilon < 2\pi$; b$_2$) $x \in (0, 2\pi)$.

**12.** Să se studieze natura următoarelor serii de funcţii:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{\sqrt[5]{n^6+x^6}}$, $x \in I\!R$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{x^2}{n^4+x^4}$, $x \in I\!R$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}\sqrt{n}x}{n^4x^2+1}$, $x \in I\!R$.

**13.** Să se arate că seria următoare nu este uniform convergentă pe intervalul $I = [0,1]$, dar suma sa este o funcţie continuă pe $I$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x}\right].$$

**14.** Este permisă derivarea termen cu termen a seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}, \ x \in I\!R \ ?$$

**15.** Este permisă integrarea termen cu termen a seriei:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2+n^2}, \quad x \in [a,b]\ ?$$

# §3. SERII DE PUTERI

O serie de funcţii de forma:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad , \quad x \in I\!R, \tag{2.3.1}$$

cu $a_i \in I\!R,\ \ i = 0, 1, \ldots$ se numeşte *serie de puteri*. Se notează $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (sau $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ pentru seria $a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$).

**Teorema 2.3.1 (Abel).** Orice serie de puteri este convergentă în origine.

a) Dacă o serie de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă într-un punct $x_0 \neq 0$, atunci seria este absolut convergentă în orice punct $x$ cu $|x| < |x_0|$.

b) Dacă o serie de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este divergentă într-un punct $x_1 \in I\!R$, atunci ea este divergentă în orice punct $x$ cu $|x| > |x_1|$.

**Teorema 2.3.2 (de existenţă a razei de convergenţă).** Fie seria de puteri (2.3.1). Atunci $\exists\, r \in [0, +\infty]$ cu următoarele proprietăţi:

a) pentru $\forall\, x \in I\!R$ cu condiţia $|x| < r$ seria este (A.C.);

b) pentru $\forall\, x \in I\!R$ cu $|x| > r$ seria este (D);

c) pentru $\forall\, \varrho \in (0, r)$ seria este uniform convergentă pe $[-\varrho, \varrho] \subset (-r, r)$.

Elementul $r$ din Teorema 2.3.2 se numeşte *raza de convergenţă* a seriei de puteri (2.3.1). Mulţimea punctelor de convergenţă $A$ a seriei de puteri (2.3.1) verifică şirul de incluziuni:

$$(-r, r) \subset A \subset [-r, r].$$

**Teorema 2.3.3 (Cauchy-Hadamard).** Fie seria de puteri (2.3.1) cu raza de convergenţă $r$ şi fie $\omega = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Atunci $r = \dfrac{1}{\omega}$ dacă $\omega \in (0, \infty)$, $r = 0$ dacă $\omega = \infty$ şi $r = \infty$ dacă $\omega = 0$.

**Teorema 2.3.4.** Dacă $\exists\, \lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in \overline{I\!R}$ atunci $r = \dfrac{1}{\lambda}$ dacă $\lambda \in (0, \infty)$, $r = 0$ dacă $\lambda = \infty$ şi $r = \infty$ dacă $\lambda = 0$.

**Teorema 2.3.5 (Abel).** Dacă seria de puteri (2.3.1) are raza de convergenţă $r$, iar seria este convergentă în punctul $x = r$ $(x = -r)$ atunci suma seriei $S(x)$ este continuă în punctul $x = r$ (respectiv $x = -r$), deci:

$$\lim_{\substack{x\to r\\ x<r}} S(x) = S(r), \quad (\text{respectiv } \lim_{\substack{x\to -r\\ x>-r}} S(x) = S(-r)\,).$$

*Proprietăţi ale seriilor de puteri*

a) Suma unei serii de puteri este o funcţie continuă pe mulţimea de convergenţă a seriei.

b) Orice serie de puteri poate fi integrată termen cu termen pe orice interval compact $[\alpha, \beta]$ inclus în mulţimea de convergenţă. Seria de puteri obţinută prin integrarea pe $[0, x]$, $x \in (-r, r)$ are aceeaşi rază de convergenţă ca şi seria iniţială.

c) Orice serie de puteri poate fi derivată termen cu termen pe intervalul deschis de convergenţă $(-r, r)$. Seria obţinută are aceeaşi rază de convergenţă ca şi seria iniţială. În plus, funcţia sumă $S(x)$ a seriei de puteri este indefinit derivabilă pe intervalul $(-r, r)$, iar derivata sa de ordinul $n$ este egală cu suma seriei derivatelor de ordinul $n$.

*Operaţii cu serii de puteri*

Fie seriile de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ cu razele de convergenţă $r_1$, respectiv $r_2$, iar $\lambda \in I\!R^*$. Atunci:

a) Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$ are raza de convergenţă $r \geq \min\{r_1, r_2\}$.

b) Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n)x^n$ are raza de convergenţă $r_1$.

c) Produsul după Cauchy al două serii de puteri cu razele de convergenţă $r_1$ şi $r_2$ este tot o serie de puteri a cărei rază de convergenţă este $r \geq \min\{r_1, r_2\}$. În plus, suma seriei produs este egală cu produsul sumelor celor două serii pe intersecţia mulţimilor de convergenţă.

O serie de funcţii de forma:

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots \;, x \in I\!R$$

unde $a \in I\!R$ se numeşte *serie Taylor.*

Punând $y = x - a$ într-o astfel de serie obţinem seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n$. Dacă $(-r, r)$ este intervalul de convergenţă a acestei serii atunci $(-r + a, r + a)$ va fi intervalul de convergenţă a seriei iniţiale. Toate proprietăţile seriilor de puteri se menţin pentru seriile Taylor.

**Dezvoltarea funcţiilor în serie de puteri**

Fie funcţia $f : I \to I\!R$, $I$ un interval din $I\!R$, iar $a \in \overset{\circ}{I}$. Presupunem că $f$ este indefinit derivabilă în $x = a$.

Seria:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{2.3.2}$$

se numeşte *seria Taylor* ataşată funcţiei $f$ în punctul $a$.

Dacă $a = 0$ seria (2.3.2) se numeşte *seria Mac-Laurin* a funcţiei $f$.

Fie $I'$ intervalul de convergenţă a seriei (2.3.2). Vom spune că funcţia $f$ este *dezvoltabilă în serie Taylor* sau *serie de puteri* (pentru $a = 0$) pe intervalul $I' \cap I$ dacă ea este suma seriei (2.3.2) pe $I' \cap I$.

**Teorema 2.3.6.** Funcţia $f : I \to I\!R$ este dezvoltabilă în serie Taylor pe $I' \cap I$ dacă şi numai dacă ea este indefinit derivabilă pe $I$ şi restul ei de ordinul $n$ din formula lui Taylor tinde către 0 pentru $n \to \infty$, $\forall\, x \in I' \cap I$.

**Teorema 2.3.7.** Fie $f : I \to I\!R$, unde $I$ este un interval simetric faţă de $a$ ($I = \\ = a - \alpha, a + \alpha)$). Dacă $f$ este indefinit derivabilă pe $I$, iar şirul derivatelor este uniform mărginit pe $I$, adică $\exists\, M > 0$ a.î. $|f^{(k)}(x)| \leq M$, $\forall\, x \in I$, $\forall\, k \in I\!N^*$ atunci $f$ este dezvoltabilă în serie Taylor pe $I$.

## PROBLEME REZOLVATE

**1.** Să se determine raza şi mulţimea de convergenţă pentru următoarele serii de puteri:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2+n} x^n$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n - 3^n}{n} x^n$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n)}{b(b+1)\cdots(b+n)} x^n$, $a, b > 0$; e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sin n) x^n$.

**Rezolvare.** Notăm cu $a_n x^n$ termenul general al seriilor de mai sus.

a) Deoarece:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1,$$

deducem că raza de convergenţă a seriei este $r = 1$. Deci pentru $x \in (-1, 1)$ seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ este (A.C.), iar pentru $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ seria este divergentă.

Să studiem în continuare seria în extremităţile intervalului $(-1,1)$, adică în $x=1$ şi $x=-1$. Pentru $x=1$ seria de puteri devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$, serie numerică care are aceeaşi natură (conform criteriului de comparaţie cu limită) cu seria armonică generalizată $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, convergentă. Deci pentru $x=1$ seria este convergentă. Pentru $x=-1$ seria devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$, serie absolut convergentă, deoarece seria modulelor este seria studiată mai sus $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$, care este convergentă.

Deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ este $\begin{cases}\text{(A.C.) pentru } x\in[-1,1]\\ \text{(D) pentru } x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty).\end{cases}$

b) Aplicăm Teorema 2.3.3. Deoarece:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e,$$

rezultă că raza de convergenţă este $r=\dfrac{1}{e}$, deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ este (A.C.) pe intervalul $\left(-\dfrac{1}{e},\dfrac{1}{e}\right)$.

Pentru $x=\dfrac{1}{e}$ seria este $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{e^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2+n}$. Termenul general al acestei serii este $b_n=\left[\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{e}\right]^n>1,\ \ \forall\, n\geq 1$, (vezi {[20], Capitolul 2, §1, Problema 3}), deci $b_n\not\to 0$, pentru $n\to\infty$, adică seria este divergentă.

Pentru $x=-\dfrac{1}{e}$ avem seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{e^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2+n}$ cu termenul general $c_n=$ $=(-1)^nb_n\not\to 0$, pentru $n\to\infty$, deci este o serie divergentă.

În concluzie, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ este $\begin{cases}\text{(A.C.) pentru } x\in\left(-\dfrac{1}{e},\dfrac{1}{e}\right)\\ \text{(D) pentru } x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{e}\right]\cup\left[\dfrac{1}{e},\infty\right).\end{cases}$

c) Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-2)^{n+1}-3^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(-2)^n-3^n}\right|=3,$$

deci raza de convergenţă este $r=\dfrac{1}{3}$.

Pentru $x=\dfrac{1}{3}$ obţinem seria numerică $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{n}\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n-\dfrac{1}{n}\right]$. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=$ $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$ este absolut convergentă, după cu rezultă din criteriul lui D'Alembert aplicat seriei modulelor:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\cdot\frac{n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{3} < 1,$$

iar seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ este divergentă. Rezultă atunci că seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ este divergentă.

Pentru $x = -\frac{1}{3}$ avem seria $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n}\right]$. Seria $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{1}{n}$ este absolut convergentă (vezi mai sus), iar seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ este simplu convergentă. Rezultă atunci că seria $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ este simplu convergentă.

Deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ este $\begin{cases} \text{(A.C.)} & \text{pentru } x \in (-1/3, 1/3) \\ \text{(S.C.)} & \text{pentru } x = -1/3 \\ \text{(D)} & \text{pentru } x \in (-\infty, -1/3) \cup [1/3, \infty). \end{cases}$

d) Deoarece:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a+n+1}{b+n+1} = 1,$$

deducem că raza de convergenţă a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ este $r = 1$.

i) Pentru $x = 1$ obţinem seria numerică cu termeni pozitivi:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n)}{b(b+1)\cdots(b+n)},$$

a cărei natură o studiem cu criteriul lui Raabe-Duhamel:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{b+n+1}{a+n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n(b-a)}{a+n+1} = b - a.$$

Dacă $b - a > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (C), dacă $b - a < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (D), iar dacă $b - a = 1$ rezultă că seria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n)}{b(b+1)\cdots(b+n)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{a+n+1}$$

este divergentă.

ii) Pentru $x = -1$ obţinem seria de tip Leibniz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a(a+1)\cdots(a+n)}{b(b+1)\cdots(b+n)}.$$

ii$_1$) Dacă $a \geq b$ atunci $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a+n+1}{b+n+1} \geq 1$, deci $a_n \not\to 0$, pentru $n \to \infty$. Rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ este divergentă.

ii$_2$) Dacă $a < b$ şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,\ \forall n \geq 1\right)$. Vom arăta în continuare că $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Pentru aceasta să considerăm şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ pentru care şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ reprezintă şirul mediilor aritmetice:

$$a_n = \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}.$$

Din $a_n$ şi $a_{n-1} = \dfrac{b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}}{n-1}$ deducem că $b_n = na_n - (n-1)a_{n-1}$. Înlocuind pe $a_n = \dfrac{a(a+1)\cdots(a+n)}{b(b+1)\cdots(b+n)}$ şi $a_{n-1} = \dfrac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}$ în ultima relaţie de mai sus, deducem:

$$b_n = a_{n-1} \cdot \frac{(a-b+1)n + b}{n+b}. \tag{2.3.3}$$

Deoarece şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent (monoton descrescător şi mărginit inferior de 0), rezultă că $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$. Din relaţia (2.3.3) obţinem că $\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = (a-b+1)l$. Conform {[20], Capitolul 2, §1, Problema 12, Consecinţa 1}, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, deci $l = (a-b+1)l \Rightarrow l = 0$ $(a < b)$. Rezultă că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător la 0 şi atunci conform criteriului lui Leibniz deducem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ este convergentă (simplu).

Pentru a studia absoluta convergenţă a acestei serii, adică convergenţa seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, folosim concluziile din cazul i) $x = 1$. Obţinem:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \begin{cases} \text{(A.C.)} & \text{dacă } b - a > 1, \\ \text{(S.C.)} & \text{dacă } b - a \leq 1. \end{cases}$$

În concluzie:

· pentru $a \geq b$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ este $\begin{cases} \text{(A.C.)} & \text{dacă } x \in (-1,1) \\ \text{(D)} & \text{dacă } x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty). \end{cases}$

· pentru $a < b$ avem cazurile:

(a) $a < b - 1$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ este $\begin{cases} \text{(A.C.)} & \text{dacă } x \in [-1,1] \\ \text{(D)} & \text{dacă } x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty). \end{cases}$

(b) $a \geq b - 1$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ este $\begin{cases} \text{(A.C.)} & \text{dacă } x \in (-1,1) \\ \text{(S.C.)} & \text{dacă } x = -1 \\ \text{(D)} & \text{dacă } x \in (-\infty,-1) \cup [1,\infty). \end{cases}$

e) Vom arăta că $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\sin n|} = 1$ cu ajutorul caracterizării cu $\varepsilon$ (vezi {[20], Capitolul 2, §1}):

i) $\forall \varepsilon > 0$ $\forall n \in I\!N$ $\exists n' > n$ a.î. $\alpha_{n'} > 1 - \varepsilon$;

ii) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon) \in I\!N$ a.î. $\forall n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \alpha_n \leq 1 + \varepsilon$,

unde $\alpha_n = \sqrt[n]{|\sin n|}$.

A doua proprietate ii) este evidentă deoarece $\alpha_n \leq 1$. Pentru a o demonstra pe prima să considerăm un $\varepsilon > 0$ arbitrar, momentan fixat şi să notăm $1 - \varepsilon = b$, $b < 1$. Va trebui să determinăm pentru orice $n \in I\!N$ un rang $n' \in I\!N$, $n' > n$ a.î. $\sqrt[n']{|\sin n'|} > b$. Dacă

$\varepsilon > 1$ proprietatea este imediată. Presupunem în continuare că $\varepsilon \in (0,1]$, deci $b \in [0,1)$. Inegalitatea de mai sus este atunci echivalentă cu $|\sin n'| > b^{n'}$. Fie $n \in I\!N$ arbitrar, momentan fixat. Vom arăta că $\exists\, n' > n$ a.î. $|\sin n'| > \frac{1}{2}$ şi $b^{n'} < \frac{1}{2}$. Deoarece $b^n \to 0$ pentru $n \to \infty$ (dacă $b \in (0,1)$) rezultă că $\exists\, n_1 > n$ a.î. $b^{n'} < \frac{1}{2}$, $\forall\, n \geq n_1$ (relaţie evidentă şi pentru $b = 0$). Pentru $n_1 \in I\!N$ $\exists\, k \in I\!N$ a.î. $k\pi > n_1 (> n)$ (se poate lua $k = n_1$). În intervalul $[k\pi, (k+1)\pi]$ există trei numere naturale. Pentru $n_2 = [(k+1)\pi] - 1$ avem $|\sin n_2| > \frac{1}{2}$ $\left(n_2 \in \left(k\pi + \frac{\pi}{6}, (k+1)\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right)$. Deci pentru $n \in I\!N$ $\exists\, n_2 > n$ a.î. $|\sin n_2| > \frac{1}{2} > b^{n_2}$, de unde rezultă proprietatea i).

Din i) şi ii) rezultă că $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, deci raza de convergenţă a seriei de puteri este $r = 1$.

Pentru $x = \pm 1$ seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin n$ sunt divergente, deoarece $\sin n \not\to 0$, pentru $n \to \infty$ (se poate construi un subşir $(n_k)_{k\in I\!N}$, $n_k \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$ a.î. $\sin n_k > \frac{1}{2}$; de fapt nici $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} \sin n$).

Deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ este $\begin{cases} \text{(A.C.)} & \text{pentru } x \in (-1,1) \\ \text{(D)} & \text{pentru } x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty). \end{cases}$

**2.** Să se determine mulţimea de convergenţă a seriilor de puteri generalizate:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n} \cdot (n!)^3}{(3n)!} \cdot \mathrm{tg}^n\, x$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}\right]^p \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$, $p \in I\!R$.

**Rezolvare.** Seriile de mai sus se pot studia în mod asemănător seriilor de funcţii din §2, Problema 1. Le vom studia în continuare privindu-le ca nişte serii de puteri generalizate.

a) Să notăm cu $y = \frac{1+x}{1-x}$, $x \in I\!R \setminus \{1\}$. În acest fel seria devine o serie de puteri în variabila $y$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} y^n. \tag{2.3.4}$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, $(a_n = \frac{1}{2n+1})$, rezultă că raza de convergenţă a seriei (2.3.4) este 1. Pentru $y = 1$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ este divergentă (are aceeaşi natură cu seria armonică divergentă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$), iar pentru $y = -1$ avem seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ care este (S.C.), conform criteriului lui Leibniz şi a concluziei din cazul $y = 1$.

Deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} y^n$ este $\begin{cases} \text{(A.C.)} & \text{dacă } y \in (-1,1) \\ \text{(S.C.)} & \text{dacă } y = -1 \\ \text{(D)} & \text{dacă } y \in (-\infty,-1) \cup [1,\infty). \end{cases}$

Revenind la variabila $x$ obţinem următoarele concluzii:

· pentru $-1 < \frac{1+x}{1-x} < 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n$ este (A.C.);

· deoarece $\frac{1+x}{1-x} \neq -1$ rezultă că pentru $x \in [0,1) \cup (1,\infty)$ seria de mai sus este (D).

b) Notăm cu $y = \operatorname{tg} x$. Obţinem astfel seria de puteri:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!} y^n. \tag{2.3.5}$$

Fie $a_n = \frac{3^{3n} \cdot (n!)^3}{(3n)!}$, $n \geq 1$. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{3(n+1)}[(n+1)!]^3}{[3(n+1)]!} \cdot \frac{(3n)!}{3^{3n}(n!)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{27(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = 1.$$

Rezultă că raza de convergenţă a seriei de puteri (2.3.5) este 1.

Pentru $y = 1$ obţinem seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n} \cdot (n!)^3}{(3n)!}$ pe care o studiem cu criteriul lui Raabe-Duhamel:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{(3n+1)(3n+2)}{9(n+1)^2} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n(-9n-7)}{9(n+1)^2} = -1 < 1.$$

Deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă (se arată că $a_n \not\to 0$, $n \to \infty$, vezi mai jos).

Pentru $y = -1$ avem seria alternată $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{3n} \cdot (n!)^3}{(3n)!}$. Deoarece:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{9(n+1)^2}{(3n+1)(3n+2)} = \frac{9n^2+18n+9}{9n^2+9n+2} > 1, \ \ \forall\, n \geq 1,$$

rezultă că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător, deci $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Deducem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ este divergentă.

În concluzie pentru $\operatorname{tg} x \in (-1,1) \Leftrightarrow x \in \cup_{k\in Z} \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$ seria din enunţ este (A.C.), în rest fiind divergentă.

c) Notăm cu $y = \frac{x-1}{2}$. Avem de studiat seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n$, unde $a_n = \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}\right]^p$. Din $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ rezultă că raza de convergenţă este 1.

Pentru $y = 1$, conform {[20], Capitolul 2, §2, Problema 9,i)}, deducem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este

$\begin{cases} \text{(C)} & \text{dacă } p > 2, \\ \text{(D)} & \text{dacă } p \leq 2. \end{cases}$

Pentru $y = -1$, conform {[20], Capitolul 2, §2, Problema 14,d)}, deducem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ este $\begin{cases} \text{(A.C.)}, & p > 2, \\ \text{(S.C.)}, & p \in (0,2], \\ \text{(D)}, & p \le 0. \end{cases}$

Deci avem următoarele concluzii pentru seria de puteri $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n y^n$:

· dacă $p > 2$ $\begin{cases} \text{(A.C.)} & \text{pentru } y \in [-1,1], \\ \text{(D)} & \text{pentru } y \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty); \end{cases}$

· dacă $0 < p \le 2$ $\begin{cases} \text{(A.C.)} & \text{pentru } y \in (-1,1), \\ \text{(S.C.)} & \text{pentru } y = -1, \\ \text{(D)} & \text{pentru } y \in (-\infty,-1) \cup [1,\infty); \end{cases}$

· dacă $p \le 0$ $\begin{cases} \text{(A.C.)} & \text{pentru } y \in (-1,1), \\ \text{(D)} & \text{pentru } y \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty). \end{cases}$

Ţinând cont că $\dfrac{x-1}{2} = y$, deci $x = 2y+1$ deducem pentru seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \left(\dfrac{x-1}{2}\right)^n$:

· dacă $p > 2$ $\begin{cases} \text{(A.C.)} & \text{pentru } x \in [-1,3], \\ \text{(D)} & \text{pentru } x \in (-\infty,-1) \cup (3,\infty); \end{cases}$

· dacă $0 < p \le 2$ $\begin{cases} \text{(A.C.)} & \text{pentru } x \in (-1,3), \\ \text{(S.C.)} & \text{pentru } x = -1, \\ \text{(D)} & \text{pentru } x \in (-\infty,-1) \cup [3,\infty); \end{cases}$

· dacă $p \le 0$ $\begin{cases} \text{(A.C.)} & \text{pentru } x \in (-1,3), \\ \text{(D)} & \text{pentru } x \in (-\infty,-1] \cup [3,\infty). \end{cases}$

**3.** Să se arate că funcţiile:

$$f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = \cos x, \quad f_3(x) = e^x, \quad x \in I\!R$$

sunt dezvoltabile în serie de puteri pe $I\!R$ şi să se determine seriile Mac-Laurin corespunzătoare.

**Rezolvare.** Prin inducţie matematică se arată că:

$$f_1^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \ \forall x \in I\!R, \ \forall n \in I\!N,$$
$$f_2^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \ \forall x \in I\!R, \ \forall n \in I\!N,$$
$$f_3^{(n)}(x) = e^x, \ \forall x \in I\!R, \ \forall n \in I\!N.$$

Deoarece $|f_1^{(n)}(x)| \le 1, \ |f_2^{(n)}(x)| \le 1, \ \forall x \in I\!R, \ \forall n \in I\!N$ rezultă, conform Teoremei 2.3.7, că $f_1$ şi $f_2$ sunt dezvoltabile în serie de puteri pe $I\!R$.

Pentru funcţia $f_3$ să considerăm un punct $a > 0$ arbitrar, momentan fixat. Deoarece

$|f_3^{(n)}(x)| \leq e^a, \ \forall x \in [-a, a], \ \forall n \in I\!N$, deducem conform aceleiaşi teoreme că $f_3$ este dezvoltabilă în serie de puteri pe intervalul $[-a, a]$. Dar $a$ fiind un element arbitrar, rezultă că $f_3$ este dezvoltabilă în serie de puteri pe $I\!R$.

Avem: $f_1^{(n)}(0) = 0$ pentru $n = 2m$, $f_1^{(n)}(0) = (-1)^m$ pentru $n = 2m+1$, $f_2^{(n)}(0) = (-1)^m$ pentru $n = 2m$, $f_2^{(n)}(0) = 0$ pentru $n = 2m+1$, $f_3^{(n)}(0) = 1, \ \forall n \in I\!N$. Obţinem astfel următoarele dezvoltări în serii de puteri:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots, \ x \in I\!R,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \cdots, \ x \in I\!R,$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \ x \in I\!R.$$

**4.** Să se arate că funcţia $f(x) = (1+x)^\alpha, \ x > -1, \ \alpha \in I\!R, \ \alpha \neq 0, 1, 2, \cdots$ este dezvoltabilă în serie de puteri şi să se găsească această dezvoltare, specificându-se intervalul în care este valabilă.

**Rezolvare.** Să considerăm următoarea serie de puteri, numită *seria binomială*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots. \quad (2.3.6)$$

Vom demonstra că această serie are raza de convergenţă egală cu 1 şi suma egală cu $f(x) = (1+x)^\alpha$.

Deoarece:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha - n|}{n+1} = 1,$$

rezultă că raza de convergenţă a seriei (2.3.6) este $r = 1$, deci mulţimea $A$ de convergenţă a acestei serii satisface relaţia $(-1, 1) \subset A \subset [-1, 1]$.

Să notăm cu $s(x)$ suma acestei serii pe intervalul $(-1, 1)$. Vom arăta că $s(x) = f(x), \ \forall x \in (-1, 1)$. Folosind proprietatea de derivare a seriilor de puteri rezultă că funcţia $s(x)$ este derivabilă pe $(-1, 1)$ şi:

$$s'(x) = \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1!}x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots, \ \forall x \in (-1, 1). \quad (2.3.7)$$

Înmulţind această relaţie cu $x$ obţinem:

$$xs'(x) = \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^n + \cdots, \ \forall x \in (-1, 1). \quad (2.3.8)$$

Adunând relaţiile (2.3.7) şi (2.3.8) membru cu membru, avem:

$$(1+x)s'(x) = \frac{\alpha}{1!} + \left(\frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1!}\right)x + \cdots + \left[\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\right]x^n + \cdots, \ \forall x \in (-1,1). \tag{2.3.9}$$

Termenul general al seriei obţinută mai sus este:
$\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\Big(\dfrac{\alpha-n}{n} +$ $+ 1\Big) = \dfrac{\alpha^2(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

Deci egalitatea (2.3.9) devine:

$(1+x)s'(x) = \alpha + \dfrac{\alpha^2}{1!}x + \cdots + \dfrac{\alpha^2(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots, \ \ \forall x \in (-1,1),$

de unde rezultă că:

$$(1+x)s'(x) = \alpha s(x), \ \forall x \in (-1,1). \tag{2.3.10}$$

Suma $s(x)$ este diferită de 0 în orice punct $x \in (-1,1)$. Într-adevăr, dacă am presupune că $\exists$ un punct $x_1 \in (-1,1)$ a.î. $s(x_1) = 0$, conform relaţiei de mai sus ar rezulta prin derivări că $s^{(n)}(x_1) = 0, \ \forall n \geq 1$. Conform teoremei lui Taylor de dezvoltabilitate în jurul punctului $x_1$ rezultă că $s(x)$ este o funcţie constantă şi anume funcţia nulă, absurd, căci $s(0) = 1$. Deci $s(x) \neq 0, \ \forall x \in (-1,1)$ şi atunci egalitatea (2.3.10) se scrie în mod echivalent:

$$\frac{s'(x)}{s(x)} = \frac{\alpha}{1+x}, \ \ \forall x \in (-1,1).$$

Prin integrare, obţinem:

$$\ln s(x) = \alpha \ln(1+x) + \ln C, \ \ C > 0 \quad \text{sau} \quad s(x) = C(1+x)^\alpha, \ \ \forall x \in (-1,1).$$

Deoarece $s(0) = 1$ deducem că $C = 1$, deci $s(x) = (1+x)^\alpha = f(x), \ \forall x \in (-1,1)$. Astfel am arătat că:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots, \tag{2.3.11}$$

$\forall x \in (-1,1)$, seria din membrul drept al egalităţii de mai sus fiind absolut convergentă pentru $\forall x \in (-1,1)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

În extremităţile intervalului $(-1,1)$ facem următoarele observaţii pentru seria (2.3.6):

a) Dacă $\alpha > 0$ atunci seria (2.3.6) este (A.C.) şi în punctele $x = 1$ şi $x = -1$ şi atunci, conform Teoremei 2.3.5 suma sa va fi $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = 2^\alpha$ în $x = 1$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = 0$ în $x = -1$.

Într-adevăr pentru $x = 1$ avem seria:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Deoarece:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+1}{n-\alpha} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(\alpha+1)}{n-\alpha} = \alpha+1 > 1,$$

rezultă că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ este (C), deci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este (A.C.).

Pentru $x = -1$ obţinem seria alternată $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$. Deoarece seria modulelor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ este (C), conform celor de mai sus, rezultă că şi această serie este (A.C.).

Deci pentru $\alpha > 0$ seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este (A.C.) pentru $x \in [-1, 1]$ cu suma $f(x)$, în rest fiind divergentă.

b) Dacă $-1 < \alpha < 0$ vom arăta că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este (S.C.) în $x = 1$ şi divergentă în $x = -1$. Pentru $x = 1$ avem:

$$a_n = (-1)^n \frac{(-\alpha)(-\alpha+1)\cdots(-\alpha+n-1)}{n!}, \ \ n \geq 1.$$

Procedăm ca în Problema 1,d). Notăm cu $b_n = \dfrac{(-\alpha)(-\alpha+1)\cdots(-\alpha+n-1)}{n!}$, $n \geq 1$. Şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător, deoarece $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{-\alpha+n}{n+1} < 1$ şi în plus $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Într-adevăr, pentru a arăta acest lucru să considerăm şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea:

$$b_n = \frac{c_1 + c_2 + \cdots c_n}{n}.$$

Din relaţia $b_{n+1} = \dfrac{nb_n + c_{n+1}}{n+1}$ deducem că $c_{n+1} = (n+1)b_{n+1} - nb_n$, adică:

$$c_{n+1} = (n+1)\frac{(-\alpha)(-\alpha+1)\cdots(-\alpha+n)}{(n+1)!} - n\frac{(-\alpha)(-\alpha+1)\cdots(-\alpha+n-1)}{n!} = \\ = (-\alpha)b_n, \ \ \forall\, n \geq 1. \tag{2.3.12}$$

Şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ având limită (este monoton descrescător şi mărginit inferior de 0), rezultă din (2.3.12) că $\exists \lim\limits_{n\to\infty} c_n = (-\alpha) \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Deoarece şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este şirul mediilor aritmetice ale şirului $(c_n)_{n\geq 1}$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n \overset{not}{=} l$, de unde, conform ultimei relaţii de mai sus, rezultă că $l = (-\alpha)l$, deci $l = 0$.

Aplicând criteriul lui Leibniz, rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ este convergentă (simplu). Această serie nu este absolut convergentă, deoarece seria modulelor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)(-\alpha+1)\cdots(-\alpha+n-1)}{n!}$$

este divergentă, conform criteriului lui Raabe-Duhamel:
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+1}{-\alpha+n}-1\right)=\alpha+1<1.$$
Din Teorema 2.3.5 deducem că suma seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=2^{\alpha}$.

Pentru $x=-1$ obţinem seria $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ cu termeni pozitivi, care este divergentă, aşa cum am văzut mai sus.

Deci dacă $-1<\alpha<0$ seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este (C) pentru $x\in(-1,1]$ cu suma $f(x)$ şi anume (A.C.) dacă $x\in(-1,1)$ şi (S.C.) dacă $x=1$, în rest fiind divergentă.

c) Dacă $\alpha\le -1$ seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este divergentă pentru $x=-1$ şi $x=1$, deoarece şirul $(|a_n|)_{n\ge 1}$ este monoton crescător:
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{-\alpha+n}{n+1}\ge 1,\ \text{ deci } a_n\not\to 0, \text{ pentru } n\to\infty.$$
Deci în acest caz seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este (A.C.) pentru $x\in(-1,1)$ cu suma $f(x)$, în rest fiind divergentă.

Concluziile pentru seria (2.3.6) sunt următoarele:

a) Dacă $\alpha\in(0,\infty)$ seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este:
$$\begin{cases}\text{(A.C.)} & \text{pentru } x\in[-1,1] \text{ cu suma } f(x)=(1+x)^{\alpha},\\ \text{(D)} & \text{pentru } x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty).\end{cases}$$
b) Dacă $\alpha\in(-1,0)$ seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este:
$$\begin{cases}\text{(A.C.)} & \text{pentru } x\in(-1,1) \text{ cu suma } f(x)=(1+x)^{\alpha},\\ \text{(S.C.)} & \text{pentru } x=1 \text{ cu suma } f(1)=2^{\alpha},\\ \text{(D)} & \text{pentru } x\in(-\infty,-1]\cup(1,\infty).\end{cases}$$
c) Dacă $\alpha\in(-\infty,-1]$ seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este:
$$\begin{cases}\text{(A.C.)} & \text{pentru } x\in(-1,1) \text{ cu suma } f(x)=(1+x)^{\alpha},\\ \text{(D)} & \text{pentru } x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty).\end{cases}$$
**5.** Să se dezvolte în serie de puteri următoarele funcţii:

a) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$, $|x|<1$; b) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $|x|<1$; c) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $|x|<1$; d) $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $|x|<1$; e) $f(x)=\ln(1+x)$, $|x|<1$; f) $f(x)=\ln(1-x)$, $|x|<1$; g) $f(x)=\sqrt{1+x}$, $|x|<1$; h) $f(x)=\sqrt{1-x}$, $|x|<1$; i) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, $|x|<1$; j) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $|x|<1$; k) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $|x|<1$; l) $f(x)=\dfrac{1+x}{1+x+x^2}$,

$|x| < 1$; m) $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$, $|x| < 1$; n) $f(x) = \sin 2x \cdot \cos 4x$, $x \in I\!R$;

o) $f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2, & \text{dacă } x \in I\!R \setminus \{0\}, \\ 1, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

**Rezolvare.** a) În egalitatea (2.3.11) luăm $\alpha = -1$. Obţinem:
$\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$, $|x| < 1$.
b) Trecând pe $x$ în $-x$ în relaţia de mai sus, avem:
$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$, $|x| < 1$.
c) În egalitatea de la punctul a) trecem pe $x$ în $x^2$ şi obţinem:
$\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$, $|x| < 1$.
d) Integrând de la 0 la $x$ termen cu termen relaţia de mai sus, rezultă:
$\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots + C$, $|x| < 1$.
Deoarece $f(0) = 0$ constanta de integrare $C$ este egală cu 0. Obţinem astfel:
$\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$, $|x| < 1$.

Deoarece seria obţinută este convergentă pentru $x = 1$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{2n+1}$ (conform criteriului lui Leibniz) şi pentru $x = -1$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{2n+1}$ (conform aceluiaşi criteriu) rezultă, aplicând Teorema 2.3.5, că egalitatea de mai sus are loc pentru $x \in [-1, 1]$. Luând $x = 1$ obţinem:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots,$$

formulă care ne permite să calculăm cu aproximaţie numărul $\pi$. Din punct de vedere istoric seria de mai sus a fost prima serie folosită în calculul numărului $\pi$.

Pentru calculul lui $\pi$ putem găsi o serie mai rapid convergentă decât seria alternată de mai sus de sumă $\operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$. Anume, fie arcul $\alpha$ astfel încât $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{1}{5}$. Rezultă că $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{5}{12}$, iar $\operatorname{tg} 4\alpha = \dfrac{120}{119}$. Deci $4\alpha$ diferă foarte puţin de $\dfrac{\pi}{4}$. Fie:

$$\gamma = 4\alpha - \frac{\pi}{4}, \ \operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg} 4\alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}.$$

Deci: $\dfrac{\pi}{4} = 4\,\alpha - \gamma = 4 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{5} - \operatorname{arctg} \dfrac{1}{239}$.

Înlocuind în seria lui $\operatorname{arctg} x$ pe $x$ cu $\dfrac{1}{5}$ şi apoi cu $\dfrac{1}{239}$, obţinem:

$$\pi = 3,1415926535...$$

Cu acest procedeu $\pi$ a fost calculat de W. Schanke cu 707 zecimale.

O altă metodă de calcul a numărului $\pi$, folosind dezvoltarea lui $\operatorname{arctg} x$ este următoarea: fie $\alpha$ şi $\beta$ două unghiuri pozitive astfel încât $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$. Notăm $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{p}$, $p>1$. Atunci $\beta=\dfrac{\pi}{4}-\alpha$, iar $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{1-\frac{1}{p}}{1+\frac{1}{p}}=\dfrac{p-1}{p+1}$. Deci avem:

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}\frac{1}{p}+\operatorname{arctg}\frac{p-1}{p+1}.$$

Euler a folosit pentru calculul lui $\pi$ formula:

$$\pi=20\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+8\operatorname{arctg}\frac{3}{79}\ \Leftrightarrow\ \frac{\pi}{4}=5\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+2\operatorname{arctg}\frac{3}{79}.$$

e) Integrăm seria de la punctul a) de la 0 la $x$ termen cu termen:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots,\ \ |x|<1.$$

(constanta de integrare este 0), egalitate valabilă şi pentru $x=1$.

f) Integrând seria de la punctul b) termen cu termen, obţinem:

$$-\ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\cdots,\ \ |x|<1,$$

de unde rezultă:

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^{n+1}}{n+1}-\cdots,\ \ |x|<1 \text{ şi } x=-1.$$

g) În egalitatea (2.3.11) luăm $\alpha=\dfrac{1}{2}$. Găsim:

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2\cdot 1!}x-\frac{1}{2^2\cdot 2!}x^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n\cdot n!}x^n+\cdots,\ \ |x|<1$$

şi $x=\pm 1$.

h) Trecem pe $x$ în $-x$ în egalitatea de mai sus. Obţinem:

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2\cdot 1!}x-\frac{1}{2^2\cdot 2!}x^2-\cdots-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n\cdot n!}x^n-\cdots,\ \ |x|<1 \text{ şi } x=\pm 1.$$

i) În egalitatea (2.3.11) luăm $\alpha=-\dfrac{1}{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2\cdot 1!}x+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^2+\cdots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^n+\cdots,\ \ |x|<1 \text{ şi}$$

$x=1$.

j) În relaţia de mai sus trecem pe $x$ în $x^2$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1-\frac{1}{2\cdot 1!}x^2+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4+\cdots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}+\cdots,\ \ |x|<1$$

şi $x=\pm 1$.

k) Integrând ultima relaţie obţinută termen cu termen, avem:

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=x-\frac{x^3}{3\cdot 2\cdot 1!}+\frac{1\cdot 3}{5\cdot 2^2\cdot 2!}x^5+\cdots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1}+$$

$+\cdots,\ \ |x|<1$ şi $x=\pm 1$.

l) Avem: $\ f(x)=\dfrac{1+x}{1+x+x^2}=\dfrac{1-x^2}{1-x^3}=(1-x^2)\cdot\dfrac{1}{1-x^3}$.

Pentru $\dfrac{1}{1-x^3}$ folosim dezvoltarea b) în care trecem pe $x$ în $x^3$; avem:

$\frac{1}{1-x^3} = 1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots + x^{3n} + \cdots, \ \ |x| < 1.$

Rezultă atunci pentru $f$ dezvoltarea:

$$f(x) = (1-x^2)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots + x^{3n} + \cdots) =$$
$$= 1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 - x^8 + \cdots + x^{3n} - x^{3n+2} + \cdots, \ \ |x| < 1.$$

m) Folosind dezvoltările funcţiilor $\frac{1}{1-x}$ şi $e^x$, obţinem:

$$f(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right) \cdot (1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots) =$$
$$= 1 + \left(1 + \frac{1}{1!}\right)x + \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right)x^2 + \cdots + \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)x^n + \cdots, \ \ |x| < 1.$$

n) Avem: $\ f(x) = \sin 2x \cdot \cos 4x = \frac{1}{2}[\sin 6x - \sin 2x].$

Deoarece:

$$\sin 2x = (2x) - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \ \ x \in I\!R,$$
$$\sin 6x = (6x) - \frac{(6x)^3}{3!} + \frac{(6x)^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{(6x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \ \ x \in I\!R,$$

rezultă că:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[(6-2)x - \frac{6^3 - 2^3}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{6^{2n+1} - 2^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots\right] =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{6^{2n+1} - 2^{2n+1}}{2 \cdot (2n+1)!} x^{2n+1}, \ \ x \in I\!R.$$

o) Avem:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 2x}{2x^2}, & \text{dacă } x \in I\!R \setminus \{0\} \\ 1, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Din: $\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \ \ x \in I\!R,$

rezultă că:

$$f(x) = 1 - \frac{2^3}{4!}x^2 + \frac{2^5}{6!}x^4 - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n-2} + \cdots, \ \ x \in I\!R \setminus \{0\},$$

egalitate valabilă şi pentru $x = 0$.

**6.** Să se calculeze sumele următoarelor serii de puteri pe intervalele lor de convergenţă:

a) $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$; b) $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 x^n$;

c) $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$; d) $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + n - 2}$.

**Rezolvare.** a) Termenul general al seriei este $a_n x^n = \frac{1}{n(n+1)} x^n$. Deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, rezultă că raza de convergenţă a seriei este $r = 1$. Conform Problemei 1,a) mulţimea de convergenţă (absolută) a seriei este $[-1, 1]$.

Seriile $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ fiind convergente pentru $x \in (-1,1)$, rezultă că:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, \quad \forall\, x \in (-1,1).$$

Sumele seriilor din membrul drept al egalităţii de mai sus sunt:

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \text{ conform Problemei 5,f)},$$

$$S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x}[-\ln(1-x) - x], \text{ pentru } x \neq 0.$$

Deci:

$$S(x) = -\ln(1-x) + \frac{1}{x}\ln(1-x) + 1 = \frac{1-x}{x}\ln(1-x) + 1, \text{ pentru } x \in (-1,1) \setminus \{0\}.$$

Pentru $x = 0$, $S(0) = 0$, iar pentru $x = \pm 1$, conform Teoremei 2.3.5, obţinem:

$$S(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} S(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{1-x}} + 1\right] = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left(\frac{-\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{(1-x)^2}} + 1\right) = 1$$

şi $\quad S(-1) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} S(x) = -2\ln 2 + 1.$

$$\text{Deci:} \quad S(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{x}\ln(1-x) + 1, & \text{dacă } x \in [-1,1) \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \\ 1, & \text{dacă } x = 1. \end{cases}$$

b) Notând $a_n = (n+1)^2$ avem $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, deci raza de convergenţă a acestei serii de puteri este 1. Pentru $x = \pm 1$, $a_n x^n \not\to 0$ pentru $n \to \infty$, deci seriile sunt divergente. Integrând seria termen cu termen pe $[0,x]$, $0 < |x| < 1$, obţinem:

$$\int_0^x S(t)\,dt = 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots = x(2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}\int_0^x S(t)\,dt = 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots, \quad |x| < 1, \ \ x \neq 0.$$

Printr-o nouă integrare, avem:

$$\int_0^x \left(\frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)\,d\tau\right) dt = x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots.$$

Membrul drept al egalităţii de mai sus este dezvoltarea în serie a funcţiei $\frac{1}{1-x} - x - 1$. Deci:

$$\int_0^x \left(\frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)\,d\tau\right) dt = \frac{x^2}{1-x}.$$

Derivând această relaţie de două ori, avem:

$$\frac{1}{x}\int_0^x S(t)\,dt = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2} \Rightarrow \int_0^x S(t)\,dt = \frac{2x^2 - x^3}{(1-x)^2}.$$

Rezultă astfel: $\quad S(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4x}{(1-x)^3}, \quad |x| < 1, \ \ x \neq 0.$

Deoarece pentru $x = 0$, $S(0) = 0$, deducem că $S$ are forma de mai sus pentru $\forall\, x$, $|x| < 1$.

c) Deoarece:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\frac{n+1}{(n+2)(n+3)}}{(-1)^{n-1}\frac{n}{(n+1)(n+2)}}\right| = 1,$$

rezultă că raza de convergenţă a seriei de puteri este $r = 1$.

Pentru $x = -1$ obţinem seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)}$ care este divergentă, având aceeaşi natură cu seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergentă.

Pentru $x = 1$ avem seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{(n+1)(n+2)}$ care este simplu convergentă, conform criteriului lui Leibniz.

Deci mulţimea de convergenţă a seriei este $(-1, 1]$. Pentru $x$, $|x| < 1$ derivăm seria termen cu termen:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{nx^n}{n+2} = \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{4} + \frac{3x^3}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{nx^n}{n+2} + \cdots,$$

de unde, pentru $x \neq 0$ avem:

$$\frac{S'(x)}{x} = \frac{1}{3} - \frac{2x}{4} + \frac{3x^2}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{nx^{n-1}}{n+2} + \cdots.$$

Integrând seria obţinută termen cu termen pe intervalul $[\varepsilon, x]$, $|x| < 1$, cu $\varepsilon > 0$ mic şi trecând la limită pentru $\varepsilon \to 0$, obţinem:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{x}\frac{S'(t)}{t}\,dt = \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n+2} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n+2}}{n+2} + \cdots\right) = \frac{1}{x^2}\left(\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right).$$

Prin derivare, avem:

$$\frac{S'(x)}{x} = \frac{\left(\frac{1}{1+x} - 1 + x\right)x^2 - 2x\left[\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right]}{x^4} = \frac{x+2}{x^2(1+x)} - \frac{2}{x^3}\ln(1+x),$$

de unde rezultă:

$$S'(x) = \frac{x+2}{x(1+x)} - \frac{2}{x^2}\ln(1+x) = -\frac{1}{1+x} + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}\ln(1+x).$$

Cu o nouă integrare, obţinem:

$$S(x) = -\ln(1+x) + 2\ln|x| + \frac{2}{x}\ln(1+x) - \int\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{1+x}\,dx = -\ln(1+x) +$$

$$+2\ln|x| + \frac{2}{x}\ln(1+x) - 2[\ln|x| - \ln(1+x)] + C = \ln(1+x) + \frac{2}{x}\ln(1+x) + C,$$

$\forall\, x \in (-1, 1)\setminus\{0\}$.

Dar $S(0) = 0$ şi funcţia $S$ este continuă în $x = 0$, deci $\lim_{x\to 0} S(x) = S(0) = 0$.

Calculând limita, pentru $x \to 0$, a expresiei obţinută mai sus pentru $S(x)$, avem:

$$\lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x) + \frac{2}{x}\ln(1+x) + C\right] = C + \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\frac{x}{x+2}} = C + 2.$$

Rezultă $C + 2 = 0$, deci $C = -2$. În concluzie:

$$S(x)=\begin{cases}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\ln(1+x)-2, & \text{dacă } x\in(-1,1]\setminus\{0\},\\ 0, & \text{dacă } x=0.\end{cases}$$

(Pentru $x=1$ am folosit Teorema 2.3.5: $S(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} S(x)=3\ln 2-2$).

d) Notând $a_n=\dfrac{1}{n^2+n-2}$, avem $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$. Deoarece pentru $x=\pm1$ seriile $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+n-2}$ şi $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+n-2}$ sunt absolut convergente, rezultă că mulţimea de convergenţă a seriei dată este $[-1,1]$.

Pentru $x\in(-1,1)$ avem:

$S(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n-1)(n+2)}=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+2}\right)x^n=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n-1}-\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+2}$,

seriile $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n-1}$ şi $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+2}$ având aceeaşi rază de convergenţă ca şi seria iniţială ($r=1$).

Deci $S(x)=\dfrac{x}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}-\dfrac{1}{3x^2}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^{n+2}}{n+2}$, $\forall\, x\in(-1,1)\setminus\{0\}$.

Conform Problemei 5,f), avem:

$S(x)=\dfrac{x}{3}[-\ln(1-x)]-\dfrac{1}{3x^2}\left[-\ln(1-x)-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}\right]=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x^2}-x\right)\ln(1-x)+$
$+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x}\right)$, $\forall\, x\in(-1,1)\setminus\{0\}$.

Pentru $x=0$, $S(0)=0$, iar pentru $x=1$ şi $x=-1$ aplicăm Teorema 2.3.5:

$$S(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} S(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{1}{3x^2}(1+x+x^2)\cdot\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{1-x}}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)=\frac{11}{18}$$

şi $S(-1)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} S(x)=\dfrac{2}{3}\ln 2-\dfrac{5}{18}$.

$$\text{Deci:}\quad S(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^3}{3x^2}\ln(1-x)+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x}\right), & \text{dacă } x\in[-1,1)\setminus\{0\},\\ 0, & \text{dacă } x=0,\\ 11/18, & \text{dacă } x=1.\end{cases}$$

**7.** Să se calculeze sumele următoarelor serii numerice:

a) $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{3n-2}$; b) $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{4n-1}$.

**Rezolvare.** a) Să considerăm seria de puteri $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{3n-2}}{3n-2}$ care are raza de convergenţă $r=1$. Pentru $x=1$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{3n-2}$ este simplu convergentă, conform criteriului de Leibniz, iar pentru $x=-1$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{-1}{3n-2}$ este divergentă. Deci mulţimea de convergenţă a seriei de puteri de mai sus este $(-1,1]$. Să notăm cu $f$ suma sa. Pentru

$x \in (-1,1)$ derivând seria termen cu termen, obţinem:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{3n-3} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(x^3)^{n-1} = \frac{1}{1+x^3},$$

de unde rezultă că:

$$f(x) = \int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{1+x} - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{1-x+x^2}\,dx = \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C,\ \ \forall\, x \in (-1,1).$$

Deoarece $f(0) = 0$ rezultă că $C = \dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$. Deci suma seriei este:

$$f(x) = \frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}},\ \ \forall\, x \in (-1,1).$$

Pentru $x = 1$, conform Teoremei 2.3.5 avem:

$$S = f(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \frac{1}{6}\ln 4 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

b) Fie seria de puteri $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{4n-1}}{4n-1}$ cu mulţimea de convergenţă $[-1,1]$. Să notăm cu $f$ suma sa şi s-o derivăm termen cu termen pentru $x \in (-1,1)$. Obţinem:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{4n-2} = x^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n},$$

deci $f'(x) = \dfrac{x^2}{x^4+1}$, $x \in (-1,1)$.

Integrând egalitatea de mai sus pe intervalul $[0,x]$, cu $|x| < 1$, găsim:

$$f(x) = \int \frac{x^2}{x^4+1}\,dx = \int \frac{x^2}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}\,dx = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x\,dx}{x^2+\sqrt{2}x+1}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x\,dx}{x^2-\sqrt{2}x+1} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{2x+\sqrt{2}-\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{2x-\sqrt{2}+\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1) + \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)\right],\ \ x \in (-1,1).$$

Pentru $x = 1$, conform Teoremei 2.3.5, avem:

$$S = f(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)] =$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1).$$

**8.** Fie seria de puteri $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cu raza de convergenţă $r = 1$. Să se demonstreze că are loc egalitatea:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}\Delta a_n \cdot x_n,\ \ \forall\, x \in (-1,1),$$

unde $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$. Seria din membrul drept al relaţiei de mai sus se numeşte *transformata Euler-Abel* a seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Să se dea apoi o generalizare a egalităţii de mai sus şi să se aplice pentru seria:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \quad x \in (-1,1).$$

**Rezolvare.** Fie $f(x)$ suma seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Deci $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, relaţie care se poate scrie sub forma:

$$f(x) = a_0 + x\varphi(x), \tag{2.1.13}$$

unde $\varphi(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$ sau schimbând indicele $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n$.

Înmulţim ambii membri ai ultimei egalităţi de mai sus cu $(1-x)$. Obţinem:

$$(1-x)\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} \;\Leftrightarrow\; (1-x)\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-x)\varphi(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)x^n = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n \cdot x^n.$$

Cantitatea $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ se numeşte *diferenţa de ordinul întâi* a coeficientului $a_n$. Deducem astfel:

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{1-x} + \frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n \cdot x^n,$$

deci, conform relaţiei (2.1.13):

$$f(x) = a_0 + x\cdot\varphi(x) = a_0 + \frac{x a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n \cdot x^n \quad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n \cdot x^n, \quad \forall\, x \in (-1,1). \tag{2.3.14}$$

Aplicând într-un mod asemănător transformata Euler-Abel (formula (2.3.14)) seriei de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \Delta a_n \cdot x^n$, obţinem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n \cdot x^n = \frac{\Delta a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^2 a_n \cdot x^n,$$

unde $\Delta^2 a_n = \Delta(\Delta a_n) = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$ sunt diferenţele de ordinul al doilea ale coeficienţilor $a_n$.

Deducem astfel pentru seria iniţială:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x}\left(\frac{\Delta a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^2 a_n \cdot x^n\right) =$$

$$= \frac{a_0}{1-x} + \frac{x\,\Delta a_0}{(1-x)^2} + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^2 a_n \cdot x^n.$$

Aplicând succesiv de $p$ ori transformata Euler-Abel, obţinem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x\,\Delta a_0}{(1-x)^2} + \cdots + \frac{x^{p-1}\cdot\Delta^{p-1}a_0}{(1-x)^p} + \left(\frac{x}{1-x}\right)^p \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^p a_n \cdot x^n,$$

unde $\Delta^p a_n = \Delta^{p-1}a_{n+1} - \Delta^{p-1}a_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ sunt diferenţele de ordinul $p$ ale coeficienţilor $a_n$, iar $\Delta^k a_0$, $(k = 0, 1, \ldots)$ sunt diferenţele finite consecutive ale coeficienţilor $a_n$ cu $n = 0$.

Astfel obţinem pentru funcţia $f(x)$ următoarea dezvoltare:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \Delta^k a_0 \cdot \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} + \left(\frac{x}{1-x}\right)^p \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^p a_n \cdot x^n, \quad \forall\, x \in (-1,1), \tag{2.3.15}$$

unde am notat cu $\Delta^0 a_0 = a_0$.

În cazul particular $a_n = P(n)$, unde $P(n)$ este un polinom de grad $p-1$ în variabila $n$, formula de mai sus se transformă într-o sumă finită:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n)\, x^n = \sum_{k=0}^{p-1} \Delta^k P(0) \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}, \quad x \in (-1,1), \tag{2.3.16}$$

deoarece $\Delta^p P(n) = 0$.

Trecând $x \to -x$ în egalitatea (2.3.15) deducem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^n = \sum_{k=0}^{p-1} \Delta^k a_0 \frac{(-1)^k x^k}{(1+x)^{k+1}} + \frac{(-1)^p x^p}{(1+x)^p} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^p a_n \cdot (-1)^n x^n, \quad \forall\, x \in (-1,1). \tag{2.3.17}$$

Pentru $p \to \infty$ relaţiile (2.3.15) şi (2.3.17) ne dau următoarele egalităţi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k a_0 \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \frac{1}{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k a_0 \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)^k, \quad \forall\, x \in (-1,1), \tag{2.3.18}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^n = \frac{1}{1+x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Delta^k a_0 \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)^k, \quad \forall\, x \in (-1,1). \tag{2.3.19}$$

Ca aplicaţie a transformatei Euler-Abel să considerăm dezvoltarea în serie de puteri a funcţiei $\operatorname{arctg} x$:

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \forall\, x \in (-1,1),\end{aligned}$$

valabilă şi pentru $x = \pm 1$, conform Teoremei 2.3.5.

Scriem seria de mai sus sub forma:

$$\operatorname{arctg} x = x \left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} + \cdots\right)$$

sau $\quad \operatorname{arctg} x = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} (x^2)^n, \;\; \forall\, x \in [-1, 1].$

Vom aplica formula (2.3.19) ultimei serii de mai sus cu $a_n = \frac{1}{2n+1}$ şi $x \to x^2$. Obţinem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} (x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Delta^k a_0 \cdot \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right)^k, \;\; \forall\, x \in [0, 1).$$

Avem: $\Delta^0 a_0 = a_0 = 1, \;\; \Delta^1 a_0 = a_1 - a_0 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}, \;\; \Delta^2 a_0 = a_2 - 2a_1 + a_0 =$ $= \frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{8}{15} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}, \;\; \Delta^3 a_0 = a_3 - 3a_2 + 3a_1 - a_0 = \frac{1}{7} - \frac{3}{5} + 1 - 1 = -\frac{16}{35} =$ $= -\frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}$, etc. Prin inducţie matematică se demonstrează că:

$$\Delta^p a_0 = (-1)^p \frac{(2p)!!}{(2p+1)!!}, \;\; p \geq 1, \;\; \Delta^0 a_0 = 1.$$

Deci:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} (x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot (-1)^k \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \cdot \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right)^k, \;\; \forall\, x \in [0, 1),$$

de unde rezultă:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1+x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \cdot \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right)^k, \;\; \forall\, x \in [0, 1],$$

(valabilă şi pentru $x = 1$).

Pentru $x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$, $\operatorname{arctg} x = \arcsin y$. Rezultă astfel:

$$\arcsin y = y\sqrt{1-y^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \cdot y^{2k}, \;\; \forall\, y \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

sau $\quad \frac{\arcsin y}{\sqrt{1-y^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} y^{2k+1}, \;\; \forall\, y \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$

Să integrăm relaţia de mai sus termen cu termen. Obţinem:

$$\frac{1}{2} (\arcsin y)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \cdot \frac{y^{2k+2}}{2k+2}, \;\; \forall\, y \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2} (\arcsin y)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[2(k-1)]!!}{(2k-1)!!} \cdot \frac{y^{2k}}{2k}, \;\; \forall\, y \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2 (\arcsin y)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(k-1)!]^2}{(2k)!} (2y)^{2k}, \;\; \forall\, y \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

Pentru $y = \frac{1}{2}$, găsim egalitatea:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(k-1)!]^2}{(2k)!} = \frac{\pi^2}{18}. \tag{2.3.20}$$

**9.** Să se aplice transformata Euler-Abel (formula (2.3.16)) următoarelor serii de puteri, determinându-se astfel sumele acestora:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+n+1)\,x^n,\ \ x\in(-1,1);$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}(n^5+n^3+1)\,x^n,\ \ x\in(-1,1).$

**Rezolvare.** a) Avem $P(n)=n^2+n+1$. Calculăm diferenţele $\Delta^k P(0)$:

$\Delta^0 P(0)=P(0)=1,\ \ \Delta^1 P(0)=P(1)-P(0)=2,\ \ \Delta^2 P(0)=P(2)-2P(1)+P(0)=$
$=2$. Rezultă:

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+n+1)\,x^n=\frac{1}{1-x}+\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{2x^2}{(1-x)^3},\ \ \forall\,x\in(-1,1).$$

b) Avem $P(n)=n^5+n^3+1$. Deci:

$\Delta^0 P(0)=P(0)=1,\ \ \Delta^1 P(0)=P(1)-P(0)=2,\ \ \Delta^2 P(0)=P(2)-2P(1)+P(0)=$
$=36,\ \ \Delta^3 P(0)=P(3)-3P(2)+3P(1)-P(0)=156,\ \ \Delta^4 P(0)=P(4)-4P(3)+6P(2)-$
$-4P(1)+P(0)=240,\ \ \Delta^5 P(0)=P(5)-5P(4)+10P(3)-10P(2)+5P(1)-P(0)=120.$

Deci:

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n^5+n^3+1)x^n=\frac{1}{1-x}+\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{36x^2}{(1-x)^3}+\frac{156x^3}{(1-x)^4}+\frac{240x^4}{(1-x)^5}+$$
$$+\frac{120x^5}{(1-x)^6},\ \ \forall\,x\in(-1,1).$$

**10.** Folosind Problema 8 şi {[20], Capitolul 2, §2, Problema 19} să se determine sumele următoarelor serii:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\quad \text{şi}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}.$$

**Rezolvare.** În {[20], Capitolul 2, §2, Problema 19} am demonstrat egalitatea:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(k-1)!]^2}{(2k)!}.$$

Această relaţie combinată cu formula (2.3.20) ne conduce la concluzia că:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Pentru a doua serie din enunţ, avem:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{12}.$$

Deci:
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

**11.** Să se arate, utilizînd seriile de puteri, că:

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\,dx=\frac{\pi^2}{12}.$$

**Rezolvare.** Conform Problemei 5,e) avem:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots,\ \ \forall\,x\in(-1,1),$$

de unde rezultă:

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n+1}+\cdots,\ \ \forall\,x\in(0,1).$$

Deoarece seria de mai sus este convergentă în $x = 0$ şi $x = 1$ rezultă că suma seriei este continuă în punctul $x = 0$, respectiv $x = 1$. Obţinem egalitatea:

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n+1} + \cdots, \quad \forall x \in [0, 1],$$

unde $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & \text{dacă } x \in (0,1], \\ 1, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

Integrând seria de mai sus termen cu termen pe intervalul $[0, 1]$, rezultă:

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots.$$

Conform Problemei 10 avem: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$, de unde deducem că:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx = \frac{\pi^2}{12}.$$

**12.** Să se calculeze, folosind dezvoltarea în serie de puteri a funcţiei $e^x$, integrala:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx,$$

cu o aproximaţie $\varepsilon < 10^{-4}$.

**Rezolvare.** Din dezvoltarea funcţiei $e^x$, avem:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Schimbând pe $x$ cu $t$ şi integrând între 0 şi $x \in \mathbb{R}$ seria de mai sus termen cu termen, obţinem:

$$\int_0^x e^{-t^2}\, dt = x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pentru $x = 1$ rezultă:

$$\int_0^1 e^{-t^2}\, dt = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} - \frac{1}{75600} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}.$$

Deoarece $|s_n - s| \leq \alpha_{n+1}$, unde $s_n$ este suma parţială de ordinul $n$ a seriei alternate $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n$, cu suma $s$, impunem condiţia $\alpha_{n+1} < \dfrac{1}{10^4}$, cu $\alpha_n = \dfrac{1}{n!(2n+1)}$. Rezultă $(2n+3)(n+1)! > 10^4 \Rightarrow n \geq 6$. Calculând suma primilor şapte termeni (inclusiv $\alpha_0$), prin transformarea lor în fracţie zecimală (prin lipsă sau prin adaos, acolo unde transformarea nu se face exact), cu cinci zecimale exacte, obţinem:

$$0,74681 < \int_0^1 e^{-x^2}\, dx < 0,74685.$$

Deci $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\, dx \simeq 0,7468.$

## PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

**13.** Să se determine raza şi intervalul de convergenţă pentru următoarele serii de puteri:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p},\ p\geq 0$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+2)}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{n^\alpha}x^n,\ \alpha\geq 0$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a^n-1}{n}x^n,\ a\geq 0$.

**14.** Să se determine domeniul de convergenţă al seriilor de puteri generalizate:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+3n+4}\right)^n\cdot\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^n$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}\cdot(n!)^2}{(2n)!}\sin^n x$.

**15.** Să se dezvolte în serie de puteri următoarele funcţii:

a) $f(x)=\frac{1}{1-x^2},\ |x|<1$; b) $f(x)=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right),\ |x|<1$; c) $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2},\ |x|<1$;

d) $f(x)=\frac{1}{(1-x)^3},\ |x|<1$; e) $f(x)=\sqrt[3]{1+x},\ |x|<1$; f) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}},\ |x|<1$;

g) $f(x)=\sqrt{1+x^2},\ |x|<1$; h) $f(x)=\sqrt{1-x^2},\ |x|<1$; i) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}},\ |x|<1$;

j) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x|<1$; k) $f(x)=\arcsin x,\ |x|<1$; l) $f(x)=\arccos x,\ |x|<1$;

m) $f(x)=\operatorname{arcctg} x,\ |x|<1$; n) $f(x)=\frac{1}{1+x+x^2},\ |x|<1$; o) $f(x)=\sin^3 x,\ x\in I\!R$;

p) $f(x)=x\cdot\operatorname{arctg} x-\ln(1+x^2),\ |x|<1$; q) $f(x)=\frac{e^x}{1+x},\ |x|<1$; r) $f(x)=$
$=\frac{\arcsin x}{1-x},\ |x|<1$; s) $f(x)=(\arcsin x)^2,\ |x|<1$; t) $f(x)=(\operatorname{arctg} x)^2,\ |x|<1$.

**16.** Să se demonstreze formula:

$$3\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{12}+2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{37}=\frac{\pi}{6}$$

şi apoi să se calculeze $\pi$ cu cinci zecimale exacte folosind relaţia de mai sus şi dezvoltarea în serie de puteri a funcţiei $\operatorname{arctg} x$.

**17.** Să se găsească primii termeni ai dezvoltării în serie Mac-Laurin a funcţiilor:

a) $f(x)=\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$; b) $f(x)=\ln\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)$; c) $f(x)=(1+x)^x$;

d) $f(x)=(1+x)^{1/x}$.

**18.** Să se calculeze sumele următoarelor serii de puteri pe intervalele lor de convergenţă:

a) $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+2)}$; b) $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)x^n}{n!(n+2)}$; c) $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(n+1)(n+3)}$.

**19.** Să se calculeze sumele următoarelor serii numerice:
a) $S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$; b) $S = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{3n+2}$; c) $S = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{4n+1}$.

**20.** Să se aplice transformata Euler-Abel următoarelor serii de puteri, determinându-se astfel sumele acestora:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty}(n^3+n+1)\,x^n; \;\; \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty}(n^5+2)\,x^n.$$

**21.** Să se calculeze, folosind dezvoltarea în serie de puteri a funcţiilor $\sin x$ şi $\cos x$, integralele:

$$I_1 = \int_0^1 \sin x^2\, dx \quad \text{şi} \quad I_2 = \int_0^1 \cos x^2\, dx$$

cu o aproximaţie $\varepsilon < 10^{-4}$.

**22.** Să se calculeze, folosind dezvoltarea în serie de puteri, următoarele integrale:

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx; \;\; \text{b) } \int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x}\, dx; \;\; \text{c) } \int_0^{1/2} e^{-x^2}\, dx$$

cu o aproximaţie $\varepsilon < 10^{-3}$.

# §4. SERII FOURIER

Fie funcţia $f : [-l, l] \to I\!R$, $l > 0$ o funcţie integrabilă pe $[-l, l]$. Numerele:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\, dx, \quad a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\, dx, \quad b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\, dx,$$

$k \in I\!N^*$, se numesc *coeficienţii Fourier* ai funcţiei $f$ în raport cu sistemul trigonometric de funcţii:

$$\left\{\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l}, \cdots, \cos\frac{n\pi x}{l},\ \sin\frac{n\pi x}{l}, \cdots\right\}.$$

Dacă $F : I\!R \to I\!R$ este prelungirea periodică de perioadă $2l$ a funcţiei $f$, atunci oricare ar fi $x_0 \in I\!R$ avem:

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+2l} F(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\, dx, \quad k \in I\!N, \qquad b_k = \frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_0+2l} F(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\, dx, \quad k \in I\!N^*.$$

Seria trigonometrică:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \quad x \in [-l, l]$$

unde $a_0,\ a_k,\ b_k,\ k \in I\!N^*$ sunt coeficienţii Fourier ai funcţiei $f$, se numeşte *seria Fourier* a funcţiei $f$.

O funcţie $f : [a, b] \to I\!R$ se numeşte *netedă* pe $[a, b]$ dacă $f \in C^1([a, b])$. O funcţie $f : [a, b] \to I\!R$ se numeşte *netedă pe porţiuni* dacă are derivată continuă pe $[a, b]$ cu excepţia unui număr finit de puncte din $[a, b]$ în care $f$ nu este derivabilă, dar are derivate laterale finite.

**Teorema 2.4.1.** Dacă $f : [-l, l] \to I\!R$ este netedă pe porţiuni, atunci seria ei Fourier este convergentă în $\forall\, x \in [-l, l]$ şi suma sa $s(x)$:

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

este egală cu:

$$s(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, & \text{dacă } x \in (-l, l), \\ \dfrac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}, & \text{dacă } x = \pm l, \end{cases}$$

unde $f(x+0) = \lim\limits_{\substack{u \to x \\ u > x}} f(u)$, $f(x-0) = \lim\limits_{\substack{u \to x \\ u < x}} f(u)$.

Dacă $f$ este continuă în orice punct $x \in (-l, l)$ atunci $s(x) = f(x)$, $\forall\, x \in (-l, l)$, iar dacă $f$ este netedă pe $[-l, l]$ şi $f(-l) = f(l)$ atunci $s(x) = f(x)$, $\forall\, x \in [-l, l]$.

**Teorema 2.4.2** (Dezvoltarea unei funcţii în serie de cosinusuri). Dacă funcţia $f : [0, l] \to I\!R$ este netedă pe porţiuni, atunci seria:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

unde $a_n = \dfrac{2}{l} \displaystyle\int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx$, $n \in I\!N$, este convergentă în $\forall\, x \in [0, l]$. În plus, suma sa $s(x)$ este dată prin:

$$s(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, & \text{dacă } x \in (0, l), \\ f(0+0), & \text{dacă } x = 0, \\ f(l-0), & \text{dacă } x = l. \end{cases}$$

**Teorema 2.4.3** (Dezvoltarea unei funcţii în serie de sinusuri). Dacă funcţia $f : [0, l] \to I\!R$ este netedă pe porţiuni atunci seria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

unde $b_n = \dfrac{2}{l} \displaystyle\int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx$, $n \in I\!N^*$, este convergentă în $\forall\, x \in [0, l]$. În plus, suma sa $s(x)$ este:

$$s(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, & \text{dacă } x \in (0, l), \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \text{ şi } x = l. \end{cases}$$

## PROBLEME REZOLVATE

**1.** Să se dezvolte în serie Fourier următoarele funcţii:

a) $f(x) = x$, $x \in [-l, l]$; b) $f(x) = x^2$, $x \in [-l, l]$;

c) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [-\pi, 0), \\ x, & \text{dacă } x \in [0, \pi]; \end{cases}$ d) $f(x) = |x|, \ \ x \in [-\pi, \pi]$;

e) $f(x) = \arcsin(\sin x), \ \ x \in [-\pi, \pi]$.

**Rezolvare.** Funcţiile de mai sus satisfac condiţiile Teoremei 2.4.1.

a) Deoarece $f$ este impară, rezultă că $a_n = 0, \ \ \forall \in I\!N$, iar:

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} x \sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} x \sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = -\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l + \frac{2}{n\pi}\int_0^l \cos\frac{n\pi x}{l}\,dx =$$
$$= -\frac{2l}{n\pi}\cos n\pi + \frac{2l}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l = \frac{2l}{n\pi}(-1)^{n+1}, \ \ \forall\, n \geq 1.$$

Deci seria Fourier asociată funcţiei $f$ este:

$$\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

cu suma $\ s(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in (-l, l), \\ 0, & \text{dacă } x = \pm l. \end{cases}$

b) Funcţia $f$ fiind pară rezultă că $b_n = 0, \ \ \forall\, n \geq 1$, iar:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{2}{l}\int_0^l x^2\,dx = \frac{2l^2}{3}; \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx =$$
$$= \frac{2}{l}\int_0^l x^2\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{n\pi}x^2\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l - \frac{2}{n\pi}\int_0^l 2x\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2l^2}{n\pi}\sin n\pi -$$
$$-\frac{4}{n\pi}\int_0^l x\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{4l}{(n\pi)^2}x\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l - \frac{4l}{(n\pi)^2}\int_0^l\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{4l^2}{(n\pi)^2}\cdot(-1)^n -$$
$$-\frac{4l^2}{(n\pi)^3}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l = (-1)^n\frac{4l^2}{(n\pi)^2}.$$

Seria Fourier ataşată funcţiei $f$ este:

$$\frac{l^2}{3} + \frac{4l^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

Deoarece funcţia $f$ are derivată continuă pe $[-l, l]$ şi $f(-l) = f(l) = l^2$ rezultă că suma seriei de mai sus este $s(x) = f(x), \ \ \forall\, x \in [-l, l]$, adică:

$$x^2 = \frac{l^2}{3} + \frac{4l^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{l}, \ \ \forall\, x \in [-l, l].$$

Pentru $l = \pi$, obţinem egalitatea:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, \ \ \forall\, x \in [-\pi, \pi].$$

Dacă luăm în relaţia obţinută $x = 0$ şi $x = \pi$ obţinem suma seriei alternate armonice generalizată, cu $\alpha = 2$:

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12},$$

respectiv suma seriei armonice generalizate cu $\alpha = 2$:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

c) Avem $\ a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \dfrac{\pi}{2}$, iar:

$a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \dfrac{1}{n\pi}x\sin nx\Big|_0^{\pi} - \dfrac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx =$
$= \dfrac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \dfrac{1}{\pi n^2}[(-1)^n - 1],$

$b_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = -\dfrac{1}{n\pi}x\cos nx\Big|_0^{\pi} + \dfrac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx =$
$= -\dfrac{1}{n}\cdot(-1)^n + \dfrac{1}{n^2\pi}\sin nx\Big|_0^{\pi} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n},\ \ \forall\, n \geq 1.$

Deci seria Fourier asociată funcţiei $f$ este:

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^2\pi}[(-1)^n - 1]\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right\} =$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

cu suma: $s(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in (-\pi,\pi), \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{dacă } x = \pm\pi \end{cases}$ sau $s(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in (-\pi,0), \\ x, & \text{dacă } x \in [0,\pi), \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{dacă } x = \pm\pi, \end{cases}$

$f$ fiind derivabilă pe $[-\pi,\pi]\setminus\{0\}$.

d) Calculăm coeficienţii Fourier ai funcţiei $f$:

$a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \dfrac{2x^2}{2\pi}\Big|_0^{\pi} = \pi,$

$a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \dfrac{2}{n\pi}x\sin nx\Big|_0^{\pi} - \dfrac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx =$
$= \dfrac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \dfrac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 1],\ \ n \geq 1,$

iar $b_n = 0$, căci $f$ este o funcţie pară.

Deci seria Fourier asociată funcţiei $f$ este:

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 1]\cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$$

a cărei sumă $s(x)$ este:

$$s(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in (-\pi,\pi), \\ \pi, & \text{dacă } x = \pm\pi, \end{cases}$$

sau $s(x) = |x|,\ \ \forall\, x \in [-\pi,\pi]$, $f$ fiind derivabilă pe $[-\pi,\pi]\setminus\{0\}$.

e) Deoarece funcţia $f$ este impară rezultă că $a_n = 0,\ \ \forall\, n \geq 0$, iar:

$b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \arcsin(\sin x)\cdot\sin nx\,dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\arcsin(\sin x)\cdot\sin nx\,dx =$
$= -\dfrac{2}{n\pi}\arcsin(\sin x)\cdot\cos nx\Big|_0^{\pi} + \dfrac{2}{n\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos nx\cdot\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\,dx = \dfrac{2}{n\pi}\int_0^{\pi/2}\cos nx\,dx -$
$-\dfrac{2}{n\pi}\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi}\cos nx\,dx = \dfrac{2}{\pi n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi/2} - \dfrac{2}{\pi n^2}\sin nx\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \dfrac{2}{n^2\pi}\sin\dfrac{n\pi}{2} + \dfrac{2}{n^2\pi}\sin\dfrac{n\pi}{2} =$
$= \dfrac{4}{n^2\pi}\sin\dfrac{n\pi}{2},\ \ \forall\, n \geq 1.$

Seria Fourier este:

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin nx,\ \ \forall\, x\in[-\pi,\pi],$$

cu suma $s(x)=f(x),\ \ \forall\, x\in[-\pi,\pi]$, $f$ fiind derivabilă pe $[-\pi,\pi]\setminus\left\{-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right\}$. Deci:

$$\arcsin(\sin x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin nx=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin{(2k+1)x},\ \ \forall\, x\in[-\pi,\pi].$$

Dacă vom considera funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\arcsin(\sin x)$, prelungirea prin periodicitate a funcţiei $f$, obţinem:

$$\arcsin(\sin x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin{(2k+1)x},\ \ \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

**2.** Să se dezvolte în serie Fourier următoarele funcţii:

a) $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}-1, & \text{dacă } x\in(-\pi,0),\\ 0, & \text{dacă } x=0,\ \pi,\ -\pi,\\ 1, & \text{dacă } x\in(0,\pi).\end{cases}$

b) $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}-a, & \text{dacă } x\in[-\pi,-\pi/2),\\ a, & \text{dacă } x\in[-\pi/2,\pi/2],\\ -a, & \text{dacă } x\in(\pi/2,\pi].\end{cases}$

c) $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}-\dfrac{2a}{\pi}(x+\pi), & \text{dacă } x\in\left[-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right),\\ \dfrac{2a}{\pi}x, & \text{dacă } x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right],\\ \dfrac{2a}{\pi}(\pi-x), & \text{dacă } x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right].\end{cases}$

**Rezolvare.** a) Deoarece $f$ este impară (vezi Figura 2.4.1) rezultă că $a_n=0$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$. Pentru $b_n$ avem:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=-\frac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n).$$

Seria Fourier asociată lui $f$ este:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)\sin nx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k+1)}\sin{(2k+1)x}=\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\right],$$

cu suma $s(x)=f(x)$. Dacă $F$ este prelungirea prin periodicitate a funcţiei $f$ pe $\mathbb{R}$ atunci are loc egalitatea:

$$F(x)=\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\right],\ \ \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

b) Funcţia $f$ fiind pară (vezi Figura 2.4.2) rezultă că $b_n=0,\ \ \forall\, n\in\mathbb{N}^*$. Pentru $a_n$ avem:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}a\,dx+\frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(-a)\,dx=a-a=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}a\cos nx\,dx-\frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}a\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{2a}{\pi n}\sin nx\Big|_0^{\pi/2}-\frac{2a}{\pi n}\sin nx\Big|_{\pi/2}^{\pi}=\frac{2a}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{2a}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{4a}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{2},\ \ n\geq 1.$$

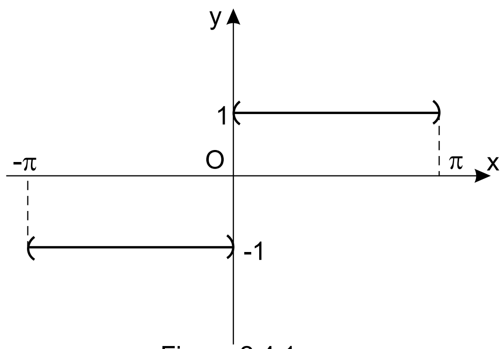

Figura 2.4.1

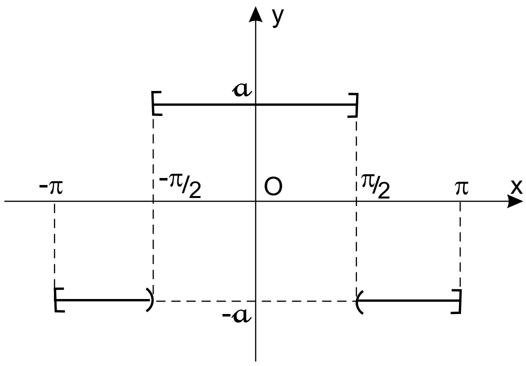

Figura 2.4.2

Seria Fourier asociată lui $f$ este:

$$\frac{4a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\cos nx=\frac{4a}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}(-1)^k\cos(2k+1)x=$$
$$=\frac{4a}{\pi}\left[\cos x-\frac{\cos 3x}{3}+\frac{\cos 5x}{5}-\cdots\right],$$

cu suma $s(x)=\begin{cases}-a, & \text{dacă } x\in[-\pi,-\pi/2),\\ a, & \text{dacă } x\in(-\pi/2,\pi/2),\\ -a, & \text{dacă } x\in(\pi/2,\pi],\\ 0, & \text{dacă } x=-\pi/2,\ \pi/2.\end{cases}$

c) Deoarece funcţia $f$ este impară (vezi Figura 2.4.3) rezultă că $a_n=0,\ \forall n\in I\!N$. Avem:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{2a}{\pi}x\sin nx\,dx+$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{2a}{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx=-\frac{4a}{\pi^2 n}x\cos nx\Big|_0^{\pi/2}+\frac{4a}{\pi^2n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi/2}-\frac{4a}{\pi n}\cos nx\Big|_{\pi/2}^{\pi}+$$
$$+\frac{4a}{\pi^2 n}x\cos nx\Big|_{\pi/2}^{\pi}-\frac{4a}{\pi^2n^2}\sin nx\Big|_{\pi/2}^{\pi}=\frac{8a}{\pi^2n^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

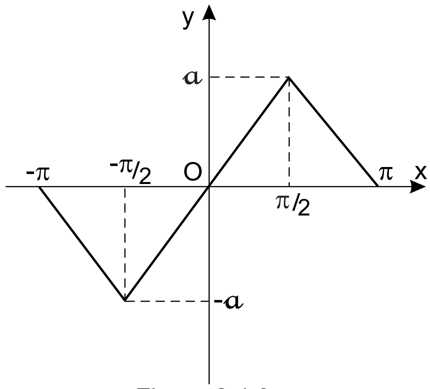

Figura 2.4.3

Seria Fourier asociată funcţiei $f$ este:

$$\frac{8a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin nx=\frac{8a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}(-1)^k\sin(2k+1)x=$$

$$= \frac{8a}{\pi^2}\left[\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \cdots\right],$$

cu suma $s(x) = f(x), \ \forall\, x \in [-\pi, \pi]$.

**3.** Să se dezvolte în serie de cosinusuri următoarele funcţii:

a) $f : [0, \pi] \to I\!R, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in [0, a], \\ 0, & \text{dacă } x \in (a, \pi], \ (0 < a < \pi). \end{cases}$

b) $f : [0, \pi] \to I\!R, \quad f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2\alpha}, & \text{dacă } 0 \le x \le 2\alpha, \\ 0, & \text{dacă } 2\alpha < x \le \pi, \ (0 < \alpha < \pi/2). \end{cases}$

**Rezolvare.** a) Coeficienţii Fourier sunt:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\, dx = \frac{2a}{\pi}, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^a \cos nx\, dx = \frac{2}{n\pi}\sin na, \ \forall\, n \ge 1.$$

Seria de cosinusuri ataşată funcţiei $f$ este:

$$\frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin na}{n}\cos nx, \quad x \in [0, \pi],$$

cu suma $s(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in [0, a), \\ 0, & \text{dacă } x \in (a, \pi], \\ \dfrac{1}{2}, & \text{dacă } x = a, \end{cases}$

conform Teoremei 2.4.2 ($f$ este derivabilă pe $[0, \pi] \setminus \{a\}$).

b) Avem:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\alpha}\left(1 - \frac{x}{2\alpha}\right) dx = \frac{2\alpha}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\alpha}\left(1 - \frac{x}{2\alpha}\right)\cos nx\, dx = \frac{2}{n\pi}\sin nx\Big|_0^{2\alpha} -$$

$$-\frac{1}{\alpha\pi}\int_0^{2\alpha} x\cos nx\, dx = \frac{2}{n\pi}\sin 2n\alpha - \frac{1}{\pi\alpha n}x\sin nx\Big|_0^{2\alpha} + \frac{1}{\pi\alpha n}\int_0^{2\alpha}\sin nx\, dx = \frac{2}{n\pi}\sin 2n\alpha -$$

$$-\frac{2}{\pi n}\sin 2n\alpha - \frac{1}{\pi\alpha n^2}\cos nx\Big|_0^{2\alpha} = \frac{1}{\pi\alpha n^2}(1 - \cos 2n\alpha), \quad n \ge 1.$$

Seria de cosinusuri asociată funcţiei $f$ este:

$$\frac{\alpha}{\pi} + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\pi\alpha n^2}(1 - \cos 2n\alpha)\cdot\cos nx = \frac{2\alpha}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\cos nx\right], \quad x \in [0, \pi],$$

cu suma $s(x) = f(x), \ \forall\, x \in [0, \pi]$, $f$ fiind derivabilă pe $[0, \pi] \setminus \{2\alpha\}$.

**4.** Să se dezvolte în serie de sinusuri următoarele funcţii:

a) $f : [0, \pi] \to I\!R, \ f(x) = \cos ax, \ a \in I\!R$.

b) $f : [0, \pi] \to I\!R, \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in [0, \pi/2], \\ 0, & \text{dacă } x \in (\pi/2, \pi]. \end{cases}$

**Rezolvare.** a) Dacă $a \in Z$, pentru $n \ne \pm a$, avem:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos ax\cdot\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\sin(n+a)x + \sin(n-a)x]\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n+a}\cos(n+a)x\Big|_0^\pi - \frac{1}{n-a}\cos(n-a)x\Big|_0^\pi\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n+a}\cos(n+a)\pi + \frac{1}{n+a} -\right.$$

$$-\frac{1}{n-a}\cos(n-a)\pi+\frac{1}{n-a}\Big]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n+a}(1-\cos(n+a)\pi)+\frac{1}{n-a}(1-\cos(n-a)\pi)\right]=$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n+a}(1-(-1)^n\cos a\pi)+\frac{1}{n-a}(1-(-1)^n\cos a\pi)\right]=\frac{2n}{\pi(n^2-a^2)}[1-(-1)^{n+a}].$$

Pentru $n=a$ sau $n=-a$, $b_n=0$, deci seria de sinusuri va fi:

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\neq|a|}}^{\infty}\frac{2n}{\pi(n^2-a^2)}\left[1-(-1)^{n+a}\right]\sin nx,$$

cu suma $s(x)=\begin{cases}\cos ax, & \text{dacă } x\in(0,\pi),\\ 0, & \text{dacă } x=0 \text{ şi } x=\pi,\end{cases}$

conform Teoremei 2.4.3.

Dacă $a\notin Z$ atunci $b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2n}{n^2-a^2}(1-(-1)^n\cos a\pi)$, $\forall n\in I\!N^*$, iar seria de sinusuri este:

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2-a^2}[1-(-1)^n\cos a\pi]\sin nx,$$

cu suma $s(x)=\begin{cases}\cos ax, & \text{dacă } x\in(0,\pi),\\ 0, & \text{dacă } x=0 \text{ şi } x=\pi.\end{cases}$

b) Avem:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}x\sin nx\,dx=-\frac{2}{n\pi}x\cos nx\Big|_0^{\pi/2}+\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi/2}\cos nx\,dx=$$
$$=-\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{\pi n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi/2}=\frac{2}{\pi n}\left[\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}\right],\quad n\geq 1,$$

de unde rezultă:

$$b_{2k}=(-1)^{k+1}\frac{1}{2k},\quad k\in I\!N^*;\qquad b_{2k-1}=(-1)^{k+1}\frac{2}{(2k-1)^2\pi},\quad k\in I\!N.$$

Seria de sinusuri asociată funcţiei $f$ este:

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin nx=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k}\sin 2kx+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{(2k-1)^2\pi}\sin(2k-1)x,$$

cu suma $s(x)=\begin{cases}x, & \text{dacă } x\in[0,\pi/2),\\ \frac{\pi}{4}, & \text{dacă } x=\pi/2,\\ 0, & \text{dacă } x\in(\pi/2,\pi],\end{cases}$

$f$ fiind derivabilă pe $[0,\pi]\setminus\{\pi/2\}$.

## PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

**5.** Să se dezvolte în serie Fourier următoarele funcţii:

a) $f(x) = x^3, \ x \in [-l, l]$; b) $f(x) = e^{ax}, \ x \in [-\pi, \pi], \ a = const. \neq 0$;

c) $f(x) = \operatorname{ch} ax, \ x \in [-\pi, \pi], \ a \in I\!\!R^*$; d) $f(x) = \operatorname{sh} ax, \ x \in [-\pi, \pi], \ a \in I\!\!R^*$.

**6.** Să se dezvolte în serie Fourier următoarele funcţii:

a) $f : [-\pi, \pi] \to I\!\!R, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [-\pi, -\pi + b), \\ -a, & \text{dacă } x \in [-\pi + b, -b], \\ 0, & \text{dacă } x \in (-b, b), \\ a, & \text{dacă } x \in [b, \pi - b], \\ 0, & \text{dacă } x \in (\pi - b, \pi], \ 0 < 2b < \pi. \end{cases}$

b) $f : [-\pi, \pi] \to I\!\!R, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [-\pi, -c), \\ a, & \text{dacă } x \in [-c, c], \\ 0, & \text{dacă } x \in (c, \pi], \ 0 < c < \pi. \end{cases}$

c) $f : [-\pi, \pi] \to I\!\!R, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [-\pi, -c), \\ \frac{a}{c}(x + c), & \text{dacă } x \in [-c, 0), \\ \frac{a}{c}(c - x), & \text{dacă } x \in [0, c], \\ 0, & \text{dacă } x \in (c, \pi], \ 0 < c < \pi, \end{cases}$

(vezi Figura 2.4.4).

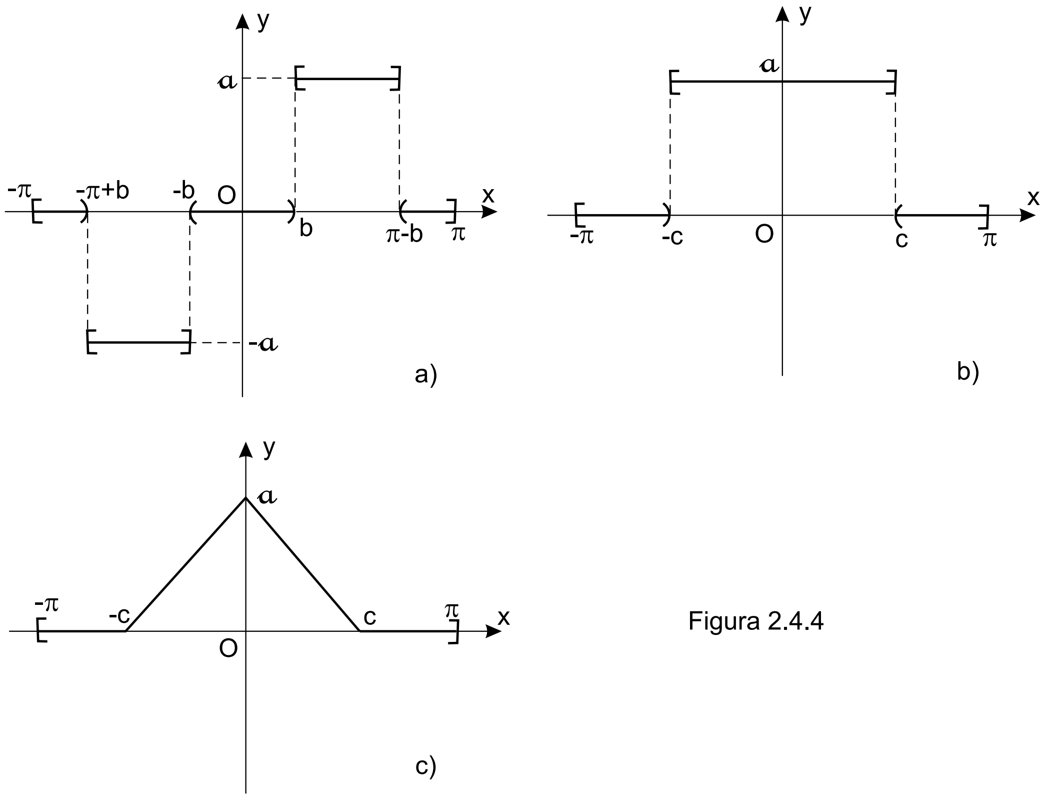


Figura 2.4.4

**7.** Să se dezvolte în serie de cosinusuri următoarele funcţii:

a) $f:[0,\pi]\to I\!R,\ \ f(x)=\sin ax,\ \ a\in I\!R^*.$

b) $f:[0,\pi]\to I\!R,\ \ f(x)=\begin{cases} \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}, & \text{dacă } x\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right),\\ 0, & \text{dacă } x\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right),\\ -\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}, & \text{dacă } x\in\left(\dfrac{2\pi}{3},\pi\right],\\ \dfrac{\pi}{4\sqrt{3}}, & \text{dacă } x=\dfrac{\pi}{3},\\ -\dfrac{\pi}{4\sqrt{3}}, & \text{dacă } x=\dfrac{2\pi}{3}.\end{cases}$

**8.** Să se dezvolte în serie de sinusuri următoarele funcţii:

a) $f:[0,\pi]\to I\!R,\ \ f(x)=\begin{cases} 0, & \text{dacă } x\in[0,a],\\ 1, & \text{dacă } x\in(a,\pi],\ \ 0<a<\pi.\end{cases}$

b) $f:[0,\pi]\to I\!R,\ \ f(x)=\begin{cases} \dfrac{\pi x}{2\sqrt{3}}, & \text{dacă } x\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right],\\ \dfrac{\pi^2}{6\sqrt{3}}, & \text{dacă } x\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right),\\ \dfrac{\pi(\pi-x)}{2\sqrt{3}}, & \text{dacă } x\in\left[\dfrac{2\pi}{3},\pi\right].\end{cases}$

# Capitolul 3

# INTEGRALE IMPROPRII ŞI INTEGRALE CU PARAMETRI

## §1. INTEGRALE IMPROPRII

### 1. Integrale pe intervale infinite (integrale improprii de primul tip)

Fie $f : [a, +\infty) \to I\!R$ o funcţie integrabilă pe orice interval $[a, A]$, $A > a$. Numim *integrala* funcţiei $f$ pe intervalul nemărginit $[a, \infty)$ sau *integrala improprie de primul tip*:

$$\lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)\,dx \overset{not}{=} \int_a^\infty f(x)\,dx,$$

atunci când limita de mai sus există (finită sau infinită). Dacă limita este finită spunem că funcţia $f$ este *integrabilă* pe $[a, \infty)$ sau spunem că integrala $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este *convergentă*. Dacă limita de mai sus nu există sau este infinită spunem că $f$ nu este integrabilă pe $[a, \infty)$ sau că $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este *divergentă*.

Analog se introduc integralele:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{B\to-\infty} \int_B^b f(x)\,dx \quad \text{şi} \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{\substack{A\to\infty\\ B\to-\infty}} \int_B^A f(x)\,dx.$$

Să considerăm în continuare cazul $f : [a, \infty) \to I\!R$, integrabilă pe $\forall\,[a, A]$, $A > a$.

**Teorema 3.1.1.** Dacă $f$ admite o primitivă $F$ pe intervalul $[a, \infty)$ atunci:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty} F(A) - F(a).$$

**Teorema 3.1.2 (Cauchy).** Funcţia $f$ este integrabilă pe $[a, \infty)$ dacă şi numai dacă:

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,A_0(\varepsilon) > a \text{ a.î. } \forall\,A'' > A' > A_0(\varepsilon) \ \Rightarrow \ \left|\int_{A'}^{A''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Notăm cu $\Phi(A) = \int_a^A f(x)\,dx$.

**Teorema 3.1.3.** a) Integrala $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă dacă şi numai dacă $\forall\,(A'_n)_{n\in I\!N}$, $A'_n \to \infty$, $n \to \infty$, şirul $(\Phi(A'_n))_{n\in I\!N}$ converge la $l$ ($l$ fiind valoarea integralei).

b) Integrala $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă dacă şi numai dacă $\forall\,(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_n\to\infty$, $n\to\infty$, şir crescător, şirul $(\Phi(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge la $l$.

**Consecinţa 3.1.1.** Integrala $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă dacă şi numai dacă $\forall\,(A_n)_n$, $A_n\to\infty$, $n\to\infty$, şir crescător, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)\,dx$ este o serie convergentă.

Dacă funcţia $f$ este nenegativă ($f(x)\ge 0,\ \forall\,x\in[a,\infty)$) atunci, deoarece $\Phi(A)$ este crescătoare, integrala $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă dacă şi numai dacă $\exists\,(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_n\to\infty$, $n\to\infty$, şir crescător, astfel încât $\Phi(A_n)\to l$. O altă caracterizare în cazul în care $f$ este nenegativă este următoarea: $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă dacă şi numai dacă $\exists\,(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_n\to\infty$, $n\to\infty$, şir crescător, astfel încât seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)\,dx$ să fie convergentă.

**Teorema 3.1.4.** Dacă integrala $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ este convergentă atunci şi $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă.

Spunem că integrala $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este *absolut convergentă* dacă $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ este convergentă. Spunem că integrala $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este *simplu convergentă* sau *semi-convergentă* sau *condiţionat convergentă* dacă $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă, dar $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ este divergentă.

*Proprietăţi.* Fie $f,\ g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ două funcţii integrabile pe $[a,A]$, $\forall\,A>a$.

a) Dacă $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă şi $\int_a^\infty g(x)\,dx$ este convergentă atunci $\int_a^\infty (f(x)+$ $+g(x))\,dx$ este şi ea convergentă şi are loc egalitatea:

$$\int_a^\infty (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^\infty f(x)\,dx+\int_a^\infty g(x)\,dx.$$

b) Dacă $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă şi $c\in\mathbb{R}$ atunci $\int_a^\infty cf(x)\,dx$ este convergentă şi are loc egalitatea:

$$\int_a^\infty cf(x)\,dx=c\int_a^\infty f(x)\,dx.$$

**Criterii de absolută convergenţă**

I) *Criteriul de comparaţie cu mărginire.* Fie $f,\ g:[a,\infty)\to\mathbb{R}_+$, $f,\ g\in\mathcal{R}_{[a,A]}$, $\forall\,A>a$. Dacă $f(x)\le g(x),\ \forall\,x\in[a,\infty)$ atunci:

a) dacă $\int_a^\infty g(x)\,dx$ (C) $\Rightarrow\int_a^\infty f(x)\,dx$ (C);

b) dacă $\int_a^\infty f(x)\,dx$ (D) $\Rightarrow\int_a^\infty g(x)\,dx$ (D).

II) *Criteriul de comparaţie cu limită.* Fie $f,\ g:[a,\infty)\to\mathbb{R}_+$, $f,\ g\in\mathcal{R}_{[a,A]}$, $\forall\,A>a$. Dacă $\exists\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\varrho$ atunci:

a) dacă $\varrho \in (0,\infty)$ atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ şi $\int_a^\infty g(x)\,dx$ au aceeaşi natură;

b) dacă $\varrho = 0$ atunci $\begin{cases} \text{dacă } \int_a^\infty g(x)\,dx \text{ (C)} \Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ (C);} \\ \text{dacă } \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ (D)} \Rightarrow \int_a^\infty g(x)\,dx \text{ (D).} \end{cases}$

c) dacă $\varrho = \infty$ atunci $\begin{cases} \text{dacă } \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ (C)} \Rightarrow \int_a^\infty g(x)\,dx \text{ (C);} \\ \text{dacă } \int_a^\infty g(x)\,dx \text{ (D)} \Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ (D).} \end{cases}$

III) *Criteriul în* $\alpha$ (forma cu inegalităţi). Fie $f : [a,\infty) \to I\!R_+$, $f \in \mathcal{R}_{[a,A]}$, $\forall\, A > a$.

a) Dacă $\exists\, \alpha \in I\!R$, $\alpha > 1$ şi $K > 0$ a.î. $x^\alpha f(x) \le K$, $\forall\, x \in [a,\infty)$ atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ (C).

b) Dacă $\exists\, \alpha \in I\!R$, $\alpha \le 1$ şi $K > 0$ a.î. $x^\alpha f(x) \ge K$, $\forall\, x \in [a,\infty)$ atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ (D).

III') *Criteriul în* $\alpha$ (forma cu limită). Fie $f : [a,\infty) \to I\!R_+$, $f \in \mathcal{R}_{[a,A]}$, $\forall\, A > a$.

a) Dacă $\exists\, \alpha \in I\!R$, $\alpha > 1$ a.î. $\exists \lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = l \in [0,\infty)$ atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ (C).

b) Dacă $\exists\, \alpha \in I\!R$, $\alpha \le 1$ a.î. $\exists \lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = l \in (0,\infty]$ atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ (D).

IV) *Criteriul integral (Mac-Laurin–Cauchy).* Fie $f : [1,\infty) \to I\!R_+$, descrescătoare pe $[1,\infty)$. Atunci $\int_1^\infty f(x)\,dx$ are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$.

**Criterii de convergenţă**

I) *Criteriul lui Abel.* Fie $f,\, g : [a,\infty) \to I\!R$. Dacă:

a) integrala $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă;

b) funcţia $g$ este monotonă şi mărginită pe $[a,\infty)$

atunci $\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ este convergentă.

II) *Criteriul lui Dirichlet.* Fie $f,\, g : [a,\infty) \to I\!R$. Dacă:

a) $f \in \mathcal{R}_{[a,A]}$, $\forall\, A > a$ şi $\Phi(A) = \int_a^A f(x)\,dx$ este mărginită pe $[a,\infty)$;

b) funcţia $g$ este monoton descrescătoare pe $[a,\infty)$ cu $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$

atunci $\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ este convergentă.

**2. Integrale din funcţii nemărginite (integrale improprii de tipul al doilea).**

Fie $f : [a,b) \to I\!R$ o funcţie nemărginită în vecinătatea punctului $b$, integrabilă pe orice interval $[a,t]$, $a < t < b$. Numim *integrală improprie de al doilea tip* pe intervalul necompact $[a,b)$:

$$\lim_{\substack{t\to b\\ t<b}} \int_a^t f(x)\,dx \overset{not}{=} \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{(se mai notează } \int_a^{b-0} f(x)\,dx\text{)}$$

atunci când limita de mai sus există (finită sau infinită). Dacă limita este finită spunem că $\int_a^b f(x)\,dx$ este *convergentă* sau că $f$ este *integrabilă* pe intervalul necompact $[a,b)$. Dacă limita de mai sus este infinită sau nu există spunem că funcţia $f$ nu este integrabilă pe $[a,b)$ sau că $\int_a^b f(x)\,dx$ este *divergentă.*

Analog se introduc integralele:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{u\to a\\ u>a}} \int_u^b f(x) \quad \text{şi} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{t\to b,\, t<b\\ u\to a\, u>a}} \int_u^t f(x)\,dx$$

pentru o funcţie nemărginită în vecinătatea punctului $a$, respectiv pentru o funcţie nemărginită în vecinătatea punctelor $a$ şi $b$.

Să considerăm o funcţie $f:[a,b)\to I\!R$, $f\in\mathcal{R}_{[a,t]}$, $\forall\, t\in(a,b)$.

**Teorema 3.1.5 (Cauchy).** Funcţia $f:[a,b)\to I\!R$ este integrabilă pe $[a,b)$ dacă şi numai dacă:

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, t_\varepsilon\in(a,b)\ \text{ a.î. } \forall\, t',\, t'' \text{ cu } t_\varepsilon<t'<t''<b \Rightarrow \left|\int_{t'}^{t''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

**Teorema 3.1.6.** Dacă $\int_a^b |f(x)|\,dx$ este convergentă atunci $\int_a^b f(x)\,dx$ este şi ea convergentă.

În mod asemănător integralelor improprii de primul tip, se defineşte absoluta convergenţă a integralelor improprii de al doilea tip. Proprietăţile de mai sus de la integralele pe intervale infinite rămân valabile şi pentru integralele din funcţii nemărginite.

Pentru studiul convergenţei sau divergenţei integralelor improprii de al doilea tip avem criterii asemănătoare: de comparaţie cu mărginire, de comparaţie cu limită, criteriul lui Abel, criteriul lui Dirichlet. În locul criteriului în $\alpha$ avem criteriul în $\lambda$:

$\widetilde{\text{III}}$) *Criteriul în* $\lambda$ (forma cu inegalităţi). Fie $f:[a,b)\to I\!R_+$, $f\in\mathcal{R}_{[a,t]}$, $\forall\, t\in(a,b)$.

a) Dacă $\exists\,\lambda\in I\!R,\ 0<\lambda<1$ şi $K>0$ a.î. $(b-x)^\lambda f(x)\le K,\ \forall\, x\in[a,b)$ atunci $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă.

b) Dacă $\exists\,\lambda\in I\!R,\ \lambda\ge 1$ şi $K>0$ a.î. $(b-x)^\lambda f(x)\ge K,\ \forall\, x\in[a,b)$ atunci $\int_a^b f(x)\,dx$ este divergentă.

$\widetilde{\text{III}}$') *Criteriul în* $\lambda$ (forma cu limită). Fie $f:[a,b)\to I\!R_+$, $f\in\mathcal{R}_{[a,t]}$, $\forall\, t\in(a,b)$.

a) Dacă $\exists\,\lambda\in I\!R,\ 0<\lambda<1$ a.î. $\exists \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}}(b-x)^\lambda f(x)=l\in[0,\infty)$ atunci $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă.

b) Dacă $\exists\,\lambda\in I\!R,\ \lambda\ge 1$ a.î. $\exists \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}}(b-x)^\lambda f(x)=l\in(0,\infty]$ atunci $\int_a^b f(x)\,dx$ este divergentă.

*Metode de calcul a integralelor improprii de primul tip şi de al doilea tip*

**Teorema 3.1.7** (Formula integrării prin părţi). Fie $f,\ g : [a,b) \to I\!R$ cu $b \in I\!R,\ \ b > a$ sau $b = \infty$. Dacă $f$ şi $g$ sunt derivabile, cu derivatele continue pe $[a,b)$,

$$\exists \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)g(x) \quad \text{şi este finită,}$$

atunci existenţa uneia dintre integralele:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx, \qquad \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

antrenează existenţa celeilalte şi are loc în acest caz egalitatea:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

**Teorema 3.1.8** (Formula schimbării de variabilă). Dacă $f : [a,b) \to I\!R$, $b \in I\!R$, $b > a$ sau $b = \infty$, este continuă pe $[a,b)$ şi $\varphi : [\alpha,\beta) \to [a,b)$ cu $\beta \in I\!R$, $\beta > \alpha$ sau $\beta = \infty$, o funcţie cu proprietăţile:

a) $\varphi$ este strict crescătoare pe $[\alpha,\beta)$;

b) $\varphi$ este derivabilă cu derivata continuă pe $[\alpha,\beta)$;

c) $\varphi(\alpha) = a$, iar $\lim\limits_{\substack{\tau\to\beta\\ \tau<\beta}} \varphi(\tau) = b$,

atunci convergenţa uneia dintre integralele $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ sau $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$ antrenează convergenţa celeilalte integrale şi are loc egalitatea:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

## PROBLEME REZOLVATE

**1.** Folosind definiţia, să se cerceteze convergenţa integralelor:
a) $I = \displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos x\,dx,\ \ a > 0;$ b) $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}.$

**Rezolvare.** a) Funcţia $f(x) = e^{-ax}\cos x$ este integrabilă pe $\forall\,[0,A],\ \ A > 0$ şi:

$$\int_0^A e^{-ax}\cos x\,dx = \int_0^A e^{-ax}(\sin x)'\,dx = e^{-ax}\sin x\Big|_0^A + a\int_0^A e^{-ax}\sin x\,dx =$$

$$= e^{-aA}\sin A - a\int_0^A e^{-ax}(\cos x)'\,dx = e^{-aA}\sin A - ae^{-ax}\cos x\Big|_0^A - a^2\int_0^A e^{-ax}\cos x\,dx =$$

$$= e^{-aA}\sin A - ae^{-aA}\cos A + a - a^2 I.$$

Rezultă: $I = \dfrac{1}{1+a^2}\left(e^{-aA}\sin A - ae^{-aA}\cos A + a\right).$

Deoarece: $\exists \lim\limits_{A\to\infty}\displaystyle\int_0^A e^{-ax}\cos x\,dx = \frac{a}{1+a^2}$, deducem că integrala $I$ este convergentă şi $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos x\,dx = \frac{a}{1+a^2}.$

b) Funcţia $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$ este integrabilă pe $\forall\,[0,a],\ \ a > 0$ şi:

$$\int_0^a \frac{dx}{x^3+1} = \int_0^a \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)}.$$

Descompunem fracţia de mai sus în fracţii simple:

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \Rightarrow Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx + C = 1 \Rightarrow$$

$A+B=0,\ \ -A+B+C+0,\ \ A+C=1$. Obţinem $A=\dfrac{1}{3},\ \ B=-\dfrac{1}{3},\ \ C=\dfrac{2}{3}$. Deci:

$$\int_0^a \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int_0^a \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int_0^a \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x+1|\Big|_0^a - \frac{1}{6}\int_0^a \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^a \frac{dx}{x^2-x+1} = \frac{1}{3}\ln(a+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)\Big|_0^a + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Bigg|_0^a =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{(a+1)^2}{a^2-a+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2a-1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Deoarece $\exists \lim\limits_{a\to\infty}\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x^3+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ rezultă că integrala $I$ este convergentă şi $I =$ $= \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

**2.** Să se cerceteze care dintre integralele următoare sunt sau nu convergente:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^5+1}$; b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-1}}$; c) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx$; d) $\displaystyle\int_1^\infty xe^{-2x}\sin x\,dx$;

e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin 2x}{x^p}\,dx,\ \ p>0$; f) $\displaystyle\int_0^\infty \sin x\,dx$; g) $\displaystyle\int_0^\infty x\cos x\,dx$.

**Rezolvare.** a) Deoarece $f(x)>0,\ \ \forall\, x\in[0,\infty)$, $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)^5\cdot f(x)=1$, iar integrala $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^5}$ este convergentă:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^5} = \lim_{A\to\infty}\int_0^A \frac{dx}{(x+1)^5} = \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{4(x+1)^4}\Bigg|_0^A\right) = \lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4(A+1)^4}\right) = \frac{1}{4},$$

rezultă, conform criteriului de comparaţie că integrala $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^5+1}$ este convergentă.

b) Deoarece $f\geq 0,\ \ \lim\limits_{x\to\infty} x\cdot f(x) = 1\ \ (\alpha=1)$, rezultă, conform criteriului în $\alpha$, că integrala este divergentă.

c) Deoarece $|f(x)| = |e^{-x}\sin x| \leq e^{-x},\ \ \forall\, x\in[0,\infty)$ şi integrala:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-x}\,dx = \lim_{A\to\infty}\left(-e^{-x}\Big|_0^A\right) = \lim_{A\to\infty}(1-e^{-A}) = 1,$$

este convergentă rezultă, conform criteriului de comparaţie cu mărginire, că integrala $\displaystyle\int_0^\infty |e^{-x}\sin x|\,dx$ este convergentă, deci integrala $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx$ este absolut convergentă.

d) Avem: $|f(x)| = |xe^{-2x}\sin x| \leq xe^{-2x},\ \ \forall\, x\in[1,\infty)$. Apoi integrala:

$$\int_1^\infty xe^{-2x}\,dx = \lim_{A\to\infty}\int_1^A xe^{-2x}\,dx = \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{2}xe^{-2x}\Big|_1^A + \frac{1}{2}\int_1^A e^{-2x}\,dx\right) =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{2}Ae^{-2A} + \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{4}e^{-2A} + \frac{1}{4}e^{-2}\right) = \frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{4}e^{-2} = \frac{3}{4}e^{-2}$$

fiind convergentă, rezultă că integrala din enunţ $\displaystyle\int_1^\infty xe^{-2x}\sin x\,dx$ este absolut conver-

gentă.

e) Dacă $p > 1$, deoarece $\left|\dfrac{\sin 2x}{x^p}\right| \leq \dfrac{1}{x^p}$, $\forall\, x \in [1,\infty)$, iar integrala $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ este convergentă, rezultă că integrala din enunţ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin 2x}{x^p}\,dx$ este absolut convergentă.

Dacă $0 < p \leq 1$ aplicăm criteriul lui Dirichlet. Considerăm $f(x) = \sin 2x$, iar $g(x) = \dfrac{1}{x^p}$. Avem:

$$\int_1^A f(x)\,dx = \int_1^A \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_1^A = \frac{1}{2}\cos 1 - \frac{1}{2}\cos 2A,$$

deci $\left|\displaystyle\int_1^A f(x)\,dx\right| \leq 1$, iar $g$ este o funcţie monoton descrescătoare cu $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$. Rezultă atunci că integrala $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin 2x}{x^p}\,dx$ este convergentă. Vom arăta în continuare că această integrală nu este absolut convergentă, adică integrala $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\sin 2x|}{x^p}\,dx$ este divergentă. Avem inegalitatea:

$$\frac{|\sin 2x|}{x^p} \geq \frac{\sin^2 2x}{x^p},\ \ \forall\, x \in [1,\infty).$$

Deoarece:

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 2x}{x^p}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1-\cos 4x}{x^p}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} - \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\cos 4x}{x^p}\,dx$$

este divergentă, fiind diferenţa dintre o integrală divergentă $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ şi una convergentă $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos 4x}{x^p}\,dx$ (după cum rezultă din criteriul lui Dirichlet: $f(x) = \cos 4x$,

$\displaystyle\int_1^A f(x)\,dx = \int_1^A \cos 4x\,dx = \frac{1}{4}\sin 4x\Big|_1^A = \frac{1}{4}\sin 4A - \frac{1}{4}\sin 4$ şi $\left|\displaystyle\int_1^A f(x)\,dx\right| \leq \dfrac{1}{2}$,

$\forall\, A \in [1,\infty)$, iar $g(x) = \dfrac{1}{2x^p}$ este monoton descrescătoare cu $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$), rezultă că şi integrala $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\sin 2x|}{x^p}\,dx$ este divergentă, conform criteriului de comparaţie cu mărginire. Deducem astfel că în acest caz $0 < p \leq 1$ integrala $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin 2x}{x^p}\,dx$ este simplu convergentă.

f) Un calcul simplu: $\displaystyle\int_0^A \sin x\,dx = 1 - \cos A$ ne arată că $\nexists \lim\limits_{A\to\infty}\displaystyle\int_0^A \sin x\,dx$, deci integrala $\displaystyle\int_0^\infty \sin x\,dx$ este divergentă.

g) Ca şi la punctul f) putem calcula rapid:

$$\int_0^A x\cos x\,dx = \int_0^A x(\sin x)'\,dx = x\sin x\Big|_0^A - \int_0^A \sin x\,dx = A\sin A + \cos A - 1,$$

care nu are limită pentru $A \to \infty$. Rezultă că integrala $\displaystyle\int_0^\infty x\cos x\,dx$ este divergentă.

**3.** Să se cerceteze natura următoarelor integrale şi în caz de convergenţă să se calculeze valoarea lor:

a) $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^2+x-2}$, $a > 1$; b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x^2)^n}$, $n \in I\!N$, $n > 1$; c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$;

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^5\,dx}{(1+x^3)^3}$; e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2x+1)\sqrt{2a^2x+1}}$, $a \neq 0$; f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$;

g) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-3x}\cos 2x\,dx$; h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3}\cdot e^{-x}\sin x\,dx$.

**Rezolvare.** a) Deoarece $f \geq 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\cdot x^2 = 1$, $(\alpha = 2 > 1)$, rezultă conform criteriului în $\alpha$ că integrala $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^2+x-2}$ este convergentă.

Avem: $\displaystyle\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right]$. Deci:

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^2+x-2} = \left(\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2|\right)\Big|_a^\infty = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\Big|_a^\infty = -\frac{1}{3}\ln\frac{a-1}{a+2} =$$
$$= \frac{1}{3}\ln\frac{a+2}{a-1}.$$

b) Avem: $f \geq 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\cdot(x+1)^{2n-1} = 1$, $(\alpha = 2n-1 > 1)$ şi $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^{2n-1}}$ este convergentă. Rezultă conform criteriului de comparaţie cu limită că integrala din enunţ este şi ea convergentă şi:

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(x^2+1)^n} = -\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2(n-1)}.$$

c) Avem: $f \geq 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\cdot x^{3/2} = 1$, $\left(\alpha = \dfrac{3}{2} > 1\right)$. Rezultă, conform criteriului în $\alpha$, forma cu limită, că $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ este convergentă. Pentru a o calcula facem schimbarea de variabilă $\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2$, $dx = 2t\,dt$, $x = 1 \Rightarrow t = 1$, $x \to \infty \Rightarrow t \to \infty$. Obţinem:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int_1^\infty \frac{2t\,dt}{(1+t^2)t} = \int_1^\infty \frac{2\,dt}{1+t^2} = 2\,\mathrm{arctg}\,t\Big|_1^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

d) Deoarece $f \geq 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\cdot(x+1)^4 = 1$, iar $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^4}$ este convergentă, rezultă că integrala din enunţ este şi ea convergentă. Pentru a calcula valoarea sa facem schimbarea de variabilă $x^3 = t \Rightarrow 3x^2\,dx = dt$, $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x \to \infty \Rightarrow t \to \infty$. Obţinem:

$$\int_0^\infty \frac{x^5\,dx}{(1+x^3)^3} = \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{t\,dt}{(1+t)^3} = \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^2} - \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^3} = -\frac{1}{3(t+1)}\Big|_0^\infty +$$
$$+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(t+1)^2}\Big|_0^\infty = \frac{1}{6}.$$

e) Avem $f \geq 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\cdot(x+1)^{3/2} = 1$ şi $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^{3/2}}$ este convergentă. Rezultă că integrala $I$ din enunţ este convergentă. Notăm $2a^2x+1 = t^2 \Rightarrow 2a^2\,dx = 2t\,dt$. Obţinem:

$$I = \frac{1}{a^2}\int_1^\infty \frac{t\,dt}{\left(a^2\frac{t^2-1}{2a^2}+1\right)\cdot t} = \frac{2}{a^2}\int_1^\infty \frac{dt}{t^2+1} = \frac{2}{a^2}\mathrm{arctg}\,t\Big|_1^\infty = \frac{\pi}{2a^2}.$$

f) Avem $f \geq 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\cdot(x+1)^4 = 1$, iar $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^4}$ este convergentă. Rezultă

că integrala $I$ din enunţ este convergentă şi:

$$I=\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2}=\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1)}.$$

Descompunem fracţia $\dfrac{1}{x^4+1}$ în fracţii simple:

$$\frac{1}{(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1)}=\frac{Ax+B}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x\sqrt{2}+1}\Rightarrow$$

$Ax^3+Ax^2\sqrt{2}+Ax+Bx^2+Bx\sqrt{2}+B+Cx^3-Cx^2\sqrt{2}+Cx+Dx^2-D\sqrt{2}x+D=1\Rightarrow$

$A+C=0,\ \ A\sqrt{2}+B-C\sqrt{2}+D=0,\ \ A+B\sqrt{2}+C-D\sqrt{2}=0,\ \ B+D=1.$

Rezultă $A=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\ \ B=\dfrac{1}{2},\ \ C=\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\ \ D=\dfrac{1}{2}$. Deci:

$$I=\int_0^\infty\left(\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right)dx=\lim_{A\to\infty}\int_0^A\left(-\frac{x-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}(x^2-x\sqrt{2}+1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{x+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}(x^2+x\sqrt{2}+1)}\right)dx=\lim_{A\to\infty}\int_0^A\left(-\frac{2x-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{4\sqrt{2}(x^2-x\sqrt{2}+1)}+\frac{2x+\sqrt{2}+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}(x^2+x\sqrt{2}+1)}\right)dx=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\left[-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)\Big|_0^A+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)\Big|_0^A+\frac{1}{4}\int_0^A\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\int_0^A\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\right]=\lim_{A\to\infty}\left[\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{A^2+A\sqrt{2}+1}{A^2-A\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\Big|_0^A+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\Big|_0^A\right]=\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{A^2+A\sqrt{2}+1}{A^2-A\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}A-1)-\right.$$

$$\left.-\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}(-1)+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}A+1)-\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}1\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

g) Deoarece $|e^{-3x}\cos 2x|\le e^{-3x},\ \ \forall\, x\in[0,\infty)$, iar integrala $\displaystyle\int_0^\infty e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_0^\infty=$ $=\dfrac{1}{3}$ este convergentă, rezultă că integrala din enunţ este absolut convergentă. Avem:

$$I=\int_0^\infty e^{-3x}\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-3x}(\sin 2x)'\,dx=\frac{1}{2}e^{-3x}\sin 2x\Big|_0^\infty+\frac{3}{2}\int_0^\infty e^{-3x}\sin 2x\,dx=$$

$$=-\frac{3}{4}\int_0^\infty e^{-3x}(\cos 2x)'\,dx=-\frac{3}{4}e^{-3x}\cos 2x\Big|_0^\infty-\frac{9}{4}\int_0^\infty e^{-3x}\cos 2x\,dx=\frac{3}{4}-\frac{9}{4}I.$$

Rezultă $I=\dfrac{3}{13}$.

h) Deoarece $|f(x)|\le\dfrac{x^2+3x+3}{(x+1)^3}e^{-x},\ \ \forall\, x\in[0,\infty)$, iar $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3}e^{-x}\,dx$ este convergentă (conform criteriului de comparaţie cu limită:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3}e^{-x}\cdot(x+1)^2=0\quad\text{şi}\quad\int_0^\infty\frac{dx}{(x+1)^2}\ \text{este convergentă})$$

rezultă că integrala din enunţ este absolut convergentă.

Pentru a calcula integrala $I$ dată, o vom descompune în trei integrale, fiecare dintre

ele fiind absolut convergentă:

$$I=\int_0^\infty \frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3}e^{-x}\sin x\,dx=\int_0^\infty \frac{(x+1)^2+(x+1)+1}{(x+1)^3}e^{-x}\sin x\,dx=$$

$$=\underbrace{\int_0^\infty \frac{e^{-x}\sin x}{x+1}\,dx}_{I_1}+\underbrace{\int_0^\infty \frac{e^{-x}\sin x}{(x+1)^2}\,dx}_{I_2}+\underbrace{\int_0^\infty \frac{e^{-x}\sin x}{(x+1)^3}\,dx}_{I_3}.$$

Avem:

$$I_3=\int_0^\infty \frac{e^{-x}\sin x}{(x+1)^3}\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)'\cdot e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{e^{-x}\sin x}{2(x+1)^2}\Big|_0^\infty+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^2}\cdot[-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x]\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-x}(\cos x-\sin x)}{(x+1)^2}\,dx.$$

Rezultă că:

$$I_2+I_3=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-x}(\sin x+\cos x)}{(x+1)^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(\frac{1}{x+1}\right)'\cdot e^{-x}(\sin x+\cos x)\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-x}}{x+1}(\sin x+\cos x)\Big|_0^\infty+\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{x+1}\cdot e^{-x}(-\sin x-\cos x+\cos x-\sin x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}-\int_0^\infty \frac{e^{-x}\sin x}{x+1}\,dx.$$

Deci: $I_2+I_3=\dfrac{1}{2}-I_1$. Rezultă că $I=I_1+I_2+I_3=\dfrac{1}{2}$.

**4.** Să se arate că:

a) $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(x+a)(x+b)^2}=\begin{cases}\dfrac{1}{(a-b)^2}\left(a\ln\dfrac{a}{b}-a+b\right), & \text{dacă } a\neq b,\\[2mm] \dfrac{1}{2a}, & \text{dacă } a=b.\end{cases}$$

b) $$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)(x^2+b^2)}=\frac{1}{b(a^2+b^2)}\left(\frac{\pi}{2}a-b\ln\frac{a}{b}\right);$$

c) $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(x+a)(x^2+b^2)}=\frac{1}{a^2+b^2}\left(\frac{\pi}{2}b+a\ln\frac{a}{b}\right),$$

unde $a>0,\ \ b>0$.

**Rezolvare.** Integralele de mai sus sunt convergente.

a) Pentru $a\neq b$ descompunem fracţia $\dfrac{x}{(x+a)(x+b)^2}$ în fracţii simple:

$$\frac{x}{(x+a)(x+b)^2}=\frac{A}{x+a}+\frac{B}{x+b}+\frac{C}{(x+b)^2}$$

$\Rightarrow x=Ax^2+2Abx+Ab^2+Bx^2+Bax+Bbx+Bab+Cx+Ca$

$\Rightarrow A+B=0,\ \ 2Ab+Ba+Bb+C=1,\ \ Ab^2+Bab+Ca=0\ \ \Rightarrow A=-\dfrac{a}{(a-b)^2},\ \ B=$
$=\dfrac{a}{(a-b)^2},\ \ C=-\dfrac{b}{(a-b)}$.

Rezultă atunci:

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(x+a)(x+b)^2}=\int_0^\infty\left[-\frac{a}{(a-b)^2(x+a)}+\frac{a}{(a-b)^2(x+b)}-\frac{b}{(a-b)}\cdot\frac{1}{(x+b)^2}\right]dx=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left\{\int_0^t \frac{-a}{(a-b)^2}\left[\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right]dx-\frac{b}{(a-b)}\int_0^t\frac{dx}{(x+b)^2}\right\}=$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left\{-\frac{a}{(a-b)^2}\ln\frac{x+a}{x+b}\bigg|_0^t + \frac{b}{(a-b)(x+b)}\bigg|_0^t\right\} = \frac{a}{(a-b)^2}\ln\frac{a}{b} - \frac{b}{(a-b)b} =$$
$$= \frac{1}{(a-b)^2}\left(a\ln\frac{a}{b} - a + b\right).$$

Dacă $a = b$ atunci $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(x+a)^3} = \int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)^2} - a\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)^3} = -\frac{1}{x+a}\bigg|_0^\infty +$
$$+\frac{a}{2(x+a)^2}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{2a}.$$

b) Avem: $\displaystyle\frac{1}{(x+a)(x^2+b^2)} = \frac{A}{x+a} + \frac{Bx+C}{x^2+b^2} \Rightarrow 1 = Ax^2 + b^2A + Bx^2 + Bax +$
$+Cx + Ca \Rightarrow A + B = 0,\ \ Ba + C = 0,\ \ Ab^2 + Ca = 1 \Rightarrow A = \dfrac{1}{a^2+b^2},\ \ B = -\dfrac{1}{a^2+b^2},$
$C = \dfrac{a}{a^2+b^2}.$

Rezultă astfel:
$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)(x^2+b^2)} = \int_0^\infty \left[\frac{1}{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{x+a} - \frac{1}{a^2+b^2}\cdot\frac{x-a}{x^2+b^2}\right]dx =$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{a^2+b^2}\ln(x+a) - \frac{1}{2(a^2+b^2)}\ln(x^2+b^2) + \frac{a}{b(a^2+b^2)}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}\right]\bigg|_0^t =$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{a^2+b^2}\ln\frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}}\bigg|_0^t + \frac{a}{b(a^2+b^2)}\operatorname{arctg}\frac{t}{b}\right] = -\frac{1}{a^2+b^2}\ln\frac{a}{b} + \frac{\pi a}{2b(a^2+b^2)} =$$
$$= \frac{1}{b(a^2+b^2)}\left(\frac{\pi}{2}a - b\ln\frac{a}{b}\right).$$

c) Avem: $\displaystyle\frac{x}{(x+a)(x^2+b^2)} = \frac{A}{x+a} + \frac{Bx+C}{x^2+b^2} \Rightarrow x = Ax^2 + b^2A + Bx^2 + Bax +$
$+Cx + Ca \Rightarrow A + B = 0,\ \ Ba + C = 1,\ \ Ab^2 + Ca = 0 \Rightarrow A = -\dfrac{a}{a^2+b^2},\ \ B = \dfrac{a}{a^2+b^2},$
$C = \dfrac{b^2}{a^2+b^2}.$

Obţinem atunci:
$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(x+a)(x^2+b^2)} = \int_0^\infty \left[-\frac{a}{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{x+a} + \frac{1}{a^2+b^2}\cdot\frac{ax+b^2}{x^2+b^2}\right]dx =$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{a}{a^2+b^2}\ln(x+a) + \frac{a}{2(a^2+b^2)}\ln(x^2+b^2) + \frac{b^2}{b(a^2+b^2)}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}\right]\bigg|_0^t =$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{a}{a^2+b^2}\ln\frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} + \frac{b}{a^2+b^2}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}\right]\bigg|_0^t = \frac{a}{a^2+b^2}\ln\frac{a}{b} + \frac{b}{a^2+b^2}\cdot\frac{\pi}{2} =$$
$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left(\frac{\pi}{2}b + a\ln\frac{a}{b}\right).$$

**5.** Să se calculeze integrala:
$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4 - 2x^2\cos 2\alpha + 1},\ \ \alpha \neq \frac{k\pi}{2}$$
şi apoi să se deducă valorile integralelor:

a) $\displaystyle I_1 = \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4+1}$; b) $\displaystyle I_2 = \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4-x^2+1}$; c) $\displaystyle I_3 = \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4+x^2+1}$.

**Rezolvare.** Deoarece $f \geq 0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)\cdot x^2 = 1$ $(\alpha = 2 > 1)$ rezultă că integrala $I(\alpha)$ este convergentă. Avem:

$x^4 - 2x^2\cos 2\alpha + 1 = x^4 + 1 + 2x^2 - 2x^2(1+\cos 2\alpha) = (x^2+1)^2 - 4x^2\cos^2\alpha =$
$= (x^2 - 2x\cos\alpha + 1)(x^2 + 2x\cos\alpha + 1)$.

Descompunem fracţia $\dfrac{x^2}{x^4 - 2x^2\cos 2\alpha + 1}$ în fracţii simple:

$$\frac{x^2}{x^4 - 2x^2\cos 2\alpha + 1} = \frac{Ax+B}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} + \frac{Cx+D}{x^2 + 2x\cos\alpha + 1}$$

$\Rightarrow$ $Ax^3 + 2Ax^2\cos\alpha + Ax + Bx^2 + 2Bx\cos\alpha + B + Cx^3 - 2Cx^2\cos\alpha + Cx + Dx^2 -$
$-2Dx\cos\alpha + D = x^2 \Rightarrow A + C = 0$, $2A\cos\alpha + B - 2C\cos\alpha + D = 1$, $A + 2B\cos\alpha + C -$
$-2D\cos\alpha = 0$, $B + D = 0$.

Obţinem: $A = \dfrac{1}{4\cos\alpha}$, $B = 0$, $C = -\dfrac{1}{4\cos\alpha}$, $D = 0$. Deci:

$$I(\alpha) = \frac{1}{4\cos\alpha}\lim_{\substack{A\to\infty\\ B\to-\infty}}\left[\int_B^A \frac{x\,dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} - \int_B^A \frac{x\,dx}{x^2 + 2x\cos\alpha + 1}\right] =$$

$$= \frac{1}{8\cos\alpha}\lim_{\substack{A\to\infty\\ B\to-\infty}}\left[\int_B^A \frac{2x - 2\cos\alpha}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}\,dx - \int_B^A \frac{2x + 2\cos\alpha}{x^2 + 2x\cos\alpha + 1}\,dx + \right.$$

$$\left. +2\cos\alpha\int_B^A \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} + 2\cos\alpha\int_B^A \frac{dx}{x^2 + 2x\cos\alpha + 1}\right] =$$

$$= \frac{1}{8\cos\alpha}\ln\frac{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}{x^2 + 2x\cos\alpha + 1}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{4\sin\alpha}\operatorname{arctg}\frac{x - \cos\alpha}{\sin\alpha}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{4\sin\alpha}\operatorname{arctg}\frac{x + \cos\alpha}{\sin\alpha}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} =$$

$$= \frac{\pi}{2\sin\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2}.$$

Atunci:

a) pentru $\alpha = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow I_1 = I\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$;

b) pentru $\alpha = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow I_2 = I\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4 - x^2 + 1} = \pi$;

c) pentru $\alpha = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow I_3 = I\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

**6.** Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$, $a, b > 0$; b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{a + b\cos x + c\sin x}$, $a^2 > b^2 + c^2$;

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{a - b\cos x}\,dx$, $a > b > 0$.

**Rezolvare.** a) Pentru calculul integralei, vom descompune intervalul $[0, 2\pi]$ în intervale de lungime $\pi/2$. Obţinem:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}.$$

În a doua integrală de mai sus facem schimbarea de variabilă $x - \pi = y$. Rezultă:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} + \int_0^{\pi} \frac{dy}{a^2\cos^2 y + b^2\sin^2 y} = 2\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} + 2\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}.$$

În a doua integrală din expresia de mai sus facem schimbarea de variabilă $x - \dfrac{\pi}{2} = y$. Rezultă:

$$I = 2\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} + 2\int_0^{\pi/2} \frac{dy}{a^2\sin^2 y + b^2\cos^2 y} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} +$$
$$+ 2\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}.$$

În integralele de mai sus facem schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x \to \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t \to \infty$. Obţinem astfel integrale improprii de primul tip, convergente. Rezultă deci:

$$I = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{a^2\frac{1}{1+t^2} + b^2\frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} + 2\int_0^{\infty} \frac{1}{a^2\frac{t^2}{1+t^2} + \frac{b^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} =$$
$$= 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{a^2 + b^2t^2} + 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{b^2 + a^2t^2} = \frac{2}{b^2} \cdot \frac{b}{a} \operatorname{arctg} \frac{tb}{a}\Big|_0^{\infty} + \frac{2}{a^2} \cdot \frac{a}{b} \operatorname{arctg} \frac{ta}{b}\Big|_0^{\infty} = \frac{2\pi}{ab}.$$

b) Presupunem $a$, $b$, $c > 0$; celelalte cazuri se tratează în mod asemănător. Facem schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$, $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x \to \pi \Rightarrow t \to \infty$. Obţinem o integrală de primul tip convergentă:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{a + b\frac{1-t^2}{1+t^2} + c\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} = 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{(a-b)t^2 + 2ct + (a+b)} =$$
$$= \frac{2}{a-b}\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + \frac{2c}{a-b}t + \frac{c^2}{(a-b)^2} + \frac{a+b}{a-b} - \frac{c^2}{(a-b)^2}} = \frac{2}{a-b}\int_0^{\infty} \frac{dt}{\left(t + \frac{c}{a-b}\right)^2 + \frac{a^2-b^2-c^2}{(a-b)^2}} =$$
$$= \frac{2}{a-b} \cdot \frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t + \frac{c}{a-b}}{\frac{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}{a-b}}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}} -$$
$$- \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{c}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{c}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\right) =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}{c}.$$

c) Descompunem integrala în:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{a - b\cos x}\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{a - b\cos x}\,dx.$$

În integrala a doua de mai sus facem schimbarea de variabilă $x - \pi = y$. Deci:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{a - b\cos x}\,dx + \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 y}{a + b\cos y}\,dy = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{a - b\cos x}\,dx + \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{a + b\cos x}\,dx.$$

În ultimele două integrale obţinute facem schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt$, $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x \to \pi \Rightarrow t \to \infty$. Obţinem două integrale improprii de primul tip:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}}{a - b\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt + \int_0^{\infty} \frac{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}}{a + b\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= 8\int_0^{\infty} \frac{t^2\,dt}{[(a+b)t^2+a-b]\cdot(t^2+1)^2} + 8\int_0^{\infty} \frac{t^2\,dt}{[(a-b)t^2+a+b]\cdot(t^2+1)^2}.$$

Descompunem în fracţii simple funcţiile de integrat de mai sus, care sunt amândouă de tipul:

$$\frac{t^2}{(1+t^2)^2\cdot(At^2+B)} = \frac{Mt+N}{1+t^2} + \frac{Pt+Q}{(1+t^2)^2} + \frac{Rt+S}{At^2+B} \quad (A \neq B)$$

$\Rightarrow (Mt+N)(1+t^2)(At^2+B) + (Pt+Q)(At^2+B) + (Rt+S)(1+2t^2+t^4) = t^2$

$\Leftrightarrow (Mt+N)(At^2+B+At^4+Bt^2) + PAt^3 + QAt^2 + BPt + BQ + Rt + S + 2Rt^3 + 2St^2 +$
$+ Rt^5 + St^4 = t^2$

$\Leftrightarrow MAt^3 + MBt + AMt^5 + MBt^3 + NAt^2 + NB + NAt^4 + NBt^2 + PAt^3 + QAt^2 + BPt +$
$+ QB + Rt + S + 2Rt^3 + 2St^2 + Rt^5 + St^4 = t^2$

$\Rightarrow AM + R = 0,\ \ NA + S = 0,\ \ MA + MB + PA + 2R = 0,\ \ NA + NB + QA + 2S =$
$= 1,\ \ MB + BP + R = 0,\ \ NB + QB + S = 0.$

Obţinem: $M = 0,\ \ N = \dfrac{B}{(A-B)^2},\ \ P = 0,\ \ Q = \dfrac{1}{A-B},\ \ R = 0,\ \ S = -\dfrac{AB}{(A-B)^2}.$

Deci:

$$\frac{t^2}{(1+t^2)^2(At^2+B)} = \frac{B}{(A-B)^2}\cdot\frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{A-B}\cdot\frac{1}{(1+t^2)^2} - \frac{AB}{(A-B)^2}\cdot\frac{1}{At^2+B}.$$

Rezultă:

$$I = 8\left[\frac{a-b}{4b^2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2} + \frac{1}{2b}\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^2} - \frac{a^2-b^2}{4b^2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{(a+b)t^2+(a-b)}\right] +$$

$$+8\left[\frac{a+b}{4b^2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2} - \frac{1}{2b}\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^2} - \frac{a^2-b^2}{4b^2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{(a-b)t^2+(a+b)}\right] =$$

$$= \frac{4a}{b^2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2} - \frac{8(a^2-b^2)}{4b^2(a+b)}\cdot\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}\cdot \operatorname{arctg} t\cdot\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\Bigg|_0^{\infty} - \frac{8(a^2-b^2)}{4b^2(a-b)}\cdot\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}\cdot \operatorname{arctg} t\times$$

$$\times\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{2a\pi}{b^2} - \frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{b^2}(a-\sqrt{a^2-b^2}).$$

**7.** Să se arate că integrala Euler-Poisson:

$$K = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

este convergentă şi are valoarea $\sqrt{\pi}/2$.

**Rezolvare.** Deoarece $f \geq 0$, $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)^2\cdot e^{-x^2} = 0$ şi $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1}\Bigg|_0^{\infty} = 1$ este convergentă, rezultă conform criteriului de comparaţie cu limită că integrala $K$ este convergentă.

Pentru a calcula această integrală, să considerăm inegalitatea evidentă:

$$1+t < e^t,\ \ \forall\, t \in I\!R\setminus\{0\} \ \ \Leftrightarrow\ \ (1+t)e^{-t} < 1,\ \ \forall\, t \in I\!R\setminus\{0\}.$$

Înlocuind $t = \pm x^2$, $x \in I\!R\setminus\{0\}$, obţinem inegalităţile:

$$(1-x^2)e^{x^2} < 1 \quad \text{şi} \quad (1+x^2)e^{-x^2} < 1.$$

Vom considera prima inegalitate de mai sus doar pe intervalul $(0,1)$, iar a doua pe intervalul $(0,\infty)$. Deci:

$$1-x^2<e^{-x^2},\ \forall x\in(0,1)\quad \text{şi}\quad e^{-x^2}<\frac{1}{1+x^2},\ \forall x\in(0,\infty).$$

Ridicăm la puterea $n$ inegalităţile obţinute:

$$(1-x^2)^n<e^{-nx^2},\ \forall x\in(0,1)\quad \text{şi}\quad e^{-nx^2}<\frac{1}{(1+x^2)^n},\ \forall x\in(0,\infty),$$

iar pe acestea din urmă le integrăm pe intervalul $(0,1)$, respectiv $(0,\infty)$. Obţinem:

$$\int_0^1(1-x^2)^n\,dx<\int_0^1 e^{-nx^2}\,dx<\int_0^\infty e^{-nx^2}\,dx<\int_0^\infty\frac{dx}{(1+x^2)^n}. \tag{3.1.1}$$

Pentru integrala $\int_0^\infty e^{-nx^2}\,dx$ facem schimbarea de variabilă $\sqrt{n}x=y$. Găsim:

$$\int_0^\infty e^{-nx^2}\,dx=\int_0^\infty e^{-y^2}\frac{dy}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}K. \tag{3.1.2}$$

Apoi în integrala $\int_0^1(1-x^2)^n\,dx$ facem schimbarea de variabilă $x=\cos t$. Rezultă:

$$\int_0^1(1-x^2)^n\,dx=\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}t\,dt=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \tag{3.1.3}$$

conform {Capitolul 1, §2, Problema 15}. În integrala $\int_0^\infty\frac{dx}{(1+x^2)^n}$ facem schimbarea de variabilă $x=\operatorname{ctg}t$; obţinem:

$$\int_0^\infty\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-2}t\,dt=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}. \tag{3.1.4}$$

Obţinem astfel din (3.1.1)–(3.1.4) şirul de inegalităţi:

$$\sqrt{n}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<K<\sqrt{n}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Ridicând la pătrat inegalităţile de mai sus, obţinem:

$$n\cdot\frac{[(2n)!!]^2}{[(2n+1)!!]^2}<K^2<n\cdot\frac{[(2n-3)!!]^2}{[(2n-2)!!]^2}\cdot\frac{\pi^2}{4}\quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2\cdot(2n+1)}<K^2<\frac{n}{2n-1}\cdot\frac{[(2n-3)!!]^2(2n-1)}{[(2n-2)!!]^2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2. \tag{3.1.5}$$

Utilizând formula lui Wallis:

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}$$

(vezi {Capitolul 1, §2, Problema 16}), trecem la limită în (3.1.5). Rezultă:

$$K^2=\frac{\pi}{4}\ \Rightarrow\ K=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ (K>0),$$

deci: $$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

**8.** Pornind de la definiţie să se studieze convergenţa integralelor:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; b) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{x\,\ln^2 x}$.

**Rezolvare.** a) Funcţia de sub semnul integrală $f$ este nemărginită pe $[0,1)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \infty$. Este o integrală improprie de al doilea tip. Avem:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \arcsin x\Big|_0^t = \lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \arcsin t = \frac{\pi}{2}.$$

b) Avem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \infty$. Rezultă:

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x\,\ln^2 x} = \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \int_u^{1/2} \frac{dx}{x\,\ln^2 x} = \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \int_u^{1/2} \frac{(\ln x)'}{\ln^2 x}\,dx = \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \left( -\frac{1}{\ln x}\Big|_u^{1/2} \right) =$$
$$= \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \left( \frac{1}{\ln u} + \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

**9.** Să se cerceteze natura următoarelor integrale:

a) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $0<a<b$; b) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$; c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(\sin x)^p}$, $p\in \mathbb{R}$;

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x)^\alpha\cdot(\cos x)^\beta\,dx$, $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$; e) $\displaystyle\int_0^1 (\ln x)^2\,dx$; f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,dx$;

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x}\,dx$.

**Rezolvare.** Integralele sunt improprii de al doilea tip, funcţiile de sub semnul integrală fiind nemărginite pe intervalele respective.

a) Avem $f(x)\ge 0$, $\forall\, x\in(a,b]$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \infty$, iar:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\cdot(x-a)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2a}},\quad \lambda = \frac{1}{2} < 1.$$

Rezultă conform criteriului în $\lambda$ că integrala este convergentă.

b) Avem: $f(x)>0$, $\forall\, x\in(0,\pi)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)\cdot x^{1/2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}} = 1$, $\lambda = \dfrac{1}{2} < 1$.

Rezultă că integrala $\displaystyle\int_0^{\pi-a} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$, $0<a<\pi$, este convergentă.

Apoi: $\lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ x<\pi}} f(x)\cdot(\pi-x)^{1/2} = \lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ x<\pi}} \dfrac{\sqrt{\pi-x}}{\sqrt{\sin x}} \overset{\pi-x=y}{=} \lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{\sin y}} = 1$, $\lambda = \dfrac{1}{2} < 1$.

Deducem că şi integrala $\displaystyle\int_a^\pi \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$, $0<a<\pi$ este convergentă.

În concluzie integrala $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ este convergentă.

c) Dacă $p>0$, deoarece $f(x)>0$, $\forall\, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)\cdot x^p = 1$ rezultă că

integrala are aceeaşi natură cu integrala $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$. Deducem astfel că pentru $0 < p < 1$ integrala este convergentă, iar pentru $p \geq 1$ integrala este divergentă.

Dacă $p \leq 0$ integrala este o integrală proprie, deci convergentă. În concluzie dacă $p \in (-\infty, 1)$ integrala este convergentă, iar dacă $p \in [1, \infty)$ integrala este divergentă.

d) Dacă $\alpha$, $\beta \geq 0$ integrala este proprie, deci convergentă. Dacă $\alpha < 0$ integrala este improprie în $x = 0$, $f(x) > 0$, $\forall\, x \in (0, \pi/2)$. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)\cdot x^{-\alpha} = 1$, rezultă că integrala $I_1 = \int_0^{\pi/2-a} (\sin x)^\alpha (\cos x)^\beta\, dx$, $0 < a < \pi/2$, are aceeaşi natură cu integrala $\int_0^{\pi/2-a} x^\alpha\, dx$. Deci $I_1$ este convergentă pentru $-\alpha < 1 \Leftrightarrow (0 >)\alpha > -1$ şi este divergentă pentru $-\alpha \geq 1 \Leftrightarrow \alpha \leq -1$.

Dacă $\beta < 0$ integrala este improprie în $x = \frac{\pi}{2}$, $f(x) > 0$, $\forall\, x \in (0, \pi/2)$. Deoarece:

$$\lim_{\substack{x\to \pi/2\\ x<\pi/2}} f(x)\cdot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{-\beta} \overset{\frac{\pi}{2}-x=y}{=} \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} (\cos y)^\alpha \cdot (\sin y)^\beta \cdot y^{-\beta} = 1,$$

rezultă că integrala $I_2 = \int_a^{\pi/2} (\sin x)^\alpha (\cos x)^\beta\, dx$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$, are aceeaşi natură cu integrala $\int_a^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^\beta dx$. Deci $I_2$ este convergentă pentru $-\beta < 1 \Rightarrow -1 < \beta(< 0)$ şi divergentă pentru $-\beta \geq 1 \Leftrightarrow \beta \leq -1$.

Deci în concluzie integrala din enunţ este convergentă dacă $\alpha \in (-1, \infty)$ şi $\beta \in$ $\in (-1, \infty)$, în rest fiind divergentă.

e) Avem $f(x) > 0$, $\forall\, x \in (0, 1)$ şi:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x}\cdot(\ln x)^2 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{2}{x}\ln x}{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{x}} = -4 \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = -4 \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{x}} = 0.$$

Deoarece $\lambda = \frac{1}{2} < 1$, conform criteriului în $\lambda$, rezultă că integrala este convergentă.

f) Integrala este improprie de al doilea tip în $x = 0$, iar funcţia de sub semnul integrală are şi valori nenegative şi valori nepozitive. Să studiem mai întâi absoluta convergenţă a integralei date, adică integrala:

$$I_0 = \int_0^1 \frac{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^\lambda\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right|}{\sqrt{x}} = 0$ pentru $\frac{1}{2} < \lambda < 1$ rezultă că integrala $I_0$ este convergentă, deci integrala din enunţ este absolut convergentă.

g) Să facem schimbarea de variabilă $\frac{1}{x} = y$. Rezultă:

$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x}\, dx = -\int_\infty^1 \frac{\sin y}{\frac{1}{y}}\cdot\frac{1}{y^2}\, dy = \int_1^\infty \frac{\sin y}{y}\, dy = \int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Astfel am transformat integrala improprie de al doilea tip într-o integrală improprie de primul tip.

Integrala $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ este convergentă, după cum rezultă din criteriul lui Dirichlet cu $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \geq 1$. Funcţia $f$ este integrabilă Riemann pe $\forall\,[1, A]$, $A > 1$ şi $\Phi(A) = \int_1^A \sin x\,dx = -\cos A + \cos 1$ este mărginită pe $[1, \infty)$ : $|\Phi(A)| \leq 2$, iar funcţia $g$ este monoton descrescătoare pe $[1, \infty)$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Rezultă deci că integrala $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x}\,dx$ este convergentă. Vom arăta în continuare că această integrală nu este absolut convergentă. Presupunem prin reducere la absurd că integrala este absolut convergentă, adică integrala:

$$\int_0^1 \frac{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}{x}\,dx = \int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx \quad \text{este convergentă.}$$

Dar:

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1-\cos 2x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}\,dx.$$

Deoarece $\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}\,dx$ este convergentă (conform criteriului lui Dirichlet: $f(x) = \cos 2x$, $\Phi(A) = \int_1^A \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_1^A = \frac{1}{2}(\sin 2A - \sin 2)$ şi $|\Phi(A)| \leq 1$, $\forall\,A \geq 1$, iar $g(x) = \frac{1}{x}$ este monoton descrescătoare cu $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$) ar rezulta că şi integrala $\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ ar fi convergentă, ceea ce este absurd. Deci integrala:

$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x}\,dx = \int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

este simplu convergentă.

**10.** Să se cerceteze natura următoarelor integrale şi în caz de convergenţă să se calculeze valoarea lor:

a) $\int_0^1 x\cdot\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$; b) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$; c) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x+2)\sqrt{1-x^2}}$;

d) $\int_0^1 \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{x(1-x)}}$; e) $\int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,dx$, $a < b$; f) $\int_{-1}^1 \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

**Rezolvare.** a) Avem: $f(x) \geq 0$, $\forall\,x \in [0, 1)$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)\cdot(1-x)^{1/2} = 1$, $\lambda = \frac{1}{2} < 1$. Rezultă că integrala este convergentă.

Pentru a o calcula, facem schimbarea de variabilă $x = \sin^2 t \Rightarrow dx = \sin 2t\,dt$. Obţinem:

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\cdot\frac{\sin t}{\cos t}\cdot 2\sin t\cos t\,dt = 2\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)^2\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(1 - 2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2}\right)dt = \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{16}\sin 4t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{8}.$$

b) Deoarece $f(x) > 0,\ \ \forall\, x \in [-1, 1)$ şi:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{(1-x)^{1/2}}{\sqrt{(x-2)(x-1)}} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{(1-x)^{1/2}}{(1-x)^{1/2}\cdot(2-x)^{1/2}} = 1,\ \ \lambda = \frac{1}{2} < 1,$$

rezultă că integrala este convergentă.

Facem schimbarea de variabilă $\sqrt{\dfrac{1-x}{2-x}} = t \Rightarrow \sqrt{(1-x)(2-x)} = t(2-x)$, $x =$ $= \dfrac{2t^2-1}{t^2-1}$, $dx = \dfrac{-2t}{(t^2-1)^2}\,dt$, $x = -1 \Rightarrow t = t_1 = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $x = 1 \Rightarrow t = t_2 = 0$. Rezultă:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{t\left(2 - \frac{2t^2-1}{t^2-1}\right)} \cdot \frac{-2t}{(t^2-1)^2}\,dt = -\int_{t_2}^{t_1} \frac{2\,dt}{t^2-1} = -\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|_{t_2}^{t_1} = \ln\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} =$$

$$= \ln\left(5+2\sqrt{6}\right).$$

c) Avem $f(x) > 0,\ \ \forall\, x \in (-1, 1)$ şi:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{(1-x)^{1/2}}{(x+2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}},\qquad \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{(x+1)^{1/2}}{(x+2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

deci integrala este convergentă.

Facem schimbarea de variabilă $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = t \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = t(1+x)$, $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{-4t\,dt}{(1+t^2)^2}$, $x \to -1 \Rightarrow t \to \infty$, $x \to 1 \Rightarrow t \to 0$. Deci:

$$I = \int_{\infty}^{0} \frac{1}{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+2\right) t \left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{-4t\,dt}{(1+t^2)^2} = 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}}\bigg|_0^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

d) Deoarece $f(x) > 0,\ \ \forall\, x \in (0, 1)$, iar:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^{1/2}(x+2)}{\sqrt{x(1-x)}} = 2,\qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{(1-x)^{1/2}(x+2)}{\sqrt{x(1-x)}} = 3,$$

rezultă că integrala este convergentă.

Facem schimbarea de variabilă $\sqrt{\dfrac{x}{1-x}} = t \Rightarrow \sqrt{x(1-x)} = t(1-x)$, $x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2t\,dt}{(1+t^2)^2}$, $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$, $x \to 1 \Rightarrow t \to \infty$. Obţinem:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\frac{t^2}{1+t^2}+2}{t\left(1-\frac{t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2t\,dt}{(1+t^2)^2} = 2\int_0^{\infty} \frac{3t^2+2}{(t^2+1)^2}\,dt = 4\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+1} + 2\int_0^{\infty} \frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^2} =$$

$$= 4\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+1} - \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{t^2+1}\right)' \cdot t\,dt = 4\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+1} - \frac{t}{t^2+1}\bigg|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= 5 \operatorname{arctg} t\Big|_0^{\infty} = \frac{5\pi}{2}.$$

e) Funcţia $f$ de sub semnul integrală satisface relaţiile: $f(x) \geq 0,\ \ \forall\, x \in [a, b)$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)\cdot(b-x)^{1/2} = \sqrt{b-a}$. Rezultă că integrala este convergentă. Facem schimbarea de variabilă $x = a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi$, $\varphi \in (0, \pi/2)$; $x = a \Rightarrow \varphi = 0$, $x \to b\ (x < b) \Rightarrow \varphi \to$ $\to \pi/2\ (\varphi < \pi/2)$, $dx = (b-a)\sin 2\varphi\, d\varphi$. Obţinem:

$$I=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{b\sin^2\varphi-a\sin^2\varphi}{b\cos^2\varphi-a\cos^2\varphi}}\cdot(b-a)\sin 2\varphi\,d\varphi=\int_0^{\pi/2}2(b-a)\sin^2\varphi\,d\varphi=$$
$$=(b-a)\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi=(b-a)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/2}\right)=\frac{\pi}{2}(b-a).$$

f) Avem $f(x)>0,\ \ \forall x\in(-1,1)$ şi:
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{(1-x)^{1/2}\cdot x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}},\quad \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\frac{(1+x)^{1/2}x\ \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$
Rezultă că integrala este convergentă. Obţinem:
$$I=\int_{-1}^{1}x(\arcsin x)'\arcsin x\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x[(\arcsin x)^2]'\,dx=\frac{1}{2}x(\arcsin x)^2\Big|_{-1}^{1}-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(\arcsin x)^2\,dx=\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(\arcsin x)^2\,dx\overset{\arcsin x=y}{=}\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}y^2\cos y\,dy=\frac{\pi^2}{4}-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}y^2(\sin y)'\,dy=\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{2}y^2\sin y\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}y\sin y\,dy=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{4}-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}y(\cos y)'\,dy=$$
$$=-y\cos y\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos y\,dy=\sin y\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=2.$$

**11.** Să se arate că integrala:
$$I=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^3}}\,dx$$
are sens şi să se afle apoi, prin dezvoltare în serie, valoarea ei.

**Rezolvare.** Deoarece $f(x)\geq 0,\ \ \forall x\in[0,1)$, iar:
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(1-x)^{1/2}\cdot\frac{x}{\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \lambda=\frac{1}{2}<1,$$
rezultă că integrala este convergentă.

Pentru a determina dezvoltarea în serie a funcţiei $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^3}}$ pornim de la dezvoltarea în serie:
$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\frac{1}{2\cdot 1!}x+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^3+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^n+\cdots,\ \ |x|<1,$$
(vezi {Capitolul 2, §3, Problema 15}). Rezultă:
$$\frac{x}{\sqrt{1-x^3}}=x\left(1+\frac{1}{2\cdot 1!}x^3+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^6+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^9+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{3n}+\cdots\right),$$
$\forall x\in(-1,1)$. Integrăm pe $[0,a]$ $(0<a<1)$ seria de puteri de mai sus, termen cu termen. Obţinem:
$$\int_0^a\frac{x}{\sqrt{1-x^3}}\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2\cdot 1!}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{x^8}{8}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\cdot\frac{x^{11}}{11}+\cdots+\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{x^{3n+2}}{3n+2}+\cdots\right)\Big|_0^a\quad\Rightarrow$$

$$\int_0^a\frac{x}{\sqrt{1-x^3}}dx=\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2\cdot 1!}\cdot\frac{a^5}{5}+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{a^8}{8}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\cdot\frac{a^{11}}{11}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{a^{3n+2}}{3n+2}+\cdots.\tag{3.1.6}$$

Seria obţinută mai sus pentru $a=1$:

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{1}{3n+2}$$

este convergentă, după cum rezultă din criteriul lui Raabe-Duhamel. Într-adevăr:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{(2n+2)(3n+5)}{(2n+1)(3n+2)}-1\right]=\frac{3}{2}>1.$$

Deducem astfel că putem trece la limită pentru $a\to 1$ în egalitatea (3.1.6), în membrul drept trecând la limită termen cu termen. Obţinem:

$$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^3}}\,dx=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!\cdot(3n+2)}.$$

**12.** Să se calculeze integralele:

$$I=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx,\quad J=\int_0^{\pi/2}\ln\cos x\,dx.$$

**Rezolvare.** În integrala $J$ facem schimbarea de variabilă $\dfrac{\pi}{2}-x=y$. Obţinem:

$$J=\int_0^{\pi/2}\ln\sin y\,dy=I.$$

Deoarece $-\ln\sin x\geq 0,\ \forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, iar:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{x}\cdot(-\ln\sin x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{-\ln\sin x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{-\cos x\cdot\frac{1}{\sin x}}{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{x}}=2\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{x}\cos x=0,$$

rezultă că integrala $-I$ este convergentă, deci $I$ şi $J(=I)$ sunt şi ele convergente.

Avem:

$$2I=I+J=\int_0^{\pi/2}(\ln\sin x+\ln\cos x)\;dx=\int_0^{\pi/2}\ln\frac{\sin 2x}{2}\,dx=\int_0^{\pi/2}\ln\sin 2x\,dx-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

În ultima integrală obţinută mai sus facem schimbarea de variabilă $2x=y\Rightarrow x=\dfrac{y}{2}$, $dx=\dfrac{dy}{2}$, $x=0\Rightarrow y=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow y=\pi$. Rezultă:

$$2I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin y\,dy-\frac{\pi}{2}\ln 2=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx+\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}\ln\sin x\,dx-\frac{\pi}{2}\ln 2=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\ln\sin y\,dy-\frac{\pi}{2}\ln 2=\frac{1}{2}(I+I)-\frac{\pi}{2}\ln 2=I-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Obţinem astfel: $\quad I=-\dfrac{\pi}{2}\ln 2=J.$

O altă *metodă* pentru calculul integralelor $I$ şi $J$ este următoarea: facem în $I$ schimbarea de variabilă $x=2t$. Rezultă:

$$I=2\int_0^{\pi/4}\ln\sin 2t\,dt=2\ln 2\cdot\frac{\pi}{4}+2\int_0^{\pi/4}\ln\sin t\,dt+2\int_0^{\pi/4}\ln\cos t\,dt.$$

În ultima integrală obţinută mai sus facem schimbarea $\dfrac{\pi}{2}-t=y$. Obţinem:

$$I=\frac{\pi\ln 2}{2}+2\int_0^{\pi/4}\ln\sin t\,dt+2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\sin t\,dt=\frac{\pi\ln 2}{2}+2\left[\int_0^{\pi/4}\ln\sin t\,dt+\right.$$

$$\left.+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\sin t\,dt\right]=\frac{\pi\ln 2}{2}+2\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx.$$

Deci: $I = \dfrac{\pi \ln 2}{2} + 2I$. Rezultă: $I = -\dfrac{\pi}{2}\ln 2 = J$.

**13.** Să se arate că:

a) $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{(x+b)\sqrt{x-a}} = \frac{\pi}{\sqrt{a+b}}$, $a+b>0$;

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{(a^2x^2+b^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{b\sqrt{a^2+b^2}}$, $a,\ b>0$;

c) $\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx = 2\int_0^{\pi/2} f(a\cos^2 t + b\sin^2 t)\,dt$, $a<b$.

**Rezolvare.** a) Integrala dată este o integrală improprie de ambele tipuri. Avem:
$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^{3/2}}{(x+b)\sqrt{x-a}} = 1$, $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$ şi $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{(x-a)^{1/2}}{(x+b)\sqrt{x-a}} = \frac{1}{a+b}$, $\lambda = \dfrac{1}{2} < 1$.
Rezultă că integrala este convergentă.

Notăm $x-a=t^2 \Rightarrow x = a+t^2$, $dx = 2t\,dt$, $x\to a \Rightarrow t\to 0$, $x\to\infty \Rightarrow t\to\infty$. Deci:

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{(t^2+a+b)t}\cdot 2t\,dt = \frac{2}{\sqrt{a+b}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{a+b}}\bigg|_0^\infty = \frac{\pi}{\sqrt{a+b}}.$$

b) Este o integrală improprie de al doilea tip, convergentă deoarece:
$\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{(1-x)^{1/2}}{(a^2x^2+b^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}(a^2+b^2)}$ şi $\displaystyle\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{(1+x)^{1/2}}{(a^2x^2+b^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}(a^2+b^2)}$.
Notăm $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t\,dt$, $x\to -1 \Rightarrow t\to -\pi/2$, $x\to 1\Rightarrow t\to\pi/2$. Obţinem:

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos t\,dt}{(a^2\sin^2 t + b^2)\cos t} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dt}{a^2\sin^2 t + b^2}.$$

În ultima integrală obţinută notăm $\operatorname{tg} t = y \Rightarrow t = \operatorname{arctg} y$, $dt = \dfrac{dy}{1+y^2}$. Rezultă:

$$I = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{a^2\frac{y^2}{1+y^2}+b^2}\cdot\frac{dy}{1+y^2} = \int_{-\infty}^\infty \frac{dy}{(a^2+b^2)y^2+b^2} = \frac{1}{a^2+b^2}\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}\times$$
$$\times\operatorname{arctg}\frac{yb}{\sqrt{a^2+b^2}}\bigg|_{-\infty}^\infty = \frac{\pi}{b\sqrt{a^2+b^2}}.$$

c) Integrala este convergentă:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{(x-a)^{1/2}\cdot f(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \frac{f(a)}{\sqrt{b-a}},\quad \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \frac{(b-x)^{1/2}\cdot f(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \frac{f(b)}{\sqrt{b-a}}.$$

Notăm $x = a\cos^2 t + b\sin^2 t$, $dx = (b-a)\sin 2t\,dt$, $x\to a\Rightarrow t\to 0$, $x\to b\Rightarrow t\to$ $\to \pi/2$. Obţinem:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{f(a\cos^2 t + b\sin^2 t)}{\sqrt{(b\sin^2 t - a\sin^2 t)(b\cos^2 t - a\cos^2 t)}}\cdot(b-a)\sin 2t\,dt =$$
$$= \int_0^{\pi/2} \frac{f(a\cos^2 t + b\sin^2 t)}{(b-a)\sin t\cos t}(b-a)2\sin t\cos t\,dt = 2\int_0^{\pi/2} f(a\cos^2 t + b\sin^2 t)\,dt.$$

**14.** Să se arate că integrala:

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$$
are sens şi că valoarea ei este zero.

**Rezolvare.** Este o integrală improprie de ambele tipuri convergentă. Într-adevăr, deoarece:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{3/2}\ln x}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 0, \quad \alpha = \frac{3}{2} > 1,$$
rezultă că integrala $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ este convergentă.

Apoi din:
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sqrt{x}(-\ln x)}{1+x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{-\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{x}} = 0, \quad \lambda = \frac{1}{2} < 1,$$
rezultă că şi integrala $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-\ln x)}{1+x^2}\,dx$ este convergentă. Deci integrala:
$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = -\int_0^1 \frac{(-\ln x)}{1+x^2}\,dx + \int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$$
este convergentă.

Pentru a calcula integrala de mai sus, o descopunem din nou în:
$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx + \int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx.$$
În prima integrală facem schimbarea de variabilă $\dfrac{1}{x} = y \Rightarrow x = \dfrac{1}{y}$, $dx = -\dfrac{1}{y^2}\,dy$, $x\to 0 \Rightarrow y\to\infty$, $x = 1 \Rightarrow y = 1$. Rezultă:
$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \int_1^\infty \frac{\ln\frac{1}{y}}{1+\frac{1}{y^2}}\cdot\frac{1}{y^2}\,dy = -\int_1^\infty \frac{\ln y}{1+y^2}\,dy.$$
Deci: $\quad I = -\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx + \int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = 0.$

**15.** Să se cerceteze natura următoarelor integrale:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{x^\alpha}\,dx$, $\alpha\in I\!R$; b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^\alpha}\,dx$, $\alpha\in I\!R$;

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2+x^n}\,dx$, $m, n\in I\!R$; d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^p+x^q}$, $p, q\in I\!R$;

e) $\displaystyle\int_1^\infty a^x \sin\frac{1}{x}\,dx$, $a>0$.

**Rezolvare.** a) Integrala din enunţ este:
$$I = -\int_0^{\pi/2} \frac{\ln\frac{1}{\sin x}}{x^\alpha}\,dx = -\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = -I_1, \quad f(x) = \frac{\ln\frac{1}{\sin x}}{x^\alpha} \geq 0, \ \forall\, x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$
Dacă $\alpha < 0$ avem:
$$\lim_{x\to 0} x^{-\alpha}\ln(\sin x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\alpha x^\alpha}\cdot\frac{x}{\sin x} = 0.$$
Rezultă că integrala este o integrală proprie, deci convergentă.

Dacă $\alpha \geq 0$ avem:
$$\lim_{x\to 0} x^\lambda\cdot\frac{-\ln\sin x}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0}\frac{-\ln\sin x}{x^{\alpha-\lambda}} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\cos x}{\sin x}}{(\alpha-\lambda)x^{\alpha-\lambda-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{\alpha-\lambda}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot x^{\lambda-\alpha}.$$

Pentru $0 \leq \alpha < 1$ există $\lambda$, $\alpha < \lambda < 1$ a.î. $\lim\limits_{x\to 0} x^\lambda f(x) = 0$, deci $I_1$ este convergentă, iar $I$ este absolut convergentă. Pentru $\alpha \geq 1$ există $\lambda$, $1 \leq \lambda \leq \alpha$ a.î.:

$$\lim_{x\to 0} x^\lambda f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-\ln \sin x}{x^{\alpha-\lambda}} = \infty,$$

deci $I_1$ şi $I$ sunt divergente.

În concluzie dacă $\alpha < 1$ integrala este absolut convergentă, iar dacă $\alpha \geq 1$ integrala este divergentă.

b) Descompunem integrala dată în:

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^\alpha}\,dx = \underbrace{\int_0^b \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^\alpha}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_b^a \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^\alpha}\,dx}_{I_2} + \underbrace{\int_a^\infty \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^\alpha}\,dx}_{I_3},$$

($I_2$ este proprie, putem lua $b < 1$ şi $a > 1$).

Vom studia separat integralele $I_1$ şi $I_3$. Pentru $I_1$ facem schimbarea de variabilă $\varphi(x) = x + \dfrac{1}{x} = t$, $\varphi$ este strict descrescătoare pe $(0, b]$, derivabilă cu derivata continuă, $x \to 0 \Rightarrow \varphi(0+) \to \infty$, $x = b \Rightarrow \varphi(b) = b + \dfrac{1}{b}$, $\varphi^{-1} : [\varphi(b), \infty) \to (0, b]$, $\varphi^{-1}(t) =$ $= \dfrac{t - \sqrt{t^2-4}}{2}$, $(\varphi^{-1}(t))' = \dfrac{\sqrt{t^2-4} - t}{2\sqrt{t^2-4}}$. Rezultă:

$$I_1 = \int_0^b \frac{\sin \varphi(x)}{x^\alpha}\,dx = \int_\infty^{b+\frac{1}{b}} \frac{\sin t}{\left(\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}\right)^\alpha} \cdot \frac{\sqrt{t^2-4}-t}{2\sqrt{t^2-4}}\,dt =$$

$$= \int_{b+\frac{1}{b}}^\infty \frac{2^{\alpha-1}\sin t}{(t-\sqrt{t^2-4})^{\alpha-1}\cdot\sqrt{t^2-4}} = \int_{b+\frac{1}{b}}^\infty \frac{2^{\alpha-1}\sin t\cdot(t+\sqrt{t^2-4})^{\alpha-1}}{4^{\alpha-1}\cdot\sqrt{t^2-4}} =$$

$$= \frac{1}{2^{\alpha-1}} \int_{b+\frac{1}{b}}^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t^2-4}} \cdot (t+\sqrt{t^2-4})^{\alpha-1}\,dt.$$

Dacă $\alpha \leq 0$ integrala $I_1$ este proprie, deci convergentă. Dacă $0 < \alpha < 2$ atunci $I_1$ este convergentă, după cum rezultă din criteriul lui Dirichlet. Într-adevăr considerând $f(t) = \sin t$ şi $g(t) = \dfrac{(t+\sqrt{t^2-4})^{\alpha-1}}{\sqrt{t^2-4}}$ avem:

$$\Phi(A) = \int_{b+\frac{1}{b}}^A f(t)\,dt = -\cos t\Big|_{b+\frac{1}{b}}^A = \cos\left(b+\frac{1}{b}\right) - \cos A, \quad |\Phi(A)| \leq 2, \ \ \forall\, A \geq b + \frac{1}{b},$$

iar $g$ este monoton descrescătoare la 0 pentru $t \to \infty$, deoarece $\alpha < 2$. Dacă $\alpha \geq 2$ integrala $I_1$ transformată mai sus este divergentă. Se foloseşte criteriul lui Cauchy şi anume se arată că:

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \ \text{ a.î. } \forall\, A_0 > b + \frac{1}{b} \ \exists\, A',\ A'',\ A'' > A' > A_0 \ \text{ a.î. } \left|\int_{A'}^{A''} h(x)\,dx\right| \geq \varepsilon_0,$$

unde $h(x) = \dfrac{\sin x\cdot(x+\sqrt{x^2-4})^{\alpha-1}}{\sqrt{x^2-4}}$.

Pentru $I_3$ facem schimbarea $\psi(x) = x + \dfrac{1}{x} = t$, $\psi$ este strict crescătoare pe $[a, \infty)$, derivabilă cu derivata continuă, $\psi^{-1} : [\psi(a), \infty) \to [a, \infty)$, $x \to \infty \Rightarrow t \to \infty$, $x = a \Rightarrow$

$t = a + \dfrac{1}{a}$, $\psi^{-1}(t) = \dfrac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$, $[\psi^{-1}(t)]' = \dfrac{\sqrt{t^2-4}+t}{2\sqrt{t^2-4}}$. Rezultă:

$$I_3 = \int_a^\infty \frac{\sin\psi(x)}{x^\alpha}\,dx = \int_{a+\frac{1}{a}}^\infty \frac{\sin t}{\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}\right)^\alpha}\cdot\frac{\sqrt{t^2-4}+t}{2\sqrt{t^2-4}}\,dt =$$

$$= 2^{\alpha-1}\int_{a+\frac{1}{a}}^\infty \frac{\sin t}{(t+\sqrt{t^2-4})^{\alpha-1}\cdot\sqrt{t^2-4}}\,dt.$$

Pentru studiul acestei integrale aplicăm criteriul lui Dirichlet în cazul $\alpha > 0$. Considerăm $f(t) = \sin t$,

$$\Phi(A) = \int_{a+\frac{1}{a}}^A \sin t\,dt = -\cos t\Big|_{a+\frac{1}{a}}^A = \cos\left(a+\frac{1}{a}\right) - \cos A,\quad |\Phi(A)| \le 2,\ \ \forall\, A > a + \frac{1}{a},$$

iar $g(t) = \dfrac{1}{(t+\sqrt{t^2-4})^{\alpha-1}\sqrt{t^2-4}}$ este monoton descrescătoare la 0, pentru $t \to \infty$. Rezultă că dacă $\alpha > 0$ $I_3$ este convergentă. Dacă $\alpha \le 0$ $I_3$ este divergentă, conform criteriului lui Cauchy:

$$\exists\,\varepsilon_0 \text{ a.î. } \forall\, A_0 > a + \frac{1}{a},\ \ \exists\, A',\, A'',\ \ A'' > A' > A_0 \text{ a.î. } \left|\int_{A'}^{A''}\widetilde{h}(x)\,dx\right| \ge \varepsilon_0,$$

unde $\widetilde{h}(x) = \dfrac{\sin x\,(x+\sqrt{x^2-4})^{1-\alpha}}{\sqrt{x^2-4}}$.

În concluzie integrala $I$ este convergentă dacă $0 < \alpha < 2$, în rest ea este divergentă.

Pentru a studia absoluta convergenţă a integralei date vom studia absoluta convergenţă a integralelor:

$$\bar{I}_1 = \int_c^\infty \frac{\sin t}{(t+\sqrt{t^2-4})^{1-\alpha}\cdot\sqrt{t^2-4}}\,dt \quad \text{şi} \quad \bar{I}_2 = \int_c^\infty \frac{\sin t}{(t+\sqrt{t^2-4})^{\alpha-1}\cdot\sqrt{t^2-4}}\,dt,$$

$c > 2$. Ştim de mai sus că $\bar{I}_1$ este convergentă pentru $\alpha < 2$, iar $\bar{I}_2$ este convergentă pentru $\alpha > 0$.

Pentru $\bar{I}_1$ avem:

$$\bar{I}_{01} = \int_c^\infty \frac{|\sin t|}{(t+\sqrt{t^2-4})^{1-\alpha}\cdot\sqrt{t^2-4}}\,dt \ge \int_c^\infty \frac{\sin^2 t}{(t+\sqrt{t^2-4})^{1-\alpha}\cdot\sqrt{t^2-4}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_c^\infty \frac{dt}{(t+\sqrt{t^2-4})^{1-\alpha}\cdot\sqrt{t^2-4}} - \frac{1}{2}\int_c^\infty \frac{\cos 2t}{(t+\sqrt{t^2-4})^{1-\alpha}\cdot\sqrt{t^2-4}}\,dt = I_4 + I_5.$$

Deoarece $I_4$ este divergentă pentru $\alpha \ge 1$, iar $I_5$ este convergentă pentru $\alpha < 2$, rezultă că $\bar{I}_{01}$ este divergentă pentru $2 > \alpha \ge 1$. Pentru $\alpha < 1$ avem:

$$\frac{|\sin t|}{(t+\sqrt{t^2-4})^{1-\alpha}\cdot\sqrt{t^2-4}} \le \frac{1}{(t+\sqrt{t^2-4})^{1-\alpha}\cdot\sqrt{t^2-4}},$$

iar $\displaystyle\int_c^\infty \frac{dt}{(t+\sqrt{t^2-4})^{1-\alpha}\cdot\sqrt{t^2-4}}$ este convergentă. Deci $\bar{I}_1$ este absolut convergentă pentru $\alpha < 1$ şi simplu convergentă pentru $1 \le \alpha < 2$.

Pentru $\bar{I}_2$ avem:

$$\bar{I}_{02} = \int_c^\infty \frac{|\sin t|}{(t+\sqrt{t^2-4})^{\alpha-1}\cdot\sqrt{t^2-4}}\,dt \ge \int_c^\infty \frac{\sin^2 t}{(t+\sqrt{t^2-4})^{\alpha-1}\cdot\sqrt{t^2-4}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_c^\infty \frac{dt}{(t+\sqrt{t^2-4})^{\alpha-1}\cdot\sqrt{t^2-4}} - \frac{1}{2}\int_c^\infty \frac{\cos 2t}{(t+\sqrt{t^2-4})^{\alpha-1}\cdot\sqrt{t^2-4}}\,dt = I_6 + I_7.$$

Deoarece $I_6$ este divergentă pentru $\alpha \leq 1$, iar $I_7$ este convergentă pentru $\alpha > 0$, rezultă că $\bar{I}_{02}$ este divergentă pentru $0 < \alpha \leq 1$. Pentru $\alpha > 1$ avem:

$$\frac{|\sin t|}{(t+\sqrt{t^2-4})^{\alpha-1}\cdot\sqrt{t^2-4}} \leq \frac{1}{(t+\sqrt{t^2-4})^{\alpha-1}\cdot\sqrt{t^2-4}},$$

iar integrala $\displaystyle\int_c^\infty \frac{dt}{(t+\sqrt{t^2-4})^{\alpha-1}\cdot\sqrt{t^2-4}}$ este convergentă. Deci $\bar{I}_2$ este absolut convergentă pentru $\alpha > 1$ şi simplu convergentă pentru $0 < \alpha \leq 1$.

Deducem în final că integrala iniţială $I$ nu este absolut convergentă pentru nici o valoare a lui $\alpha$.

c) Funcţia de sub semnul integrală este $f(x) = \dfrac{x^m \cdot \operatorname{arctg} x}{2 + x^n} > 0, \ \forall x \in (0, \infty)$.

*Cazul I* : $m > 0, \ n > 0$. Avem o integrală improprie de primul tip. Deoarece:

$$L = \lim_{x\to\infty} x^\alpha \cdot \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2 + x^n} = \frac{\pi}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{x^{m+\alpha}}{2+x^n}$$

este finit pentru $m + \alpha \leq n \Leftrightarrow \alpha \leq n - m$, deducem:

· dacă $n - m > 1$ integrala $I$ este convergentă.

· dacă $n - m = 1$ atunci $L = \dfrac{\pi}{2}$ pentru $\alpha = 1$, deci integrala $I$ este divergentă.

· dacă $n - m < 1$ atunci $\exists\, \alpha, \ n - m < \alpha < 1$ a.î. $L = \infty$, deci integrala $I$ este divergentă.

Deci pentru $n - m > 1$ integrala $I$ este convergentă, iar pentru $n - m \leq 1$ integrala $I$ este divergentă.

*Cazul II* : $m < 0, \ n > 0$. Avem o integrală improprie de ambele tipuri. În $x = 0$ avem:

$$l = \lim_{x\to 0} x^\lambda \cdot x^m \frac{\operatorname{arctg} x}{2 + x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{\lambda+m+1}}{2}$$

finit pentru $\lambda + m + 1 \geq 0$. Rezultă:

· dacă $m > -2$ atunci $\exists\,\lambda, \ -m-1 \leq \lambda < 1$ a.î. $l =$ finit, deci integrala $I_1 = \displaystyle= \int_0^a f(x)\,dx$ $(a > 0)$ este convergentă.

· dacă $m = -2$ atunci pentru $\lambda = 1$ rezultă $l = \dfrac{1}{2}$, deci $I_1$ este divergentă.

· dacă $m < -2$ atunci $\exists\,\lambda, \ -m-1 > \lambda > 1$ a.î. $m + 2 < \lambda + m + 1 < 0$, deci $l = \infty$, iar $I_1$ este divergentă.

Deci pentru $m > -2$ integrala $I_1$ este convergentă, iar pentru $m \leq -2$ integrala $I_1$ este divergentă.

Pentru $x \to \infty$ avem:

$$L = \lim_{x\to\infty} x^\alpha \cdot \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2 + x^n} = \frac{\pi}{2}\lim_{x\to\infty} x^{\alpha+m-n}$$

finit pentru $\alpha + m - n \leq 0$. Rezultă:

$\cdot$ dacă $m - n < -1$ atunci $\exists\, \alpha > 1$ a.î. $L =$ finit, deci $I_2 = \int_a^\infty f(x)\,dx$ $(a > 0)$ este convergentă.

$\cdot$ dacă $m - n = -1$ pentru $\alpha = 1$ rezută $L = \dfrac{\pi}{2}$, deci $I_2$ este divergentă.

$\cdot$ dacă $m - n > -1$ atunci $\exists\, \alpha,\ \ -m + n < \alpha < 1$ a.î. $L = \infty$, deci $I_2$ este divergentă.

Deci pentru $-m + n > 1$ integrala $I_2$ este convergentă, iar pentru $-m + n \leq 1$ integrala $I_2$ este divergentă.

În concluzie pentru $m > -2$ şi $-m + n > 1$ integrala $I$ este convergentă, în rest este divergentă.

*Cazul III* : $m > 0,\ \ n < 0$. Integrala $I$ este:

$$I = \int_0^\infty \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2 + \frac{1}{x^{-n}}}\,dx = \int_0^\infty \frac{x^{m-n} \operatorname{arctg} x}{2x^{-n} + 1},$$

o integrală improprie de primul tip.

Deoarece:

$$L = \lim_{x\to\infty} x^\alpha \cdot \frac{x^{m-n} \operatorname{arctg} x}{2x^{-n} + 1} = \frac{\pi}{4} \lim_{x\to\infty} x^{\alpha+m} = \infty$$

pentru $\alpha \leq 1$, rezultă că în acest caz integrala $I$ este divergentă.

*Cazul IV* : $m < 0,\ \ n < 0$. Integrala:

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{x^{-m}} \cdot \frac{x^{-n}}{2x^{-n} + 1} \cdot \operatorname{arctg} x\,dx$$

este o integrală improprie de ambele tipuri.

În $x = 0$ avem:

$$l = \lim_{x\to 0} x^\lambda \cdot \frac{x^{-n} \cdot x}{x^{-m} \cdot (2x^{-n} + 1)} \cdot \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to 0} x^{\lambda - n + 1 + m}.$$

Rezultă că:

$\cdot$ dacă $m - n > -2$ atunci $\exists\, \lambda,\ \ n - m - 1 < \lambda < 1$ a.î. $l = 0$, deci integrala $I_1 = \int_0^a f(x)\,dx$ $(a > 0)$ este convergentă.

$\cdot$ dacă $m - n = -2$ atunci pentru $\lambda = 1$ rezultă $l = 1$, deci $I_1$ este divergentă.

$\cdot$ dacă $m - n < -2$ atunci $\exists\, \lambda,\ \ n - m - 1 > \lambda > 1$ a.î. $l = \infty$, deci $I_1$ este divergentă.

Deci pentru $m - n > -2$ integrala $I_1$ este convergentă, iar pentru $m - n \leq -2$ integrala $I_1$ este divergentă.

Pentru $x \to \infty$ avem:

$$L = \lim_{x\to\infty} x^\alpha \cdot \frac{x^{-n}}{x^{-m} \cdot (2x^{-n} + 1)} \cdot \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} \cdot \lim_{x\to\infty} x^{\alpha+m}.$$

Rezultă că:

$\cdot$ dacă $m < -1$ atunci $\exists\, \alpha,\ \ 1 < \alpha < -m$ a.î. $L = 0$, deci $I_2 = \int_a^\infty f(x)\,dx$ $(a > 0)$ este convergentă.

· dacă $m=-1$ atunci pentru $\alpha=1$ rezultă $L=\frac{\pi}{4}$, deci $I_2$ este divergentă.

· dacă $m>-1$ atunci $\exists\,\alpha,\ \ -m\leq\alpha<1$ a.î. $L=\infty$, deci $I_2$ este divergentă.

Deci pentru $m<-1$ integrala $I_2$ este convergentă, iar pentru $m\geq-1$ integrala $I_2$ este divergentă.

În concluzie pentru $m-n>-2$ şi $m<-1$ integrala $I$ este convergentă, în rest fiind divergentă.

*Cazul V* : $n=0$. Avem $I=\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^m\operatorname{arctg}x}{3}\,dx$.

a) Dacă $m\geq0$ avem o integrală improprie de primul tip. Deoarece:

$$\lim_{x\to\infty}x^\alpha f(x)=\frac{\pi}{6}\lim_{x\to\infty}x^{\alpha+m}=\infty$$

pentru $\alpha+m>0$ şi $\alpha>1$ rezultă că integrala $I$ este divergentă.

b) Dacă $m<0$ avem o integrală improprie de ambele tipuri.

În $x=0$ avem:

$$l=\lim_{x\to0}x^\lambda\cdot\frac{x^{m+1}}{3}\cdot\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}x^{\lambda+m+1}.$$

Rezultă că:

· dacă $m+2>0$ atunci $\exists\,\lambda,\ \ -m-1<\lambda<1$ a.î. $l=0$, deci integrala $I_1=$ $=\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$ $(a>0)$ este convergentă.

· dacă $m+2=0$ atunci pentru $\lambda=1$ rezultă $l=\frac{1}{3}$, deci $I_1$ este divergentă.

· dacă $m+2<0$ atunci $\exists\,\lambda,\ \ 1<\lambda<-m-1$ a.î. $l=\infty$, deci $I_1$ este divergentă.

Deci pentru $m+2>0$ integrala $I_1$ este convergentă, iar pentru $m+2\leq0$ integrala $I_1$ este divergentă.

Pentru $x\to\infty$ avem:

$$L=\lim_{x\to\infty}x^\alpha\cdot\frac{x^m\operatorname{arctg}x}{3}=\frac{\pi}{6}\lim_{x\to\infty}x^{\alpha+m}.$$

Rezultă că:

· dacă $m<-1$ atunci $\exists\,\alpha,\ \ 1<\alpha<-m$ a.î. $L=0$, deci $I_2=\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ $(a>0)$ este convergentă.

· dacă $m=-1$ atunci pentru $\alpha=1$ rezultă $L=\frac{\pi}{6}$, deci $I_2$ este divergentă.

· dacă $m>-1$ atunci $\exists\,\alpha,\ \ -m<\alpha<1$ a.î. $L=\infty$, deci $I_2$ este divergentă.

Deci pentru $m<-1$ integrala $I_2$ este convergentă, iar pentru $m\geq1$ integrala $I_2$ este divergentă.

În concluzie dacă $-2<m<-1$ integrala $I$ este convergentă, în rest fiind divergentă.

*Cazul VI* : $m=0$. Avem $I=\displaystyle\int_0^\infty\frac{\operatorname{arctg}x}{2+x^n}\,dx$.

ã) Dacă $n\geq0$ integrala $I$ este improprie de primul tip. Avem:

$$L=\lim_{x\to\infty}x^\alpha f(x)=\frac{\pi}{2}\lim_{x\to\infty}x^{\alpha-n}.$$

Rezultă că:

$\cdot$ dacă $n > 1$ atunci $\exists\, \alpha,\;\; 1 < \alpha < n$ a.î. $L = 0$, deci $I$ este convergentă.

$\cdot$ dacă $n = 1$ pentru $\alpha = 1$ rezultă $L = \dfrac{\pi}{2}$, deci $I$ este divergentă.

$\cdot$ dacă $n < 1$ atunci $\exists\, \alpha,\;\; n < \alpha < 1$ a.î. $L = \infty$, deci $I$ este divergentă.

Deci pentru $n > 1$ integrala $I$ este convergentă, iar pentru $n \leq 1$ integrala $I$ este divergentă.

$\tilde{b}$) Dacă $n < 0$ integrala $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{-n} \operatorname{arctg} x}{2x^{-n} + 1}\, dx$ este o integrală improprie de primul tip. Avem:

$$L = \lim_{x \to \infty} x^\alpha \cdot f(x) = \frac{\pi}{4} \lim_{x \to \infty} x^\alpha = \infty \quad \text{pentru} \quad 0 < \alpha < 1,$$

deci $I$ este divergentă.

În concluzie dacă $n > 1$ integrala $I$ este convergentă, în rest fiind divergentă.

*În final* rezultă că integrala este convergentă în următoarele situaţii:

$\cdot\; m > 0,\;\; n > 0,\;\; n - m > 1;$

$\cdot\; m < 0,\;\; n > 0,\;\; n - m > 1,\;\; -m < 2;$

$\cdot\; m < 0,\;\; n < 0,\;\; n - m < 2,\;\; -m > 1;$

$\cdot\; n = 0,\;\; 1 < -m < 2;$

$\cdot\; m = 0,\;\; n > 1$

$\Rightarrow$

$\cdot\; m \geq 0,\;\; n > 0,\;\; n - m > 1;$

$\cdot\; m < 0,\;\; n \geq 0,\;\; n - m > 1,\;\; -m < 2;$

$\cdot\; m < 0,\;\; n < 0,\;\; n - m < 2,\;\; -m > 1$

$\Rightarrow$

$\cdot\; n \geq 0,\;\; n - m > 1,\;\; m > -2;$

$\cdot\; n < 0,\;\; n - m < 2,\;\; m < -1.$

Condiţiile de mai sus se pot scrie sub o formă restrânsă:

$$\text{(a)}\ \max\{-m,\, n - m\} > 1 \quad \text{şi} \quad \text{(b)}\ \min\{-m,\, n - m\} < 2.$$

Deci în condiţiile (a) şi (b) integrala este convergentă, în rest ea este divergentă.

d) Funcţia de sub semnul integrală este $f(x) = \dfrac{1}{x^p + x^q} > 0,\;\; \forall\, x \in (0, \infty)$.

*Cazul I* : $p > 0,\;\; q > 0$. Integrala $I = \displaystyle\int_0^\infty f(x)\, dx$ este convergentă dacă :

$$\max\{p,\, q\} > 1 \;\; (\text{pentru } x \to \infty) \quad \text{şi} \quad \min\{p,\, q\} < 1 \;\; (\text{pentru } x = 0).$$

*Cazul II* : $p > 0,\;\; q < 0$. Avem:

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^p + \frac{1}{x^{-q}}} = \int_0^\infty \frac{x^{-q}}{x^{p-q} + 1}\, dx,$$

o integrală improprie de primul tip, care este convergentă pentru $p - q + q > 1 \Leftrightarrow p > 1$.

*Cazul III* : $p < 0, \ \ q > 0$. Avem:
$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{\frac{1}{x^{-p}} + x^q} = \int_0^\infty \frac{x^{-p}}{1 + x^{q-p}}\, dx,$$
o integrală improprie de primul tip, convergentă pentru $q > 1$.

*Cazul IV* : $p < 0, \ \ q < 0$. Integrala este:
$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{\frac{1}{x^{-p}} + \frac{1}{x^{-q}}} = \int_0^\infty \frac{x^{-p-q}}{x^{-p} + x^{-q}}\, dx,$$
o integrală improprie de primul tip divergentă, deoarece $-p - q - \max\{-p, -q\} > 0$.

*Cazul V* : $p = 0$. Avem $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^q}$. Rezultă:

· dacă $q > 0$ integrala $I$ este convergentă pentru $q > 1$.

· dacă $q = 0$ integrala $I$ este divergentă.

· dacă $q < 0$ integrala $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{-q}}{x^{-q} + 1}\, dx$ este divergentă.

*Cazul VI* : $q = 0$. Avem $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^p + 1}$. Rezultă:

· dacă $p > 0$ integrala $I$ este convergentă pentru $p > 1$.

· dacă $p = 0$ integrala $I$ este divergentă.

· dacă $p < 0$ integrala $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{-p}}{x^{-p} + 1}\, dx$ este divergentă.

În concluzie integrala este convergentă în situaţiile:

· $p > 0, \ \ q > 0, \ \ \max\{p, q\} > 1$ şi $\min\{p, q\} < 1$;

· $p > 0, \ \ q \le 0, \ \ p > 1$;

· $p \le 0, \ \ q > 0, \ \ q > 1$,

condiţii care pot fi scrise comasat astfel:

$$\text{(a) } \max\{p, q\} > 1 \quad \text{şi} \quad \text{(b) } \min\{p, q\} < 1.$$

Deci în condiţiile (a) şi (b) integrala este convergentă, în rest ea este divergentă.

e) Integrala $I = \displaystyle\int_1^\infty a^x \sin\frac{1}{x}\, dx$, $a > 0$ este o integrală improprie de primul tip, funcţia de sub semnul integrală $f(x) = a^x \sin\dfrac{1}{x} > 0, \ \ \forall\, x \in [1, \infty)$.

Dacă $a < 1$ avem:
$$\left|a^x \sin\frac{1}{x}\right| \le a^x, \quad \text{iar} \quad \int_1^\infty a^x\, dx = \left.\frac{a^x}{\ln a}\right|_1^\infty = -\frac{a}{\ln a},$$
deci integrala $I$ este convergentă.

Dacă $a = 1$ integrala $I = \displaystyle\int_1^\infty \sin\frac{1}{x}\, dx$ este divergentă, deoarece $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x} = 1$ $(\lambda = 1)$.

Dacă $a > 1$ atunci $a^x \sin\dfrac{1}{x} > \sin\dfrac{1}{x}$, iar $\displaystyle\int_1^\infty \sin\frac{1}{x}\, dx$ este divergentă. Rezultă că şi în acest caz integrala $I$ este divergentă.

În concluzie pentru $0 < a < 1$ integrala este convergentă, iar pentru $a \geq 1$ integrala este divergentă.

**16.** Să se studieze natura următoarelor integrale şi apoi să se calculeze valoarea lor:

a) $I_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, \quad a > 0, \quad n \in I\!N^*$;

b) $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}, \quad b^2-4ac<0,\ a>0, \quad n \in I\!N^*$;

c) $I_n = \displaystyle\int_0^\infty (\alpha \sin bx \cdot e^{-ax} + \beta \cos bx \cdot e^{-ax})\, dx, \quad a > 0$;

d) $I_n = \displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx, \quad n \in I\!N$.

**Rezolvare.** a) Deoarece $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2n}}{(x^2+a^2)^n} = 1$ şi $2n \geq 2 > 1$ rezultă că integrala este convergentă. Pentru a calcula valoarea sa, vom stabili o relaţie de recurenţă între $I_n$ şi $I_{n-1}$. Avem:

$$I_n = \frac{1}{a^2}\int_0^\infty \frac{a^2+x^2}{(a^2+x^2)^n}\,dx - \frac{1}{a^2}\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{1}{a^2}I_{n-1}+$$

$$+\frac{1}{2(n-1)a^2}\int_0^\infty x\cdot\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right)' dx = \frac{1}{a^2}I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}\Bigg|_0^\infty -$$

$$-\frac{1}{2(n-1)a^2}\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} = \frac{1}{a^2}\left(1-\frac{1}{2(n-1)}\right)I_{n-1} = \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}I_{n-1}.$$

Deci: $\quad I_n = \dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$. Rezultă:

$$I_n = \frac{1}{(a^2)^{n-1}}\cdot\frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 1}{(2n-2)(2n-4)\cdots 2}I_1 = \frac{(2n-3)!!}{a^{2n-2}(2n-2)!!}I_1,$$

unde $I_1 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}\Bigg|_0^\infty = \frac{\pi}{2a}$. Rezultă:

$$I_n = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2a^{2n-1}}.$$

b) Deoarece $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^{2n}}{(ax^2+bx+c)^n} = 1, \quad 2n \geq 2 > 1$ rezultă că integrala este convergentă.

Vom reduce integrala la o integrală de tipul celei de la punctul a). Avem:

$$I_n = \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{a^n\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]^n}.$$

Facem schimbarea de variabilă $x+\dfrac{b}{2a} = t$. Obţinem:

$$I_n = \frac{1}{a^n}\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^n}, \quad \text{unde} \quad \alpha = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}.$$

Deci:

$$I_n = \frac{1}{a^n}\left[\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^n} + \int_0^\infty \frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^n}\right] = \frac{2}{a^n}\int_0^\infty \frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^n} = \frac{2}{a^n}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\times$$

$$\times\frac{\pi\cdot 2^{2n-1}\cdot a^{2n-1}}{2(4ac-b^2)^{(2n-1)/2}}=\frac{2^{2n-1}\cdot\pi\cdot a^{n-1}}{(4ac-b^2)^{(2n-1)/2}}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}.$$

c) Integrala este absolut convergentă, deoarece:

$$|\alpha\sin bx\cdot e^{-ax}+\beta\cos bx\cdot e^{-ax}|\le(|\alpha|+|\beta|)e^{-ax},$$

iar $\displaystyle\int_0^\infty(|\alpha|+|\beta|)e^{-ax}\,dx=-\frac{1}{a}(|\alpha|+|\beta|)e^{-ax}\Big|_0^\infty=\frac{1}{a}(|\alpha|+|\beta|)$ este convergentă.

Avem:

$$I=\alpha\underbrace{\int_0^\infty\sin bx\cdot e^{-ax}\,dx}_{I_1}+\beta\underbrace{\int_0^\infty\cos bx\cdot e^{-ax}\,dx}_{I_2}.$$

Apoi:

$$I_1=-\frac{1}{a}\int_0^\infty\sin bx\cdot(e^{-ax})'\,dx=-\frac{1}{a}\sin bx\cdot e^{-ax}\Big|_0^\infty+\frac{b}{a}\int_0^\infty\cos bx\cdot e^{-ax}\,dx=$$
$$=-\frac{b}{a^2}\int_0^\infty\cos bx\cdot(e^{-ax})'\,dx=-\frac{b}{a^2}\cos bx\cdot e^{-ax}\Big|_0^\infty-\frac{b^2}{a^2}\int_0^\infty\sin bx\cdot e^{-ax}\,dx=$$
$$=\frac{b}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}I_1,$$

de unde rezultă: $\displaystyle I_1=\frac{a^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{b}{a^2}=\frac{b}{a^2+b^2}$.

Iar:

$$I_2=-\frac{1}{a}\int_0^\infty\cos bx\cdot(e^{-ax})'\,dx=-\frac{1}{a}\cos bx\cdot e^{-ax}\Big|_0^\infty-\frac{b}{a}\int_0^\infty\sin bx\cdot e^{-ax}\,dx=$$
$$=\frac{1}{a}+\frac{b}{a^2}\int_0^\infty\sin bx\cdot(e^{-ax})'\,dx=\frac{1}{a}+\frac{b}{a^2}\sin bx\cdot e^{-ax}\Big|_0^\infty-\frac{b^2}{a^2}\int_0^\infty\cos bx\cdot e^{-ax}\,dx=$$
$$=\frac{1}{a}-\frac{b^2}{a^2}I_2,$$

de unde rezultă: $\displaystyle I_2=\frac{a^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{a}=\frac{a}{a^2+b^2}$.

Deci: $\displaystyle I=\frac{\alpha b+\beta a}{a^2+b^2}$.

d) Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}x^\alpha\cdot x^ne^{-x}=0$ pentru $\alpha>1$ rezultă că integrala este convergentă. Deducem o relaţie de recurenţă:

$$I_n=\int_0^\infty x^ne^{-x}\,dx=-\int_0^\infty x^n\cdot(e^{-x})'\,dx=-x^ne^{-x}\Big|_0^\infty+n\int_0^\infty x^{n-1}\cdot e^{-x}\,dx=nI_{n-1}.$$

Rezultă:

$I_n=n(n-1)\cdots 1\,I_0$, unde $\displaystyle I_0=\int_0^\infty e^{-x}\,dx=-e^{-x}\Big|_0^\infty=1$. Deci $I_n=n!$.

## PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

**17.** Să se cerceteze care dintre integralele următoare sunt sau nu convergente:

a) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{dx}{x^3+2}$; b) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$; c) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx$; d) $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\sin x}{x^p}\,dx,\ \ p>0$;

e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^p}\,dx$, $p>0$; f) $\displaystyle\int_0^\infty \cos x\,dx$.

**18.** Să se cerceteze natura următoarelor integrale şi în caz de convergenţă să se calculeze valoarea lor:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$, $a,\,b>0$; b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt{x^3}+x}\,dx$; c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)(x+b)^2}$, $a,\,b>0$;

d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx$; e) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx$, $a,\,b\in I\!R$, $a^2+b^2\neq 0$; f) $\displaystyle\int_{2/\pi}^\infty \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx$;

g) $\displaystyle\int_a^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$, $a>0$; h) $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$, $a>0$; i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x)^4}\,dx$;

j) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{3x^2+1}{(x+1)^2(x^2+2)^2}\,dx$; k) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$; l) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$;

m) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx$, $a,\,b>0$.

**19.** Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b\cos x}$, $a,\,b>0$, $a>b$; b) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{(1+\cos\alpha\cdot\cos x)^2}$, $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$; d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$; e) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{(1+\cos\alpha\cdot\cos x)^2}\,dx$, $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

**20.** Să se cerceteze natura următoarelor integrale:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}$; b) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{b-x}\cdot\sqrt[3]{x-a}}$; c) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)\sqrt{x-a}}$; d) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt[6]{\sin^7 x}}$;

e) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{e^{1+x}}{x^3}\,dx$; f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}\,dx$, $p>0$; g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{x^p}\,dx$, $p>0$.

**21.** Să se cerceteze natura următoarelor integrale:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\ln x}{(1-x^2)^2}\,dx$; b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,\sin ax}{x^2+k^2}\,dx$, $a,\,k>0$; c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^p\cdot(\ln x)^q}$, $p,\,q\in I\!R$;

d) $\displaystyle\int_a^\infty \frac{\sin\beta x}{x^\alpha}$, $a>0$, $\alpha,\,\beta\in I\!R$.

**22.** Să se găsească condiţiile pentru ca integralele:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx$; b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^p}\,dx$; c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{m-1}}{1-x}\,dx$

să fie convergente.

**23.** Să se cerceteze natura următoarelor integrale şi în caz de convergenţă să se calculeze valoarea lor:

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}}\,dx$; b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2-4)\sqrt{x(1-x)}}$; c) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, $a<b$;

d) $\displaystyle\int_a^b x\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,dx$, $a<b$; e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx$; f) $\displaystyle\int_a^b \frac{x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx$; $a<b$;

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)\sqrt{x(1-x)}}$.

**24.** Să se arate că integrala:

$$I = \int_0^\infty \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2}\, dx$$

este convergentă şi că valoarea ei este zero.

**25.** Să se arate că:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{b\ln(1+ax) - a\ln(1+bx)}{x^2}\, dx = ab\ln\frac{b}{a},\quad a,\, b > 0;$

b) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f\left(\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right) dx = 2a\int_0^{\pi/2} f(\operatorname{tg} t)\cdot \sin 2t\, dt,\quad a > 0;$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin t)\, dt.$

**26.** Să se studieze natura următoarelor integrale şi apoi să se calculeze valoarea lor:

a) $\displaystyle I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}\, dx,\quad b^2-4ac<0,\quad a>0,\quad n\in I\!N,\quad n\geq 2,\quad p\neq 0;$

b) $\displaystyle I_n = \int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)\cdots(x+n)},\quad n \in I\!N^*;$

c) $\displaystyle I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\, dx,\quad n\in I\!N.$

**27.** Să se arate că:

$$\int_0^{\pi/2} x \operatorname{ctg} x\, dx = \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

# §2. INTEGRALE PROPRII ŞI IMPROPRII DEPINZÂND DE PARAMETRI

## 1. Integrale proprii depinzând de parametri

Fie funcţiile $\varphi,\ \psi : E \to I\!R,\ E \subset I\!R^n$ satisfăcând condiţia $\varphi(\vec{x}) \leq \psi(\vec{x}),\ \forall\,\vec{x}\in E$ şi funcţia $(\vec{x}, y) \to f(\vec{x}, y) \in I\!R,\ (\vec{x}, y) \in D = \{(\vec{x}, y);\ \varphi(\vec{x}) \leq y \leq \psi(\vec{x}),\ \vec{x}\in E\} \subset I\!R^{n+1}$. Dacă pentru $\forall\,\vec{x} \in E,\ f(\vec{x}, y)$ este integrabilă în raport cu $y$ pe segmentul $[\varphi(\vec{x}),\, \psi(\vec{x})]$ atunci funcţia:

$$\vec{x} \to I(\vec{x}) = \int_{\varphi(\vec{x})}^{\psi(\vec{x})} f(\vec{x}, y)\, dy,\ \ \vec{x}\in E$$

se numeşte *integrală depinzând de parametrii* $x_1,\, x_2, \ldots, x_n$.

În particular dacă $\varphi(\vec{x}) = c,\ \psi(\vec{x}) = d,\ \vec{x}\in E,\ c \leq d$, integrala de mai sus devine:

$$\vec{x} \to J(\vec{x}) = \int_c^d f(\vec{x}, y)\, dy,\ \ \vec{x} \in E.$$

**Teorema 3.2.1.** Fie $\vec{x}_0 \in I\!R^n$ punct de acumulare al mulţimii $E$. Dacă:

$$\exists \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}, y) = \varphi(y),\quad \text{uniform în raport cu } y\in[c,d]$$

atunci funcţia $y \to \varphi(y),\ \ y \in [c, d]$ este integrabilă pe $[c, d]$ şi:

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} J(\vec{x}) = \int_c^d \varphi(y)\,dy.$$

**Consecinţa 3.2.1.** Dacă $E$ este o mulţime compactă, iar funcţiile $\varphi$, $\psi$ şi $f$ sunt continue atunci funcţia $I$ este continuă.

**Teorema 3.2.2.** Dacă $E \subset I\!R^n$ este compactă, $\exists\, \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = \overline{1,n}$ şi sunt continue pe $E \times [c,d]$ atunci $J \in C^1(E)$ şi avem:

$$\frac{\partial J}{\partial x_i}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_c^d f(\vec{x},y)\,dy\right) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x},y)\,dy,\quad i = \overline{1,n}. \tag{3.2.1}$$

**Teorema 3.2.3.** Dacă $E$ este mulţime compactă, $\varphi,\ \psi \in C^1(E)$, există $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = \overline{1,n}$ şi sunt continue pe $E \times [\varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x})]$ atunci $I \in C^1(E)$ şi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial x_i}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\int_{\varphi(\vec{x})}^{\psi(\vec{x})} f(\vec{x},y)\,dy = \int_{\varphi(\vec{x})}^{\psi(\vec{x})} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x},y)\,dy + f(\vec{x},\psi(\vec{x}))\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \\ -f(\vec{x},\varphi(\vec{x}))\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x_i},\quad i = \overline{1,n}.\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Formulele (3.2.1) şi (3.2.2) se numesc *formulele lui Leibniz de derivare* a integralelor depinzând de parametri.

**Teorema 3.2.4.** Fie integrala $I(x) = \displaystyle\int_c^d f(x,y)\,dy$ depinzând de parametrul $x \in$ $\in [a,b]$. Dacă funcţia $(x,y) \to f(x,y) \in I\!R$, $(x,y) \in [a,b]\times[c,d]$, este continuă atunci:

$$\int_a^b I(x)\,dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy \quad \Leftrightarrow$$

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy.$$

## 2. Integrale improprii depinzând de parametri

Fie funcţia $(\vec{x},y) \to f(\vec{x},y) \in I\!R$, $(\vec{x},y) \in E \times [c,d)$, $E \subset I\!R^n$, $-\infty < c < d \le \infty$. Dacă pentru $\forall\,\vec{x} \in E$ integrala improprie $\displaystyle\int_c^d f(\vec{x},y)\,dy$ cu $d$ punct singular ($d = \infty$ sau $f$ nemărginită în vecinătatea lui $d$) este convergentă, atunci funcţia:

$$\vec{x} \to I(\vec{x}) = \int_c^d f(\vec{x},y)\,dy,\quad \vec{x} \in E \tag{3.2.3}$$

se numeşte *integrală improprie depinzând de parametrii* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Dacă:

$$\int_c^y f(\vec{x},t)\,dt \to I(\vec{x}) = \int_c^d f(\vec{x},y)\,dy,$$

pentru $y \to d$, uniform în raport cu $\vec{x} \in E$, atunci funcţia (3.2.3) se numeşte *integrală improprie uniform convergentă* (u.c.) pe $E$.

**Teorema 3.2.5 (Cauchy-Bolzano).** Integrala improprie $\int_c^d f(\vec{x},y)\,dy$ cu $d$ punct singular, depinzând de parametrii $x_1,\, x_2, \ldots, x_n$, este uniform convergentă pe $E$ dacă şi numai dacă:

$$\forall\,\varepsilon > 0\;\; \exists\, y_\varepsilon \in (c,d)\;\; \text{a.î.}\;\; \left|\int_{y'}^{y''} f(\vec{x},y)\,dy\right| < \varepsilon,\;\; \forall\, y',\, y'' \in (y_\varepsilon, d),\;\; \forall\,\vec{x} \in E.$$

*Criterii de convergenţă uniformă a integralelor depinzând de parametri*

**Teorema 3.2.6** (Criteriul lui Weierstrass). Dacă funcţia $f$ satisface condiţia:

$$|f(\vec{x},y)| \le g(y),\;\; \forall\,(\vec{x},y) \in E \times [c,d)$$

şi dacă $\int_c^d g(y)\,dy$ este convergentă atunci integrala $\int_c^d |f(\vec{x},y)|\,dy$ este uniform convergentă pe $E$.

**Teorema 3.2.7** (Criteriul lui Abel). Fie funcţiile $(\vec{x},y) \to f(\vec{x},y) \in I\!\!R$, $(\vec{x},y) \to$ $\to h(\vec{x},y) \in I\!\!R$, $(\vec{x},y) \in E \times [c,d)$, $E \subset I\!\!R^n$, $-\infty < c < d \le \infty$. Dacă:

a) integrala $\int_c^d f(\vec{x},y)\,dy$ este uniform convergentă pe $E$;

b) funcţia $h(\vec{x},y)$ este monotonă în raport cu $y$ pe $[c,d)$, pentru $\forall\,\vec{x} \in E$;

c) funcţia $h(\vec{x},y)$ este mărginită pe $E \times [c,d)$,

atunci integrala $\int_c^d f(\vec{x},y)h(\vec{x},y)\,dy$ este uniform convergentă pe $E$.

**Teorema 3.2.8** (Criteriul lui Dirichlet). Fie funcţiile $(\vec{x},y) \to f(\vec{x},y) \in I\!\!R$, $(\vec{x},y) \to$ $\to h(\vec{x},y) \in I\!\!R$, $(\vec{x},y) \in E \times [c,d)$, $E \subset I\!\!R^n$, $-\infty < c < d \le \infty$. Dacă:

a) pentru $\forall\,\vec{x} \in E$, funcţia $f(\vec{x},t)$ este integrabilă în raport cu $t$ pe orice segment $[c,y] \subset [c,d)$ şi funcţia:

$$(\vec{x},y) \to \int_c^y f(\vec{x},y)\,dy,\;\; (\vec{x},y) \in E \times [c,d)$$

este mărginită;

b) funcţia $h(\vec{x},y)$ este monotonă în raport cu $y$ pe $[c,d)$ pentru $\forall\,\vec{x} \in E$;

c) $h(\vec{x},y) \to 0$, pentru $y \to d$, uniform în raport cu $\vec{x} \in E$,

atunci $\int_c^d f(\vec{x},y)h(\vec{x},y)\,dy$ este uniform convergentă pe $E$.

**Teorema 3.2.9.** Integrala (3.2.3) este uniform convergentă pe $E$ dacă şi numai dacă pentru orice alegere a şirului $(y_n)_{n\in I\!\!N}$, $y_n \in (c,d)$, $y_n \to d$, pt. $n \to \infty$, şirul de funcţii $I_n(\vec{x}) = \int_c^{y_n} f(\vec{x},y)\,dy$ converge uniform pe $E$ la funcţia $I(\vec{x})$.

*Proprietăţi ale integralelor improprii uniform convergente*

**Teorema 3.2.10.** Fie $\vec{x}_0 \in I\!\!R^n$ punct de acumulare pentru mulţimea $E \subset I\!\!R^n$. Dacă:

a) integrala (3.2.3) este uniform convergentă pe $E$;

b) $f(\vec{x},y) \to \varphi(y)$, pentru $\vec{x} \to \vec{x}_0$, uniform în raport cu $y \in [c,\delta]$, $\forall\,\delta \in (c,d)$ atunci integrala improprie $\int_c^d \varphi(y)\,dy$ este convergentă şi:

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} I(\vec{x}) = \int_c^d \varphi(y)\,dy \quad \text{sau} \quad \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \int_c^d f(\vec{x},y)\,dy = \int_c^d \left(\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x},y)\right)\,dy.$$

**Consecinţa 3.2.2.** Dacă $E \subset I\!\!R^n$ este compactă, integrala (3.2.3) este uniform convergentă pe $E$, iar funcţia $f$ este continuă, atunci funcţia $I$ este continuă pe $E$.

**Teorema 3.2.11.** Fie funcţia:

$$(x,y) \to f(x,y) \in I\!\!R, \ \ (x,y) \in [a,b]\times[c,d), \ \ -\infty < c < d \le \infty \tag{3.2.4}$$

şi integrala improprie depinzând de parametrul $x$:

$$x \to I(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy, \ \ x \in [a,b]. \tag{3.2.5}$$

Dacă derivata parţială $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ există şi este continuă pe $[a,b]\times[c,d)$ şi dacă integrala improprie $x \to \displaystyle\int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy, \ \ x \in [a,b]$ este uniform convergentă pe $[a,b]$, atunci $I(x)$ este derivabilă pe $[a,b]$ şi:

$$\frac{dI}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy.$$

**Teorema 3.2.12.** Dacă funcţia (3.2.4) este continuă şi integrala (3.2.5) este uniform convergentă pe $[a,b]$, atunci funcţia $I$ este integrabilă pe $[a,b]$, iar funcţia $t \to$ $\to \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,dx, \ \ t \in [c,d)$ este integrabilă pe $[c,d)$ şi avem:

$$\int_a^b I(x)\,dx = \int_a^b \left\{\int_c^d f(x,y)\,dy\right\}\,dx = \int_c^d \left\{\int_a^b f(x,y)\,dx\right\}\,dy.$$

**Teorema 3.2.13.** Fie funcţia continuă:

$$(x,y) \to f(x,y) \in I\!\!R, \ \ (x,y) \in [a,b)\times[c,d), \ \ -\infty < a < b \le \infty, \ \ -\infty < c < d \le \infty,$$

integralele improprii depinzând de parametri:

$$I(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy, \ \ x \in [a,b), \quad J(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx, \ \ y \in [c,d)$$

şi integralele improprii:

$$\int_a^b \left\{\int_c^d f(x,y)\,dy\right\}\,dx, \quad \int_c^d \left\{\int_a^b f(x,y)\,dx\right\}\,dy. \tag{3.2.6}$$

Presupunem că $I(x)$ şi $J(y)$ sunt uniform convergente pe orice segment $[a,\beta] \subset [a,b)$, respectiv pe orice segment $[c,\delta] \subset [c,d)$. În aceste condiţii dacă una din integralele (3.2.6) este convergentă, atunci integralele $\displaystyle\int_a^b I(x)\,dx$ şi $\displaystyle\int_c^d J(y)\,dy$ sunt convergente şi egale, adică:

$$\int_a^b \left\{\int_c^d f(x,y)\,dy\right\}\,dx = \int_c^d \left\{\int_a^b f(x,y)\,dx\right\}\,dy.$$

Proprietăţile de mai sus se păstrează şi pentru integralele improprii depinzând de parametri, având drept puncte singulare limita inferioară sau ambele limite de integrare.

# PROBLEME REZOLVATE

**1.** Să se calculeze următoarele integrale, folosind derivarea sub semnul integrală:

a) $I(y)=\int_0^{\pi/2}\ln(y^2-\sin^2 x)\,dx,\ \ y>1.$

b) $I(m)=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos^2 x+m^2\sin^2 x)\,dx,\ \ m\ge 0.$

c) $I(a)=\int_0^{\pi/2}\ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\cdot\frac{dx}{\sin x},\ \ |a|<1.$

d) $I(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{arctg}(a\sin x)}{\sin x}\,dx,\ \ a\in I\!\!R.$

e) $I(a)=\int_0^{a}\frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}\,dx,\ \ a\ge 0.$

**Rezolvare.** a) $I(y)$ este o integrală proprie depinzând de parametrul $y$. Mulţimea $E=[a,b]\subset(1,\infty)$ este compactă, există $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, unde $f(x,y)=\ln(y^2-\sin^2 x)$, şi anume $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{2y}{y^2-\sin^2 x}$, care este o funcţie continuă pe $[a,b]\times[0,\pi/2]$. Rezultă că:

$$I'(y)=\int_0^{\pi/2}\frac{2y}{y^2-\sin^2 x}\,dx,\ \ y\in[a,b].$$

Pentru a calcula integrala de mai sus facem schimbarea de variabilă $\operatorname{tg}x=t\Rightarrow\sin^2 x=$ $=\dfrac{t^2}{1+t^2}$; $x=0\Rightarrow t=0$, $x\to\pi/2\Rightarrow t\to\infty$, $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$. Deci:

$$I'(y)=2y\int_0^{\infty}\frac{1}{y^2-\frac{t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=2y\int_0^{\infty}\frac{dt}{(y^2-1)t^2+y^2}=\frac{2y}{y^2-1}\cdot\frac{\sqrt{y^2-1}}{y}\times$$
$$\times\operatorname{arctg}\frac{t\sqrt{y^2-1}}{y}\Big|_0^{\infty}=\frac{2}{\sqrt{y^2-1}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{y^2-1}}.$$

Rezultă $I'(y)=\dfrac{\pi}{\sqrt{y^2-1}}$, $\forall\, y\in[a,b]$. Deoarece $a$ şi $b$ sunt arbitrari obţinem $I'(y)=\dfrac{\pi}{\sqrt{y^2-1}}$, $\forall\, y\in(1,\infty)$. Integrând funcţia $I'(y)$ deducem:

$$I(y)=\pi\ln(y+\sqrt{y^2-1})+C,\ \ \forall\, y>1.$$

Pentru a determina constanta $C$ vom calcula $\lim\limits_{y\to 1}I(y)$. Deoarece $\lim\limits_{y\to 1}\ln(y^2-\sin^2 x)=$ $=\ln(1-\sin^2 x)$, uniform în raport cu $x\in[0,c]$, $\forall\, c$, $c\in(0,\pi/2)$, rezultă că:

$$C=\lim_{y\to 1}I(y)=\int_0^{\pi/2}\ln(1-\sin^2 x)\,dx=2\int_0^{\pi/2}\ln\cos x\,dx=-\pi\ln 2,$$

(vezi {§1, Problema 12}).

Deci $I(y)=\pi\ln\dfrac{y+\sqrt{y^2-1}}{2}$, $y>1$.

b) $I(m)$ este o integrală proprie pentru orice $m\in I\!\!R_+$. Avem:

$$I'(m)=\int_0^{\pi/2}\frac{2m\sin^2 x}{\cos^2 x+m^2\sin^2 x}\,dx=2m\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x+m^2\sin^2 x}\,dx.$$

Facem schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow x = \operatorname{arctg} x,\ \ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$. Rezultă:

$$I'(m) = 2m\int_0^\infty \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}+\frac{m^2t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = 2m\int_0^\infty \frac{t^2}{(m^2t^2+1)(t^2+1)}\,dt.$$

Pentru $m \neq 1$, descompunem fracţia $\dfrac{t^2}{(m^2t^2+1)(t^2+1)}$ în fracţii simple:

$$\frac{t^2}{(m^2t^2+1)(t^2+1)} = \frac{At+B}{m^2t^2+1}+\frac{Ct+D}{t^2+1}$$

$$\Rightarrow At^3+Bt^2+At+B+Cm^2t^3+Ct+Dm^2t^2+D = t^2$$

$$\Rightarrow A+Cm^2=0,\ \ B+Dm^2=1,\ \ A+C=0,\ \ B+D=0.$$

Obţinem $A=C=0,\ \ B=\dfrac{1}{1-m^2},\ \ D=\dfrac{1}{m^2-1}$. Deci pentru $m\neq 1$:

$$I'(m) = \frac{2m}{1-m^2}\int_0^\infty\frac{dt}{m^2t^2+1}+\frac{2m}{m^2-1}\int_0^\infty\frac{dt}{t^2+1} = \frac{2}{m(1-m^2)}\cdot m\operatorname{arctg} tm\Big|_0^\infty +$$

$$+\frac{2m}{m^2-1}\operatorname{arctg} t\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{1-m^2}+\frac{m\pi}{m^2-1} = \frac{\pi(m-1)}{m^2-1} = \frac{\pi}{m+1}.$$

Pentru $m=1$:

$$I'(m) = 2\int_0^\infty\frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt = -\int_0^\infty t\cdot\left(\frac{1}{t^2+1}\right)'dt = -\frac{t}{t^2+1}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty\frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \operatorname{arctg} t\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

Deci $\ I'(m) = \dfrac{\pi}{m+1},\ \ \forall\, m\in I\!R_+$. Integrând, obţinem:

$$I(m) = \pi\ln(m+1)+C,\ \ \forall\, m\in I\!R_+.$$

Constanta $C$ o vom determina făcând pe $m=0$ în egalitatea de mai sus:

$$C = I(0) = \int_0^{\pi/2}\ln\cos^2 x\,dx = 2\int_0^{\pi/2}\ln\cos x\,dx = -\pi\ln 2.$$

Deci $\ \ I(m) = \pi\ln\dfrac{m+1}{2},\ \ \forall\, m\in I\!R_+$.

c) Deoarece:

$$\lim_{x\to0}\ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x} = \lim_{x\to0}\ln\left(1+\frac{2a\sin x}{1-a\sin x}\right)\cdot\frac{1}{\sin x} = \lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{2a\sin x}{1-a\sin x}\right)}{\frac{2a\sin x}{1-a\sin x}}\times$$

$$\times\frac{2a}{1-a\sin x} = 2a,$$

rezultă că integrala $I(a)$ este o integrală proprie, $\forall\, a,\ \ |a|<1$.

Să considerăm $\delta>0$ arbitrar, momentan fixat şi să definim funcţia $f: E\times[0,\pi/2]\to$ $\to I\!R,\ \ E=[-\delta,\delta]$,

$$f(a,x) = \begin{cases} \ln\dfrac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\cdot\dfrac{1}{\sin x}, & \text{dacă } x\in(0,\pi/2],\\ 2a, & \text{dacă } x=0,\ \ a\in E.\end{cases}$$

Mulţimea $E$ este compactă şi $\exists\,\dfrac{\partial f}{\partial a}(a,x)$:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,x)=\frac{\frac{\sin x(1-a\sin x)+\sin x(1+a\sin x)}{(1-a\sin x)^2}}{\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}}\cdot\frac{1}{\sin x}=\frac{2}{1-a^2\sin^2 x},\ \ \forall\, x\in[0,\pi/2],\ \ a\in E.$$

În plus, $\dfrac{\partial f}{\partial a}$ este continuă pe $E\times[0,\pi/2]$. Rezultă atunci că $I$ este derivabilă în raport cu $a$ şi:

$$I'(a)=2\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1-a^2\sin^2 x}.$$

Facem schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} x=t$. Rezultă:

$$I'(a)=2\int_0^{\infty}\frac{1}{1-a^2\frac{t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=2\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1-a^2)t^2+1}=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\operatorname{arctg} t\sqrt{1-a^2}\Big|_0^{\infty}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Deci $I'(a)=\dfrac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$, $\forall\, a\in[-\delta,\delta]$. Deoarece $\delta$ este arbitrar deducem că:

$$I'(a)=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}},\ \ \forall\, a,\ \ |a|<1.$$

Prin integrare rezultă că $I(a)=\pi\arcsin a+C$, $|a|<1$, $C\in I\!\!R$. Pentru a determina constanta $C$ înlocuim pe $a$ cu $0$ în relaţia de mai sus şi obţinem $C=I(0)$. Deoarece pentru $a=0$ integrala din problemă este $0$ ($I(0)=0$), rezultă că $C=0$. Deci:

$$I(a)=\pi\arcsin a,\ \ \forall\, a,\ \ |a|<1.$$

d) $I(a)$ este o integrală proprie deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(a\sin x)}{\sin x}=a$. Derivăm sub semnul integrală; obţinem:

$$I'(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{1+a^2\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\sin x}\,dx=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+a^2\sin^2 x}.$$

Facem schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} x=t$. Rezultă:

$$I'(a)=\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+a^2\frac{t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}=\int_0^{\infty}\frac{dt}{(a^2+1)t^2+1}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\cdot\operatorname{arctg} t\sqrt{a^2+1}\Big|_0^{\infty}=$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{a^2+1}},\ \ \forall\, a\in I\!\!R.$$

Prin integrare deducem $I(a)=\dfrac{\pi}{2}\ln(a+\sqrt{a^2+1})+C$, $\forall\, a\in I\!\!R$, unde $C=I(0)=$ $=0$. Deci:

$$I(a)=\frac{\pi}{2}\ln(a+\sqrt{a^2+1}),\ \ \forall\, a\in I\!\!R.$$

e) Prin derivare, obţinem:

$$I'(a)=\int_0^{a}\frac{x}{1+ax}\cdot\frac{dx}{1+x^2}+\frac{\ln(1+a^2)}{1+a^2}.$$

Descompunem fracţia $\dfrac{x}{(1+ax)(1+x^2)}=\dfrac{A}{1+ax}+\dfrac{Bx+C}{1+x^2}\Rightarrow$
$Ax^2+A+Bax^2+Bx+Cax+C=x\Rightarrow A+Ba=0,\ \ B+Ca=1,\ \ A+C=0.$
Rezultă: $A=-\dfrac{a}{1+a^2}$, $B=\dfrac{1}{1+a^2}$, $C=\dfrac{a}{1+a^2}$. Deci:

$$I'(a)=-\frac{a}{1+a^2}\int_0^{a}\frac{dx}{1+ax}+\frac{1}{1+a^2}\int_0^{a}\frac{x+a}{1+x^2}\,dx+\frac{\ln(1+a^2)}{1+a^2}=-\frac{1}{1+a^2}\ln(1+ax)\Big|_0^{a}+$$

$$+\frac{1}{2(1+a^2)}\ln(1+x^2)\Big|_0^a+\frac{a}{1+a^2}\cdot\operatorname{arctg}x\Big|_0^a+\frac{\ln(1+a^2)}{1+a^2}=-\frac{\ln(1+a^2)}{1+a^2}+\frac{\ln(1+a^2)}{2(1+a^2)}+$$
$$+\frac{a\operatorname{arctg}a}{1+a^2}+\frac{\ln(1+a^2)}{1+a^2}=\frac{\ln(1+a^2)}{2(1+a^2)}+\frac{a\operatorname{arctg}a}{1+a^2},\ \ \forall\, a\geq 0.$$

Rezultă prin integrare că:

$$I(a)=\int\left[\frac{a\operatorname{arctg}a}{1+a^2}+\frac{1}{2(1+a^2)}\ln(1+a^2)\right]da=\frac{1}{2}\ln(1+a^2)\cdot\operatorname{arctg}a-$$
$$-\frac{1}{2}\int\frac{\ln(1+a^2)}{1+a^2}\,da+\frac{1}{2}\int\frac{\ln(1+a^2)}{1+a^2}\,da=\frac{1}{2}\ln(1+a^2)\cdot\operatorname{arctg}a+C,\ \ \forall\, a\geq 0.$$

Pentru $a=0$, $I(0)=0$. Deci:

$$I(a)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}a\cdot\ln(1+a^2),\ \ \forall\, a\in I\!R_+.$$

**2.** Folosind integrarea sub semnul integrală, să se calculeze:

$$I(a,b)=\int_0^1\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx;\ \ a>0,\ \ b>0.$$

**Rezolvare.** Deoarece $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=b-a$, unde $f(x)=\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\times$ $\times\frac{x^b-x^a}{\ln x}$, rezultă că avem o integrală proprie.

Din faptul că $\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^t\,dt$ rezultă că:

$$I(a,b)=\int_0^1\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\int_a^b x^t\,dt\right)dx=\int_0^1\left[\int_a^b\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\cdot x^t\,dt\right]dx.$$

Funcţia $(t,x)\to\begin{cases}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\cdot x^t, & \text{dacă } t\in[a,b],\ x\in(0,1],\\ 0, & \text{dacă } x=0,\ t\in[a,b],\end{cases}$

este continuă pe $[a,b]\times[0,1]$. Rezultă că putem schimba ordinea de integrare în $I(a,b)$, adică avem:

$$I(a,b)=\int_a^b\left[\int_0^1\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\cdot x^t\,dx\right]dt.$$

Integrala $I(t)=\int_0^1\cos(-\ln x)\cdot x^t\,dx=\int_0^1 x^t\cdot\cos(\ln x)\,dx$, $t\in[a,b]$,
o calculăm făcând schimbarea de variabilă $\ln x=u\Rightarrow x=e^u$, $dx=e^u\,du$. Deci:

$$I(t)=\int_{-\infty}^0 e^{ut}\cos u\cdot e^u\,du=\int_{-\infty}^0 e^{u(t+1)}\cdot\cos u\,du=\int_{-\infty}^0 e^{u(t+1)}\cdot(\sin u)'\,du=$$
$$=e^{u(t+1)}\cdot\sin u\Big|_{-\infty}^0-(t+1)\int_{-\infty}^0 e^{u(t+1)}\cdot\sin u\,du=(t+1)\int_{-\infty}^0 e^{u(t+1)}\cdot(\cos u)'\,du=$$
$$=(t+1)e^{u(t+1)}\cdot\cos u\Big|_{-\infty}^0-(t+1)^2\int_{-\infty}^0 e^{u(t+1)}\cdot\cos u\,du=(t+1)-(t+1)^2\cdot I(t).$$

Rezultă $I(t)=\dfrac{t+1}{t^2+2t+2}$ şi deci:

$$I(a,b)=\int_a^b\frac{t+1}{t^2+2t+2}\,dt=\frac{1}{2}\ln(t^2+2t+2)\Big|_a^b=\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}.$$

**3.** Din valoarea integralei:

$$I(a,b)=\int_0^\pi\frac{dx}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x},\ \ a,\,b>0,$$

să se deducă, utilizând derivarea sub semnul integrală, valoarea integralei:

$$J(a,b) = \int_0^{\pi} \frac{dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2}.$$

**Rezolvare.** Conform {§1, Problema 6 a)}, $I(a,b) = \dfrac{\pi}{ab}$. Apoi:

$$\frac{\partial I}{\partial a}(a,b) = \int_0^{\pi} \frac{-2a\cos^2 x}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2}\,dx \quad \text{şi} \quad \frac{\partial I}{\partial b}(a,b) = \int_0^{\pi} \frac{-2b\sin^2 x}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2}\,dx.$$

Deci: $\quad J(a,b) = -\dfrac{1}{2a}\cdot\dfrac{\partial I}{\partial a}(a,b) - \dfrac{1}{2b}\cdot\dfrac{\partial I}{\partial b}(a,b).$

Dar $\dfrac{\partial I}{\partial a}(a,b) = -\dfrac{\pi}{a^2 b}$ şi $\dfrac{\partial I}{\partial b}(a,b) = -\dfrac{\pi}{ab^2}$. Rezultă că:

$$J(a,b) = \frac{\pi}{2a^3 b} + \frac{\pi}{2ab^3} = \frac{\pi}{2ab}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right), \quad a,\, b > 0.$$

**4.** Se consideră funcţiile:

$$f(x) = \int_0^{arctg\, x} e^{tg^2 t}\,dt, \quad x \in I\!R, \qquad g(x) = \max\{x,\, x^2\}, \quad x \in [0,2].$$

Să se arate că:

a) funcţia $f$ este derivabilă şi să se calculeze derivata sa;

b) funcţia $g$ admite primitive şi să se determine o primitivă a sa;

c) are loc următoarea relaţie:

$$\int_0^1 \frac{x\,f(x)}{e^{x^2}}\,dx + \frac{1}{2e}\int_0^1 \frac{e^{x^2}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}\int_0^1 g(x)\,dx.$$

**Rezolvare.** a) Funcţia $f$ depinde de parametrul $x \in I\!R$. Avem $\varphi(x) = 0,\ \ \psi(x) = \operatorname{arctg} x$. Fie $a > 0$; atunci $\varphi,\, \psi \in C^1([-a,a])$, iar funcţia $\dfrac{\partial}{\partial x}(e^{tg^2 t}) = 0$ este continuă pe $[-a,a] \times [0, \operatorname{arctg} x]$. Conform Teoremei 3.2.3 rezultă că $f$ este derivabilă pe $[-a,a]$ şi:

$$f'(x) = e^{tg^2(arctg\, x)}\cdot\frac{1}{1+x^2} = \frac{e^{x^2}}{1+x^2}, \quad \forall\, x \in [-a,a].$$

Punctul $a$ fiind arbitrar deducem că funcţia $f$ este derivabilă pe $I\!R$ şi $f'(x) = \dfrac{e^{x^2}}{1+x^2}$, $\forall\, x \in I\!R$.

b) Avem $\quad g(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in [0,1], \\ x^2, & \text{dacă } x \in (1,2]. \end{cases}$

Deoarece $g$ este o funcţie continuă pe $[0,2]$ rezultă că ea admite primitive, care au forma:

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + c_1, & \text{dacă } x \in [0,1], \\ \dfrac{x^3}{3} + c_2, & \text{dacă } x \in (1,2]. \end{cases}$$

Pentru ca $G$ să fie o primitivă trebuie să fie o funcţie continuă, deci $c_2 = c_1 + \dfrac{1}{6}$ şi derivabilă pe $(0,2)$. Funcţia $G$ este derivabilă în orice punct $x \in (0,2)\setminus\{1\}$. În punctul $x = 1$ calculăm derivatele la stânga şi la dreapta:

$$G'_s(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{G(x) - G(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{x^2}{2} + c_1 - \frac{1}{2} - c_1}{x-1} = 1,$$

$$G'_d(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{G(x)-G(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{x^3}{3}+c_1+\frac{1}{6}-c_1-\frac{1}{2}}{x-1} = 1.$$

Deci $G'_s(1) = G'_d(1) = 1$, adică $G$ este derivabilă şi în punctul $x = 1$. Rezultă că o primitivă arbitrară a funcţiei $g$ este:

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + c_1, & \text{dacă } x \in [0,1], \\ \dfrac{x^3}{3} + c_1 + \dfrac{1}{6}, & \text{dacă } x \in (1,2], \quad c_1 \in I\!R. \end{cases}$$

c) Pentru a verifica relaţia din enunţ vom calcula mai întâi primul termen:

$$\int_0^1 \frac{x\,f(x)}{e^{x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (e^{-x^2})' \cdot f(x)\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\cdot f(x)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2}\cdot f'(x)\,dx =$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-1}\cdot\int_0^{\pi/4} e^{tg^2 t}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{2}e^{-1}\cdot\int_0^{\pi/4} e^{tg^2 t}\,dt + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 =$$
$$\overset{tg\,t=u}{=} -\frac{1}{2}e^{-1}\cdot\int_0^1 e^{u^2}\cdot\frac{du}{1+u^2} + \frac{\pi}{8}.$$

Apoi: $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = G(1) - G(0) = \frac{1}{2}$. Deci:

$$\int_0^1 \frac{x\,f(x)}{e^{x^2}}\,dx + \frac{1}{2e}\int_0^1 \frac{e^{x^2}}{1+x^2}\,dx = -\frac{1}{2e}\int_0^1 \frac{e^{u^2}}{1+u^2}\,du + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2e}\int_0^1 \frac{e^{x^2}}{1+x^2}\,dx =$$
$$= \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}\cdot\int_0^1 g(x)\,gx,$$

adică tocmai relaţia din enunţ.

**5.** Să se calculeze derivata funcţiei:

$$f(x) = \int_x^{2x} \cos(x+t)\cdot\ln(tx)\,dt, \quad x > 0.$$

**Rezolvare.** Fie $a$, $b > 0$, $a < b$. Funcţiile $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = 2x$ sunt din $C^1([a,b])$, iar funcţia:

$$\frac{\partial}{\partial x}[\cos(x+t)\cdot\ln(tx)] = -\sin(x+t)\cdot\ln(tx) + \frac{1}{x}\cos(x+t)$$

este continuă pe $[a,b]\times[x,2x]$. Rezultă că $f$ este derivabilă pe $(a,b)$ şi:

$$f'(x) = \int_x^{2x}\left[-\sin(x+t)\cdot\ln(tx) + \frac{1}{x}\cos(x+t)\right]dt + 2\cos 3x\cdot\ln(2x^2) -$$
$$-\cos 2x\cdot\ln x^2 = -\int_x^{2x}\sin(x+t)\cdot\ln(tx)\,dt + \frac{1}{x}\sin(x+t)\Big|_{t=x}^{t=2x} + 2\cos 3x\cdot\ln(2x^2) -$$
$$-\cos 2x\cdot\ln x^2 = -\int_x^{2x}\sin(x+t)\cdot\ln(tx)\,dt + \frac{1}{x}(\sin 3x - \sin 2x) + 2\cos 3x\cdot\ln(2x^2) -$$
$$-\cos 2x\cdot\ln x^2, \quad \forall\, x\in(a,b).$$

Punctele $a$ şi $b$ fiind arbitrare rezultă că $f$ este derivabilă pe $(0,\infty)$ şi:

$$f'(x) = \frac{1}{x}(\sin 3x - \sin 2x) + 2\cos 3x\cdot\ln(2x^2) - \cos 2x\cdot\ln x^2 - \int_x^{2x}\sin(x+t)\cdot\ln x\,dt -$$
$$-\int_x^{2x}\sin(x+t)\cdot\ln t\,dt = \frac{1}{x}(\sin 3x - \sin 2x) + 2\cos 3x\cdot\ln(2x^2) - \cos 2x\cdot\ln(x^2) +$$
$$+\ln x\cdot(\cos 3x - \cos 2x) - \sin x\int_x^{2x}\cos t\cdot\ln t\,dt - \cos x\int_x^{2x}\sin t\cdot\ln t\,dt.$$

**6.** Fie funcţia $f(x,y) = e^{-y^2/x^2}\cdot\dfrac{y}{x^2}$ definită pe $(0,\infty)\times[0,1]$. Să se arate că:

$$\lim_{x\to 0}\int_0^1 f(x,y)\,dy \neq \int_0^1 \lim_{x\to 0} f(x,y)\,dy.$$

**Rezolvare.** Avem:

$$\int_0^1 f(x,y)\,dy = \int_0^1 e^{-y^2/x^2}\cdot\frac{y}{x^2}\,dy = -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{-y^2/x^2}\right)'\,dy = -\frac{1}{2}e^{-y^2/x^2}\Big|_{y=0}^{y=1} =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(e^{-1/x^2}-1\right),$$

iar $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^1 f(x,y)\,dy = \lim\limits_{x\to 0}\left[-\frac{1}{2}\left(e^{-1/x^2}-1\right)\right] = \frac{1}{2}$.

Apoi $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = y\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x^2}}{e^{y^2/x^2}} = y\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{2}{x^3}}{-\frac{2y^2}{x^3}\cdot e^{y^2/x^2}} = 0.$ Deci:

$$\int_0^1 \lim_{x\to 0} f(x,y)\,dy = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{x\to 0}\int_0^1 f(x,y)\,dy.$$

Nu am putut aplica Teorema 3.2.1 deoarece $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$ nu este uniformă în raport cu $y\in[0,1]$. Într-adevăr:

$\exists\,\varepsilon_0>0$ a.î. $\forall\,\eta,\ 1>\eta>0\ \exists\,x,\ 0<x<\eta$ şi $\exists\,y,\ y\in[0,1]$ a.î. $|f(x,y)|\geq\varepsilon_0$.

Luând $\varepsilon_0 = 4e^{-4}$, $x=\dfrac{\eta}{2}$ şi $y=\eta$ obţinem $\left|f\left(\dfrac{\eta}{2},\eta\right)\right| = e^{-4}\cdot\dfrac{4}{\eta} > 4e^{-4}$.

**7.** Fie funcţia:

$$I(\alpha) = \int_0^1 \ln\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx,\quad \alpha\geq 0.$$

Să se arate că:

$$I'(0) \neq \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\sqrt{x^2+\alpha^2}\right)_{\alpha=0} dx.$$

**Rezolvare.** Fie $\alpha>0$. Integrând prin părţi, obţinem:

$$I(\alpha) = x\ln\sqrt{x^2+\alpha^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+\alpha^2}\cdot\sqrt{x^2+\alpha^2}}\,dx = \ln\sqrt{\alpha^2+1}-$$
$$-\int_0^1 \frac{(x^2+\alpha^2)-\alpha^2}{x^2+\alpha^2}\,dx = \ln\sqrt{\alpha^2+1}-1+\alpha\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\alpha}\Big|_0^1 = \ln\sqrt{\alpha^2+1}-1+\alpha\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\alpha}.$$

Deoarece $\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} I(\alpha) = -1 = I(0)$ rezultă că funcţia $I$ este continuă pe $(0,\infty)$ şi:

$$I(\alpha) = \begin{cases} \ln\sqrt{\alpha^2+1}-1+\alpha\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{\alpha}, & \text{dacă } \alpha>0;\\ -1, & \text{dacă } \alpha=0.\end{cases}$$

Calculăm derivata funcţiei $I$ în $\alpha=0$:

$$I'(0) = \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}}\frac{I(\alpha)-I(0)}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln\sqrt{\alpha^2+1}+\alpha\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\alpha}}{\alpha} = \frac{1}{2}\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha^2}\cdot\alpha+$$
$$+\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Apoi:

$$\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\sqrt{x^2+\alpha^2}\right)_{\alpha=0} dx = \int_0^1\left(\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}\right)_{\alpha=0} dx = 0 \neq \frac{\pi}{2} = I'(0).$$

Nu putem aplica Teorema 3.2.2 deoarece pentru $E=[0,a]$, $a>0$, $\exists\,\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}$, unde

$f(x,\alpha) = \ln\sqrt{x^2+\alpha^2}$ şi anume $\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha) = \dfrac{\alpha}{x^2+\alpha^2}$ $x \in (0,1)$, $\alpha \in (0,a)$. Această funcţie nu poate fi extinsă prin continuitate pe $[0,1]\times[0,a]$, deoarece $\nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \alpha\to 0}} \dfrac{\alpha}{x^2+\alpha^2}$, după cum se vede considerând şirul $\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right) \to (0,0)$ pentru care $\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n}{2} \to$ $\to \infty$, $n\to\infty$ şi şirul $\left(\dfrac{1}{n},0\right) \to (0,0)$ pentru care $\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}\left(\dfrac{1}{n},0\right) = 0 \to 0$, $n\to\infty$.

**8.** Să se arate că dacă $f$ este de două ori derivabilă, iar $F$ este derivabilă atunci funcţia:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz$$

satisface ecuaţia coardei vibrante $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ şi condiţiile iniţiale $u(x,0)=f(x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = F(x)$.

**Rezolvare.** Fie $b>0$, $c>0$. Aplicăm Teorema 3.2.3 cu $\varphi(x,t) = x-at$, $\psi(x,t) =$ $= x+at$, funcţii derivabile pe $E = [-b,b]\times[-c,c]$. Derivatele $\dfrac{\partial F}{\partial t}(=0)$ şi $\dfrac{\partial F}{\partial x}(=0)$ sunt continue pe $E\times[x-at,x+at]$. Avem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}[-af'(x-at)+af'(x+at)] + \frac{1}{2a}\cdot a\cdot F(x+at) - \frac{1}{2a}\cdot(-a)\cdot F(x-at) =$$
$$= \frac{a}{2}[-f'(x-at)+f'(x+at)] + \frac{1}{2}[F(x+at)+F(x-at)],$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a}{2}[af''(x-at)+af''(x+at)] + \frac{1}{2}[aF'(x+at)-aF'(x-at)] =$$
$$= \frac{a^2}{2}[f''(x-at)+f''(x+at)] + \frac{a}{2}[F'(x+at)-F'(x-at)],$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}[f'(x-at)+f'(x+at)] + \frac{1}{2a}[F(x+at)-F(x-at)],$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}[f''(x-at)+f''(x+at)] + \frac{1}{2a}[F'(x+at)-F'(x-at)],$$

$\forall\, x$, $|x|<b$, $\forall\, t$, $|t|<c$.

Punctele $b$ şi $c$ fiind arbitrare rezultă că expresiile de mai sus sunt valabile pentru $\forall\, x\in I\!R$, $\forall\, t\in I\!R$. Deducem astfel că:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a^2}{2}[f''(x-at)+f''(x+at)] + \frac{a}{2}[F'(x+at)-F'(x-at)] = a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

**9.** Să se studieze în intervalele indicate convergenţa uniformă a următoarelor integrale:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx$, $\alpha\in I\!R$; b) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $n\ge 0$; c) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^p}\,dx$, $p\ge 0$;

d) $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-ax}\cdot\frac{\cos x}{x^p}\,dx$, $a\ge 0$, $p>0$ fixat; e) $\displaystyle\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^n}$, $0<n<2$.

**Rezolvare.** a) Deoarece:

$$\left|\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{1+x^2},\ \ \forall\, x\in I\!R,\ \ \forall\,\alpha\in I\!R,$$

iar integrala $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ este convergentă, rezultă conform criteriului lui Weierstrass că integrala din enunţ este uniform (şi absolut) convergentă.

b) Avem:

$$\left|\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \forall\, x \in [0,1), \ \forall\, n \ge 0,$$

iar integrala $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ este convergentă. Din criteriul lui Weierstrass rezultă că integrala din enunţ este uniform convergentă.

c) Aplicăm criteriul lui Abel. Integrala $\int_0^{\infty} \sin x^2\, dx$ este (uniform) convergentă (vezi Problema 14), iar funcţia $g(x,p) = \frac{1}{1+x^p}$ este monotonă în raport cu $x \in [0,\infty)$, pentru $\forall\, p \ge 0$ şi $g$ este mărginită pe $[0,\infty) \times [0,\infty)$:

$$0 < g(x,p) \le 1, \ \forall\, x \ge 0, \ p \ge 0.$$

Rezultă conform criteriului lui Abel că integrala $\int_0^{\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p}\, dx$ este uniform convergentă în raport cu $p \in [0,\infty)$.

d) Aplicăm şi aici criteriul lui Abel. Integrala $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^p}\, dx$ este (uniform) convergentă, după cum rezultă din criteriul lui Dirichlet de la integrale improprii de primul tip. Avem:

$$\left|\int_1^A \cos x\, dx\right| \le 2, \ \forall\, A \ge 1,$$

iar funcţia $\frac{1}{x^p}$ este monoton descrescătoare cu limita 0 pentru $x \to \infty$.

Apoi funcţia $g(x,a) = e^{-ax}$ este monotonă în raport cu $x \in [1,\infty)$, pentru $\forall\, a \ge 0$ şi $0 < e^{-ax} \le 1, \forall\, a \ge 0, \ \forall\, x \ge 1$. Deducem astfel că integrala din enunţ este uniform convergentă în raport cu $a \in [0,\infty)$.

e) Facem schimbarea de variabilă $\frac{1}{x} = y$. Rezultă:

$$I(n) = \int_1^{\infty} \sin y \cdot y^n \frac{dy}{y^2} = \int_1^{\infty} \frac{\sin y}{y^{2-n}}\, dy.$$

Pentru fiecare $n \in (0,2)$ fixat integrala de mai sus este convergentă, conform criteriului lui Dirichlet:

$$f(y) = \sin y, \ \int_1^A \sin y\, dy = -\cos y\Big|_1^A = \cos 1 - \cos A, \ \left|\int_1^A \sin y\, dy\right| \le 2$$

şi $g(y) = \frac{1}{y^{2-n}}$ este monoton descrescătoare pe $[1,\infty)$ cu $\lim_{y\to\infty} g(y) = 0$.

Totuşi $I(n)$ nu este uniform convergentă în raport cu $n \in (0,2)$. Problema este în vecinătatea lui 2. Pentru $n \to 2$ integrala $\int_1^{\infty} \sin y\, dy$ este divergentă. Vom demonstra că $I(n)$ nu este uniform convergentă cu ajutorul criteriului lui Cauchy-Bolzano, adică vom arăta că:

$$\exists\, \varepsilon_0 \left(= \frac{1}{4}\right) \ \text{a.î.} \ \forall\, y \in [1,\infty) \ \exists\, y_1,\, y_2 \in (y,\infty), \ \exists\, n_0 \in (0,2) \ \text{a.î.}$$

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} \frac{\sin y}{y^{2-n_0}}\, dy\right| \geq \varepsilon_0.$$

Luăm $m_0 = [y] + 1$, $y_1 = 2\pi m + \dfrac{\pi}{6}$, $y_2 = 2\pi m + \dfrac{\pi}{2}$, $m \geq m_0$ (mare) şi $n_0 = 1,99$. Atunci:

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} \frac{\sin y}{y^{2-n_0}}\, dy\right| = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\sin y}{y^{2-n_0}}\, dy \geq \frac{1}{2}\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y^{2-n_0}} = \frac{1}{2}\cdot \left.\frac{y^{n_0-1}}{n_0-1}\right|_{y_1}^{y_2} =$$

$$= \frac{1}{2(n_0-1)}\left(y_2^{n_0-1} - y_1^{n_0-1}\right) > \frac{1}{2}\left(y_2^{n_0-1} - y_1^{n_0-1}\right) \geq \frac{1}{4},$$

pentru $m$ mare (de exemplu $m \geq 100$).

**10.** Folosind derivarea sub semnul integrală să se calculeze următoarele integrale:

a) $I(y) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2-y^2/x^2}\, dx$, $y \geq 0$; b) $I(a) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2+a^2)}\, dx$, $a > 0$;

c) $I(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\, dx$, $|a| < 1$.

**Rezolvare.** a) Pentru $\forall\, y \in I\!R_+$, $I(y)$ este o integrală improprie de primul tip convergentă, deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2-y^2/x^2} = 0$. $I(y)$ nu este improprie de al doilea tip în $x = 0$, căci $\lim\limits_{x\to 0} e^{-x^2-y^2/x^2} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } y \neq 0,\\ 1, & \text{dacă } y = 0.\end{cases}$

Fie $0 < a < b$ şi funcţia:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x^2-y^2/x^2}, & \text{dacă } x > 0,\ y \in [a,b];\\ 0, & \text{dacă } x = 0,\ y \in [a,b].\end{cases}$$

Există $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ şi anume:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{2y}{x^2} e^{-x^2-y^2/x^2}, & \text{dacă } x > 0,\ y \in [a,b],\\ 0, & \text{dacă } x = 0,\ y \in [a,b],\end{cases}$$

această funcţie fiind continuă pe $[0,\infty) \times [a,b]$.

Apoi integrala $\displaystyle\int_0^\infty \left(-\frac{2y}{x^2}\right) e^{-x^2-y^2/x^2}\, dx$ este uniform convergentă în raport cu $y \in$ $\in [a,b]$, după cum rezultă din criteriul lui Weierstrass:

$$\left|-\frac{2y}{x^2} e^{-x^2-y^2/x^2}\right| \leq \frac{2b}{x^2} e^{-x^2-a^2/x^2},\ \ \forall\, y \in [a,b],\ \ x > 0,$$

iar integrala $2b\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2} e^{-x^2-a^2/x^2}\, dx$ este convergentă.

Conform Teoremei 3.2.11 rezultă că $\exists\, I'(y)$ şi:

$$I'(y) = \int_0^\infty \left(-\frac{2y}{x^2}\right) e^{-x^2-y^2/x^2}\, dx = -2y\int_0^\infty \frac{e^{-x^2-y^2/x^2}}{x^2}\, dx = -2y\int_0^\infty \frac{e^{-\left(x-\frac{y}{x}\right)^2}}{x^2}\cdot e^{-2y}\, dx =$$

$$= -2ye^{-2y}\int_0^\infty \frac{1}{x^2} e^{-\left(x-\frac{y}{x}\right)^2} dx = -2e^{-2y}\int_0^\infty \left(1+\frac{y}{x^2}\right) e^{-\left(x-\frac{y}{x}\right)^2} dx + 2e^{-2y}\int_0^\infty e^{-\left(x-\frac{y}{x}\right)^2} dx =$$

$$= -2e^{-2y}\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\, dt + 2\int_0^\infty e^{-x^2-y^2/x^2}\, dx = -2e^{-2y}\cdot\sqrt{\pi} + 2\, I(y).$$

Deci $I'(y) = -2e^{-2y} \cdot \sqrt{\pi} + 2I(y), \ \forall\, y \in [a,b] \ \Rightarrow \ I'(y) - 2I(y) = -2e^{-2y} \cdot \sqrt{\pi}$, $\forall\, y \in [a,b]$.

Deoarece $a$ şi $b$ sunt arbitrari, rezultă că are loc relaţia de mai sus pentru $\forall\, y > 0$. Înmulţim această relaţie cu $e^{-2y}$ şi obţinem $(e^{-2y} \cdot I(y))' = -2e^{-4y} \cdot \sqrt{\pi}$.

Prin integrare deducem:

$$e^{-2y} \cdot I(y) = -2\sqrt{\pi} \int e^{-4y}\, dy \ \Rightarrow \ e^{-2y} I(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-4y} + C.$$

Deci $I(y) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2y} + Ce^{2y}, \ \forall\, y > 0$.

Pentru $y = 0$ avem $I(0) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Arătăm în continuare că putem trece la limită pentru $y \to 0$ sub semnul integrală în $I(y)$. Mai întâi vom arăta că putem trece la limită pentru $y \to 0$ sub semnul integrală în $I_\delta(y) = \displaystyle\int_\delta^\infty e^{-x^2 - y^2/x^2}\, dx$, unde $\delta > 0$. Considerând intervalul $E = (0,d]$ $(d > 0)$ pentru $y$, integrala $I_\delta(y)$ este uniform convergentă pe $E$, deoarece $\left|e^{-x^2 - y^2/x^2}\right| \le e^{-x^2}$, iar $\displaystyle\int_\delta^\infty e^{-x^2}\, dx$ este convergentă.

Apoi funcţia $e^{-x^2 - y^2/x^2} \ \to \ e^{-x^2}$, pentru $y \to 0$, uniform în raport cu $x \in [\delta, c]$, $\forall\, c > 0$.

Rezultă astfel din Teorema 3.2.10 că $\exists \displaystyle\lim_{y \to 0} I_\delta(y) = \int_\delta^\infty e^{-x^2}\, dx$. Trecând la limită pentru $\delta \to 0$ obţinem:

$$\exists \lim_{y \to 0} I(y) = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Dar $\displaystyle\lim_{y \to 0} I(y) = \lim_{y \to 0} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2y} + Ce^{2y}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + C$. Rezultă că $C = 0$. Deci

$$I(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2y}, \ \forall\, y \in I\!R_+.$$

b) Pentru fiecare $a > 0$, $I(a)$ este o integrală improprie de ambele tipuri. Deoarece:

$$\lim_{x \to 0} x^{1/2} \frac{(-\ln x)}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \lim_{x \to 0} x^{1/2}(-\ln x) = \frac{1}{a^2} \lim_{x \to 0} \frac{-\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{a^2} \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x}} = 0,$$

rezultă că integrala $-\displaystyle\int_0^1 \frac{(-\ln x)}{(x^2 + a^2)}\, dx$ este convergentă.

Apoi $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x^{3/2} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 0$, deci şi integrala $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2 + a^2}\, dx$ este convergentă.

Rezultă că $\forall\, a > 0$, $I(a)$ este o integrală convergentă. Pentru a deriva integrala sub semnul integrală, verificăm condiţiile din Teorema 3.2.11. Fie $0 < b < c$. Avem:

· $\exists \dfrac{\partial}{\partial a}\left(\dfrac{\ln x}{x^2 + a^2}\right) = \dfrac{-2a \ln x}{(x^2 + a^2)^2}, \ \forall\, a \in [b,c], \ x \in (0, \infty)$,

funcţie care este continuă pe $[b,c] \times (0,\infty)$, iar

· integrala $\displaystyle\int_0^\infty \frac{-2a \ln x}{(x^2 + a^2)^2}\, dx$ este uniform convergentă în raport cu $a \in [b,c]$, după

cum rezultă din teorema lui Weierstrass, căci $\left|\dfrac{-2a\ln x}{(x^2+a^2)^2}\right| \le \dfrac{2c|\ln x|}{(x^2+b^2)^2}$,

iar integrala $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2c|\ln x|}{(x^2+b^2)^2}\,dx = -2c\int_0^1 \frac{\ln x}{(x^2+b^2)^2}\,dx + 2c\int_1^\infty \frac{\ln x}{(x^2+b^2)^2}\,dx$ este convergentă (vezi mai sus).

Rezultă astfel din Teorema 3.2.11 că $I$ este derivabilă pe $[b,c]$ şi:

$$I'(a) = \int_0^\infty \frac{-2a\ln x}{(x^2+a^2)^2}\,dx = -2a\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2+a^2)^2}\,dx = -\frac{2}{a}\int_0^\infty \frac{a^2+x^2}{(x^2+a^2)^2}\ln x\,dx +$$
$$+\frac{2}{a}\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\ln x\,dx = -\frac{2}{a}\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx - \frac{1}{a}\int_0^\infty \left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)' x\ln x\,dx =$$
$$= -\frac{2}{a}I(a) - \left.\frac{x\ln x}{a(x^2+a^2)}\right|_0^\infty + \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2}(\ln x+1)\,dx = -\frac{2}{a}I(a) + \frac{1}{a}I(a) + \frac{1}{a^2}\left.\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right|_0^\infty =$$
$$= -\frac{1}{a}I(a) + \frac{\pi}{2a^2}.$$

Deci $\quad I'(a) + \dfrac{1}{a}I(a) = \dfrac{\pi}{2a^2}, \ \ \forall\, a \in [b,c]$.

Deoarece $b$ şi $c$ sunt arbitrari, rezultă că relaţia obţinută are loc pentru $\forall\, a > 0$. Înmulţim relaţia de mai sus cu $a$. Obţinem:

$$aI'(a) + I(a) = \frac{\pi}{2a} \ \Rightarrow \ (aI(a))' = \frac{\pi}{2a},$$

de unde prin integrare, rezultă:

$$aI(a) = \frac{\pi}{2}\ln a + C \ \Rightarrow \ I(a) = \frac{\pi}{2a}\ln a + \frac{C}{a}, \ \ \forall\, a > 0.$$

Pentru $a = 1$ avem $I(1) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\,dx = 0$, conform {§1, Problema 14}. Deci $C = 0$ şi:

$$I(a) = \frac{\pi}{2a}\ln a, \ \ \forall\, a > 0.$$

c) Pentru $\forall\, a \in I\!R$, $|a| < 1$, $I(a)$ este o integrală improprie de al doilea tip cu punctul singular $x = 1$, convergentă deoarece:

$$\lim_{x\to 1} \frac{-\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} \cdot (1-x)^{1/2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1-a^2).$$

Punctul $x = 0$ nu este singular, căci $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-a^2x^2)}{-a^2x^2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-a^2) = -a^2$.

Să considerăm $0 < b < 1$ şi intervalul $[-b,b]$ pentru parametrul $a$. Avem:

$\cdot\ \ \exists\, \dfrac{\partial}{\partial a}\left[\dfrac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right] = \dfrac{-2ax^2}{1-a^2x^2} \cdot \dfrac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-2a}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}$

care este continuă pe $[-b,b] \times (0,1)$, iar

$\cdot$ integrala $\displaystyle\int_0^1 \frac{-2a}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx$ este uniform convergentă în raport cu $a \in$ $\in [-b,b]$, conform criteriului lui Weierstrass,

$\left(\left|\dfrac{2a}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\right| \le \dfrac{2b}{(1-b^2x^2)\sqrt{1-x^2}}, \ \ \forall\, a \in [-b,b] \ \text{şi} \ \displaystyle\int_0^1 \frac{2b}{(1-b^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx\right.$

este convergentă $\Big)$.

Deci conform Teoremei 3.2.11 $\exists\, I'(a)$ pe $[-b,b]$ şi:

$$I'(a)=\int_0^1 \frac{-2a}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Deoarece $b$ este arbitrar, relaţia obţinută este adevărată pentru $\forall\, a,\ \ |a|<1$.

Pentru a calcula integrala de mai sus face schimbarea de variabilă $x=\sin t$. Obţinem:

$$I'(a)=-2a\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{\cos t(1-a^2\sin^2 t)}\,dt=-2a\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{1-a^2\sin^2 t}.$$

În continuare notăm $\operatorname{tg} t=u\Rightarrow t=\operatorname{arctg} u,\ \ dt=\dfrac{du}{1+u^2}$. Deci:

$$I'(a)=-2a\int_0^{\infty}\frac{dt}{\left(1-a^2\frac{t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)}=-2a\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1-a^2)t^2+1}=$$

$$=\frac{-2a}{1-a^2}\sqrt{1-a^2}\operatorname{arctg} t\sqrt{1-a^2}\Big|_0^{\infty}=\frac{-a\pi}{\sqrt{1-a^2}},\ \ \forall\, a,\ \ |a|<1.$$

Integrând, obţinem $I(a)=-\pi\displaystyle\int\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\,da=\pi\sqrt{1-a^2}+C,\ \ \forall\, a,\ \ |a|<1$. Pentru $a=0$, $I(0)=0$, deci $C=-\pi$ şi:

$$I(a)=\pi(\sqrt{1-a^2}-1),\ \ \forall\, a,\ \ |a|<1.$$

**11.** Să se calculeze $I(\alpha,\beta)=\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\,dx,\ \ \alpha>0,\ \ \beta\in I\!R$ folosind derivarea în raport cu $\beta$ sub semnul integrală.

**Rezolvare.** Avem o integrală improprie de primul tip. Pentru $\forall\,\alpha>0$ şi $\beta\in I\!R$ este o integrală absolut convergentă:

$\left|e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\right|\le e^{-\alpha x^2}$, iar $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-\alpha x^2}\,dx$ este convergentă, deoarece $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2e^{-\alpha x^2}=0$.

Fie $\alpha>0$ fixat. Vom arăta că putem deriva pe $I(\alpha,\beta)$ în raport cu $\beta$ sub semnul integrală. Fie $a>0$, intervalul $E=[-a,a]$ şi funcţia $f(x,\beta)=e^{-\alpha x^2}\cos\beta x$, $x\in[0,\infty)$, $\beta\in[-a,a]$. Funcţia $f$ este derivabilă în raport cu $\beta$, iar derivata sa:

$$\frac{\partial f}{\partial\beta}(x,\beta)=-xe^{-\alpha x^2}\sin\beta x\ \ \text{ este continuă pe } [0,\infty)\times[-a,a].$$

Integrala $\displaystyle\int_0^{\infty}(-x)e^{-\alpha x^2}\sin\beta x\,dx,\ \ \beta\in[-a,a]$ este uniform convergentă pe $[-a,a]$, conform criteriului lui Weierstrass:

$$|-xe^{-\alpha x^2}\sin\beta x|\le xe^{-\alpha x^2},\ \ \forall\, x\in[0,\infty),\ \ \forall\,\beta\in[-a,a],$$

iar integrala $\displaystyle\int_0^{\infty}xe^{-\alpha x^2}\,dx$ este convergentă $\left(\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2\cdot xe^{-\alpha x^2}=0\right)$.

Rezultă conform Teoremei 3.2.11 că $I(\alpha,\beta)$ este derivabilă în raport că $\beta\in[-a,a]$ şi:

$$\frac{\partial I}{\partial\beta}(\alpha,\beta)=-\int_0^{\infty}xe^{-\alpha x^2}\sin\beta x\,dx=\frac{1}{2\alpha}\int_0^{\infty}\left(e^{-\alpha x^2}\right)'\sin\beta x\,dx=\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha x^2}\sin\beta x\Big|_0^{\infty}-$$

$$-\frac{\beta}{2\alpha}\int_0^{\infty}e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\,dx=-\frac{\beta}{2\alpha}I(\alpha,\beta),\ \ \forall\,\beta\in[-a,a].$$

Deci $\dfrac{\partial I}{\partial \beta}(\alpha,\beta) = -\dfrac{\beta}{2\alpha} I(\alpha,\beta)$, $\forall\, \beta \in [-a,a]$. Deoarece $a$ este arbitrar deducem că relaţia de mai sus este adevărată pentru $\forall\, \beta \in I\!R$.

Avem astfel:

$$\frac{\partial I}{\partial \beta}(\alpha,\beta) + \frac{\beta}{2\alpha} I(\alpha,\beta) = 0.$$

Înmulţind relaţia obţinută cu $e^{\beta^2/(4\alpha)}$ rezultă: $\dfrac{\partial}{\partial \beta}\left(e^{\beta^2/(4\alpha)} \cdot I(\alpha,\beta)\right) = 0$. Prin integrare deducem: $e^{\beta^2/(4\alpha)} \cdot I(\alpha,\beta) = C(\alpha)$ sau $I(\alpha,\beta) = C(\alpha) e^{-\beta^2/(4\alpha)}$, $\forall\, \beta \in I\!R$, $\alpha > 0$.

Pentru $\beta = 0$ avem $I(\alpha, 0) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\, dx$. Notăm $\sqrt{\alpha} x = t \Rightarrow x = \dfrac{t}{\sqrt{\alpha}}$. Deci:

$$I(\alpha,0) = \int_0^\infty e^{-t^2} \cdot \frac{dt}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}$$

(conform {§1, Problema 7} – integrala lui Euler-Poisson). Rezultă $C(\alpha) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$ şi deci:

$$I(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\beta^2/(4\alpha)}, \quad \forall\, \beta \in I\!R, \quad \alpha > 0.$$

**12.** Folosind valoarea integralei:

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \cdot \frac{\sin \beta x}{x}\, dx, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \in I\!R$$

să se calculeze $D(\beta) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x}\, dx$.

**Rezolvare.** Pentru $\alpha > 0$ şi $\beta \in I\!R$ fixaţi, $I(\alpha,\beta)$ este o integrală improprie de primul tip $\left(\lim\limits_{x\to 0} e^{-\alpha x} \cdot \dfrac{\sin \beta x}{x} = \beta\right)$. Deoarece:

$$\left| e^{-\alpha x} \cdot \frac{\sin \beta x}{x} \right| \leq \frac{e^{-\alpha x}}{x}, \quad \forall\, x > 0,$$

iar $\displaystyle\int_a^\infty \frac{e^{-ax}}{x}\, dx$, $a > 0$ este convergentă $\left(\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \cdot \dfrac{e^{-\alpha x}}{x} = 0\right)$ rezultă că integrala $\displaystyle\int_a^\infty e^{-\alpha x} \cdot \frac{\sin \beta x}{x}\, dx$ este o integrală improprie absolut convergentă.

Dacă $\alpha = 0$, $I(0,\beta) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x}\, dx = D(\beta)$ este o integrală improprie de primul tip simplu convergentă (vezi {§1, Problema 2}).

Să fixăm parametrul $\alpha > 0$. Vom deriva pe $I$ în raport cu $\beta$ sub semnul integrală. Fie $a > 0$, intervalul $[-a,a]$ şi funcţia:

$$f(x,\beta) = \begin{cases} e^{-\alpha x} \cdot \dfrac{\sin \beta x}{x}, & \text{dacă } x \in (0,\infty), \ \beta \in [-a,a]; \\ \beta, & \text{dacă } x = 0, \ \beta \in [-a,a]. \end{cases}$$

Derivata parţială în raport cu $\beta$ a funcţiei $f$ există şi este egală cu:

$$\frac{\partial f}{\partial \beta}(x,\beta) = \cos \beta x \cdot e^{-\alpha x}, \quad x \in [0,\infty), \quad \beta \in [-a,a];$$

în plus, ea este continuă pe $[0,\infty) \times [-a,a]$.

Apoi, integrala improprie:

$$\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \beta}(x,\beta)\,dx = \int_0^\infty \cos\beta x \cdot e^{-\alpha x}\,dx$$

este uniform convergentă pe $[-a,a]$, după cum rezultă din criteriul lui Weierstrass:

$$|\cos\beta x \cdot e^{-\alpha x}| \le e^{-\alpha x} \quad \text{şi} \quad \int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}.$$

Atunci conform Teoremei 3.2.11 rezultă că $I(\alpha,\beta)$ este derivabilă în raport cu $\beta$ pe $[-a,a]$ şi:

$$\frac{\partial I}{\partial \beta}(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \cos\beta x \cdot e^{-\alpha x}\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \ \ \forall\,\beta \in [-a,a].$$

Deoarece $a$ este arbitrar rezultă că:

$$\frac{\partial I}{\partial \beta}(\alpha,\beta) = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \ \ \forall\,\beta \in \mathbb{R}, \ \ \alpha > 0.$$

De aici obţinem prin integrare:

$$I(\alpha,\beta) = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha} + C(\alpha), \ \ \alpha > 0, \ \ \beta \in \mathbb{R}.$$

Pentru $\beta = 0$, $I(\alpha,0) = 0$, deci $C(\alpha) = 0$. Rezultă:

$$I(\alpha,\beta) = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}, \ \ \forall\,\alpha > 0, \ \ \beta \in \mathbb{R}.$$

Vom arăta în continuare că putem trece la limită pentru $\alpha \to 0$ sub semnul integrală în $I(\alpha,\beta)$ (Teorema 3.2.10). Fixăm acum pe $\beta$. Avem:

a) Integrala $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cdot\frac{\sin\beta x}{x}\,dx$ este uniform convergentă în raport cu $\alpha \in E = [0,b]$, $b > 0$ după cum rezultă din criteriul lui Abel, considerând:

$\cdot$ $h_1(x,\alpha) = \dfrac{\sin\beta x}{x}$, integrala $\displaystyle\int_0^\infty h_1(x,\alpha)\,dx$ este convergentă (uniform convergentă în raport cu $\alpha \in E$) şi

$\cdot$ $h_2(x,\alpha) = e^{-\alpha x}$ este monotonă în raport cu $x \in [0,\infty)$, pentru $\forall\,\alpha \in [0,\infty)$ şi $h_2$ este mărginită pe $[0,\infty)\times[0,\infty)$.

b) Funcţia $g(x,\alpha) = \begin{cases} e^{-\alpha x}\cdot\dfrac{\sin\beta x}{x}, & \text{dacă } x \ne 0,\\ \beta, & \text{dacă } x = 0,\end{cases}$ tinde pentru $\alpha \to 0$ la funcţia $h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\beta x}{x}, & \text{dacă } x \ne 0,\\ \beta, & \text{dacă } x = 0\end{cases}$ uniform în raport cu $x \in [0,\delta]$, $\delta > 0$ ($g$ este continuă pe $[0,\delta]\times[0,b]$).

Rezultă conform Teoremei 3.2.10 că există:

$$\lim_{\alpha\to 0} I(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{\sin\beta x}{x}\,dx = D(\beta).$$

Dar $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0} I(\alpha,\beta) = \lim_{\alpha\to 0}\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta$. Deci:

$$D(\beta) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta.$$

În particular pentru $\beta = 1$ obţinem:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

**13.** Folosind integrarea sub semnul integrală, să se calculeze următoarele integrale:

a) $I(\alpha,\beta,m)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cdot\sin mx\,dx;\ \ \alpha,\ \beta>0,\ \ \in I\!\!R\setminus\{0\};$

b) $I(a)=\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} ax}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx;\ \ a>0;$

c) $I(\alpha,\beta)=\displaystyle\int_a^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\,dx;\ \ \alpha,\ \beta>0,\ \ a>0.$

**Rezolvare.** a) Pentru $\alpha=\beta,\ \ I=0$. Presupunem în continuare că $\alpha\neq\beta,\ \ \alpha<\beta$, (în mod asemănător se tratează cazul $\alpha>\beta$). Avem $\dfrac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}=\displaystyle\int_\alpha^\beta e^{-xy}\,dy$, deci:

$$I(\alpha,\beta,m)=\int_0^\infty\left(\int_\alpha^\beta e^{-xy}\,dy\right)\sin mx\,dx.$$

Avem:

· pentru $\alpha$, $\beta$, $m$ arbitrari, momentan fixaţi, funcţia $f(x,y)=e^{-xy}\sin mx$ este continuă pe $[0,\infty)\times[\alpha,\beta]$;

· $\displaystyle\int_\alpha^\beta\left(e^{-xy}\sin mx\right)dy=\begin{cases}\sin mx\displaystyle\int_\alpha^\beta e^{-xy}\,dy=\dfrac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cdot\sin mx, & \text{dacă } x\neq 0,\\ 0, & \text{dacă } x=0\end{cases}$

este uniform convergentă în raport cu $x\in[0,a],\ \ \forall\, a>0$;

· $\displaystyle\int_0^\infty\left(e^{-xy}\sin mx\right)dx$ este uniform convergentă în raport cu $y\in[\alpha,\beta]$ (vezi calculul de mai jos);

· $\displaystyle\int_0^\infty\left(\int_\alpha^\beta e^{-xy}\,dy\right)\sin mx\,dx=\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx=\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha x}\sin mx}{x}\,dx-$

$-\displaystyle\int_0^\infty\frac{e^{-\beta x}\sin mx}{x}\,dx$ este convergentă, $\left(\left|\dfrac{e^{-\alpha x}\sin mx}{x}\right|\leq\dfrac{e^{-\alpha x}}{x},\ \ x\geq a,\ \ a>0,\right.$

iar $\displaystyle\int_a^\infty\frac{e^{-\alpha x}}{x}\,dx$ (C); asemănător pentru cealaltă integrală$\Big)$.

Rezultă conform Teoremei 3.2.13 că putem schimba ordinea de integrare:

$$I(\alpha,\beta,m)=\int_\alpha^\beta\left(\int_0^\infty e^{-xy}\sin mx\,dx\right)dy=\int_\alpha^\beta\frac{m}{m^2+y^2}\,dy$$

(vezi {§1, Problema 16, c)}).

Obţinem:

$I(\alpha,\beta,m)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{m}\Big|_\alpha^\beta=\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{m}-\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha}{m},\ \ \forall\,\alpha,\ \beta>0,\ \ m\in I\!\!R\setminus\{0\}.$

b) Deoarece $\dfrac{\operatorname{arctg} ax}{x}=\displaystyle\int_0^a\frac{dt}{x^2t^2+1}$ rezultă că:

$$I(a)=\int_0^1\left(\int_0^a\frac{dt}{x^2t^2+1}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Avem:

· funcţia $f(x,t)=\dfrac{1}{(x^2t^2+1)\sqrt{1-x^2}}$ este continuă pe $[0,1)\times[0,a]$;

· integrala $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2t^2+1)\sqrt{1-x^2}}$ este uniform convergentă în raport cu $t \in [0,a]$;

· integrala $\displaystyle\int_0^a \frac{dt}{(x^2t^2+1)\sqrt{1-x^2}}$ este uniform convergentă în raport cu $x \in [0,b]$, $\forall\, b,\ 0 < b < 1$;

· integrala $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^a \frac{dt}{(x^2t^2+1)}\right) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} ax}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx$ este convergentă.

Rezultă conform Teoremei 3.2.13 că putem schimba ordinea de integrare în $I(a)$, deci:

$$I(a) = \int_0^a \left(\int_0^1 \frac{dx}{(x^2t^2+1)\sqrt{1-x^2}}\right) dt.$$

Calculăm mai întâi integrala din interior, adică:

$$I(t) = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2t^2+1)\sqrt{1-x^2}} \overset{x=\sin u}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos u\, du}{\cos u(t^2\sin^2 u+1)} = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{t^2\sin^2 u+1} \overset{tg\, u=v}{=}$$

$$= \int_0^\infty \frac{dv}{\left(t^2\cdot\frac{v^2}{1+v^2}+1\right)(1+v^2)} = \int_0^\infty \frac{dv}{(t^2+1)v^2+1} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\cdot \operatorname{arctg} v\sqrt{t^2+1}\Big|_{v=0}^{v\to\infty} =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{t^2+1}}.$$

Deci $\displaystyle I(a) = \int_0^a \frac{\pi}{2\sqrt{t^2+1}}\, dt = \frac{\pi}{2}\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\Big|_0^a = \frac{\pi}{2}\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right),\ \ \forall\, a > 0.$

c) Avem $\displaystyle\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2} = \int_\alpha^\beta e^{-x^2y}\, dy$. Pentru $\alpha = \beta$, $I(\alpha,\beta) = 0$. Presupunem $\alpha \neq \beta$, $\alpha < \beta$ (în mod asemănător se tratează cazul $\alpha > \beta$). Deci:

$$I(\alpha,\beta) = \int_a^\infty x\cdot\left(\int_\alpha^\beta e^{-x^2y}\, dy\right) dx.$$

Avem:

· funcţia $f(x,y) = xe^{-x^2y}$, $x \in [a,\infty)$, $y \in [\alpha,\beta]$ este continuă pe $[a,\infty)\times[\alpha,\beta]$;

· integrala $\displaystyle\int_a^\infty xe^{-x^2y}\, dx$ este uniform convergentă în raport cu $y \in [\alpha,\beta]$;

· integrala $\displaystyle\int_\alpha^\beta xe^{-x^2y}\, dy$ este uniform convergentă în raport cu $x \in [a,b]$, $\forall\, b > a$;

· integrala $\displaystyle\int_a^\infty \left(\int_\alpha^\beta xe^{-x^2y}\, dy\right) dx = \int_a^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\, dx = \int_a^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}}{x}\, dx - \int_a^\infty \frac{e^{-\beta x^2}}{x}\, dx$ este convergentă.

Rezultă conform Teoremei 3.2.13 că putem schimba ordinea de integrare în $I(\alpha,\beta)$, adică avem:

$$I(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^\infty xe^{-x^2y}\, dx\right) dy = \int_\alpha^\beta \left(-\frac{1}{2}e^{-x^2y}\Big|_{x=a}^{x\to\infty}\right) dy = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}e^{-a^2y}\, dy =$$

$$= -\frac{1}{2a^2}e^{-a^2y}\Big|_\alpha^\beta = \frac{1}{2a^2}\left(e^{-\alpha a^2}-e^{-\beta a^2}\right),\ \ \forall\, \alpha,\ \beta > 0,\ \ a > 0.$$

**14.** Să se studieze şi apoi să se calculeze integralele lui Fresnel:

$$I = \int_0^\infty \sin x^2\, dx, \quad J = \int_0^\infty \cos x^2\, dx.$$

**Rezolvare.** Facem mai întâi o schimbare de variabilă $x^2 = t \Rightarrow x = \sqrt{t}$, $dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$, $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x \to \infty \Rightarrow t \to \infty$. Obţinem:

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\,dt, \quad J = \int_0^\infty \frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\,dt.$$

Aplicând pentru $I$ criteriul lui Dirichlet de la integrale improprii de primul tip, cu:

$\cdot\ f(t) = \sin t$, $\displaystyle\int_0^A f(t)\,dt = -\cos t\Big|_0^A = -\cos A + 1$, $\displaystyle\left|\int_0^A f(t)\,dt\right| \le 2$, $\forall\, A > 0$,

$\cdot\ g(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ monoton descrescătoare la 0 pentru $t \to \infty$,

şi analog pentru $J$, deducem că $\displaystyle\int_a^\infty \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\,dt$ şi $\displaystyle\int_a^\infty \frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\,dt$, $a > 0$ sunt convergente. Punctul 0 nu este punct singular pentru $I$ deoarece $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} = 0$.

Pentru integrala $J$, care este improprie şi de al doilea tip, avem:

$$\left|\frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\right| \le \frac{1}{2\sqrt{t}}, \text{ iar } \int_0^a \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt \text{ este convergentă.}$$

Deci $I$ şi $J$ sunt convergente (simplu convergente, vezi §1).

Pentru calculul acestor integrale să considerăm integrala:

$$\int_0^\infty e^{-tu^2}\,du \overset{\sqrt{t}u=x}{=} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Deci $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-tu^2}\,du$.

Să înmulţim relaţia de mai sus cu $e^{-kt} \cdot \sin t$, $k > 0$ arbitrar, momentan fixat şi s-o integrăm în raport cu $t$ pe $[0, \infty)$:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-kt}}{\sqrt{t}} \cdot \sin t\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-kt} \left(\int_0^\infty e^{-tu^2} \cdot \sin t\,du\right) dt \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-kt} \cdot \sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(k+u^2)t} \cdot \sin t\,du\right) dt.$$

Demonstrăm în continuare că putem schimba ordinea de integrare în ultima integrală de mai sus, conform Teoremei 3.2.13. Integralele:

$$\int_0^\infty e^{-(k+u^2)t} \cdot \sin t\,dt \quad \text{şi} \quad \int_0^\infty e^{-(k+u^2)t} \cdot \sin t\,du$$

sunt uniform convergente pe $[0, a] \ni u$, $\forall\, a > 0$, respectiv pe $[0, b] \ni t$, $\forall\, b > 0$, iar integrala:

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(k+u^2)t} \cdot \sin t\,du\right) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-kt} \cdot \sin t}{\sqrt{t}}\,dt$$

este (absolut) convergentă.

Rezultă conform Teoremei 3.2.13 că şi integrala:

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(k+u^2)t} \cdot \sin t\,dt\right) du$$

este convergentă şi ultimele două integrale sunt egale, deci:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-kt}\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(k+u^2)t}\cdot \sin t\,dt\right)du.$$

Deoarece $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t}\cdot \sin t\,dt = \frac{1}{1+\alpha^2}$ deducem că:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-kt}\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{du}{1+(k+u^2)^2}.$$

În continuare vom trece la limită pentru $k\to 0$ în integralele din relaţia de mai sus. Pentru prima integrală avem:

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-kt}\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ este uniform convergentă pe $[0,a]\ni k,\ \ a>0$ şi

$$g(t,k)=\begin{cases}\dfrac{e^{-kt}\sin t}{\sqrt{t}}, & \text{dacă } t\neq 0,\\ 0, & \text{dacă } t=0\end{cases} \longrightarrow h(t)=\begin{cases}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}, & \text{dacă } t\neq 0,\\ 0, & \text{dacă } t=0,\end{cases}$$

pentru $k\to 0$, uniform în raport cu $t\in[0,b]$, $b>0$, ($g$ este o funcţie continuă pe $[0,b]\times[0,a]$).

Rezultă că $\displaystyle\exists \lim_{k\to 0}\int_0^\infty \frac{e^{-kt}\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt.$

Pentru a doua integrală avem:

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{du}{1+(k+u^2)^2}$ este uniform convergentă în raport cu $k\in[0,a]$, $a>0$

şi $\displaystyle\frac{1}{1+(k+u^2)^2}\to\frac{1}{1+u^4}$, $k\to 0$, uniform în raport cu $u\in[0,b]$, $b>0$.

Rezultă că $\displaystyle\exists \lim_{k\to 0}\int_0^\infty \frac{du}{1+(k+u^2)^2} = \int_0^\infty \frac{du}{1+u^4}.$

Obţinem astfel relaţia:

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{du}{1+u^4}.$$

Conform {§1, Problema 3, f)}, din egalitatea de mai sus deducem:

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}.$$

Deci $\displaystyle I=\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

În mod asemănător se arată că:

$$J=\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

## PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

**15.** Să se calculeze următoarele integrale, folosind derivarea sub semnul integrală:

a) $\displaystyle I(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx$, $|a|<1$;

b) $I(a)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx,\ \ a\geq 0;$

c) $I(x)=\displaystyle\int_0^{2\pi}\ln(1-x\cos t)\,dt,\ \ |x|<1;$

d) $I(a)=\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\,dx,\ \ a\in I\!\!R.$

**16.** Să se calculeze integrala $f(\lambda)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\operatorname{tg}x+\lambda},\ \lambda>0$ şi apoi să se deducă valoarea integralei $I(\lambda)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{(\operatorname{tg}x+\lambda)^2}.$

**17.** Folosind integrarea sub semnul integrală să se calculeze:

$$I(a,b)=\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx;\ \ a>0,\ \ b>0.$$

**18.** Să se găsească derivatele $E'$ şi $F'$ ale funcţiilor:

$$E(a)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-a^2\sin^2 x}\,dx,\quad F(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-a^2\sin^2 x}},\quad a\in(0,1)$$

şi să se exprime aceste derivate cu ajutorul lui $E(a)$ şi $F(a)$. Apoi să se arate că:

$$E''(a)+\frac{1}{a}E'(a)+\frac{E(a)}{1-a^2}=0.$$

**19.** Dacă funcţia reală $f$ este continuă pe $[0,a]$, să se demonstreze că funcţia:

$$F(x,y,z)=\int_0^a\frac{f(t)}{\sqrt{(x-t)^2+y^2+z^2}}\,dt$$

verifică ecuaţia lui Laplace $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}=0$, pentru $\forall\,(x,y,z)\in I\!\!R^3$ cu $(x-t)^2+y^2+z^2\neq 0,\ \forall\,t\in[0,a]$.

**20.** Să se arate că funcţia lui Bessel de indice întreg $n$:

$$I_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\,d\varphi$$

verifică ecuaţia lui Bessel $x^2I_n''(x)+xI_n'(x)+(x^2-n^2)I_n(x)=0,\ \ x\neq 0.$

**21.** Să se studieze în intervalele indicate convergenţa uniformă a următoarelor integrale:

a) $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\sin x\,dx,\ \ \alpha\in[\alpha_0,\infty),\ \ \alpha_0>0;$ b) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}\,dx,\ \ \alpha\geq 0;$

c) $\displaystyle\int_0^{2}\frac{x^{\alpha}}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}\,dx,\ \ |\alpha|<1;$ d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-\alpha)^2}\,dx$ pentru d$_1$) $a<\alpha<b$ , d$_2$) $\alpha\in I\!\!R.$

**22.** Folosind derivarea sub semnul integrală să se calculeze următoarele integrale:

a) $I(a)=\displaystyle\int_0^{1}\frac{\ln(1-ax^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ \ |a|<1;$ b) $I(\lambda)=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(\lambda x)}{x(1+x^2)}\,dx,\ \ \lambda\geq 0;$

c) $I(\alpha)=\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(\alpha x)}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx,\ \ \alpha\geq 0;$ d) $I(\alpha,\beta)=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\ln(x^2+\alpha^2)}{x^2+\beta^2}\,dx,\ \ \alpha,\,\beta>0.$

**23.** Să se calculeze, folosind derivarea sub semnul integrală, următoarele integrale:

a) $I(\alpha,\beta)=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(\alpha x)\cdot\operatorname{arctg}(\beta x)}{x^2}\,dx,\ \ \alpha,\,\beta>0;$

b) $I(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2) \cdot \ln(1+\beta^2 x^2)}{x^4}\, dx, \quad \alpha,\, \beta > 0.$

**24.** Folosind integrarea sub semnul integrală să se calculeze următoarele integrale:

a) $I(\alpha, \beta, m) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cdot \cos mx\, dx; \quad \alpha,\, \beta > 0, \quad m \neq 0;$

b) $I(a, b, c) = \int_0^\infty \frac{1}{x} e^{-ax} \cdot (\cos bx - \cos cx)\, dx; \quad a > 0; \quad b,\, c \in I\!\!R;$

c) $I(a, b, c) = \int_0^\infty \frac{1}{x} e^{-ax} \cdot (\sin bx - \sin cx)\, dx; \quad a > 0; \quad b,\, c \in I\!\!R.$

# §3. INTEGRALELE LUI EULER

Integralele:

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1}\, dx, \quad p,\, q \in I\!\!R \quad \text{şi}$$

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} \cdot e^{-x}\, dx, \quad p \in I\!\!R$$

se numesc *integralele lui Euler de primul tip*, respectiv *de al doilea tip* (sau *funcţiile beta*, respectiv *gama* ale lui Euler).

## PROBLEME REZOLVATE

**1.** Să se demonstreze că:

a) $B(p, q)$ este convergentă pentru $p > 0$ şi $q > 0$ şi în rest divergentă;

b) $\Gamma(p)$ este convergentă pentru $p > 0$ şi divergentă pentru $p \leq 0$;

c) integrala $\Gamma(p)$ depinzând de parametrul $p$ este uniform convergentă pe orice segment $[a, b] \subset (0, \infty)$.

**Rezolvare.** a) Dacă $p - 1 \geq 0 \Leftrightarrow p \geq 1$ şi $q - 1 \geq 0 \Leftrightarrow q \geq 1$ atunci $B(p, q)$ este o integrală proprie, deci convergentă. Dacă $p - 1 < 0 \Leftrightarrow p < 1$ sau $q - 1 < 0 \Leftrightarrow q < 1$ atunci $B(p, q)$ este o integrală improprie de al doilea tip cu $x = 0$ punct singular sau $x = 1$ punct singular. Avem:

$$B(p, q) = \int_0^a x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1}\, dx + \int_a^1 x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1}\, dx, \ \ 0 < a < 1.$$

Integrala $I_1 = \int_0^a x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1}\, dx = \int_0^a \frac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}}\, dx$ este convergentă dacă şi numai dacă $1-p<1 \Leftrightarrow p>0$, iar integrala $I_2 = \int_a^1 x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1}\, dx = \int_a^1 \frac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}}\, dx$ este convergentă dacă şi numai dacă $1-q<1 \Leftrightarrow q>0$.

Deci $B(p,q)$ este convergentă pentru $p>0$ şi $q>0$, în rest fiind divergentă.

b) Dacă $p-1 \geq 0 \Leftrightarrow p \geq 1$ integrala $\Gamma(p)$ este improprie de primul tip, convergentă, deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha} \cdot x^{p-1}e^{-x} = 0$, $\forall \alpha \in I\!R$. Dacă $p<1$ atunci $\Gamma(p)$ este improprie de ambele tipuri. O descompunem astfel:

$$\Gamma(p) = \int_0^a x^{p-1} \cdot e^{-x}\, dx + \int_a^{\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x}\, dx, \quad 0<a<1.$$

Integrala $I_1 = \int_0^a \frac{e^{-x}}{x^{1-p}}\, dx$ este convergentă pentru $1-p<1 \Leftrightarrow p>0$, iar $I_2 =$ $= \int_a^{\infty} x^{p-1}e^{-x}\, dx$ este convergentă pentru $\forall p \in I\!R$ după cum am văzut mai sus.

Deducem astfel că $\Gamma(p)$ este convergentă pentru $p>0$ şi divergentă pentru $p \leq 0$.

c) Să considerăm un interval $[a,b] \subset (0,\infty)$ arbitrar, momentan fixat $(0<a<b)$. Avem:

$$\Gamma(p) = \underbrace{\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}\, dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{\infty} x^{p-1}e^{-x}\, dx}_{I_2}.$$

Pentru $I_1$ avem $x^{p-1}e^{-x} \leq x^{a-1}e^{-x}$, $\forall x \in (0,1]$, $\forall p \in [a,b]$, iar integrala $\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}\, dx$ este convergentă $(1-a<1 \Leftrightarrow a>0)$. Rezultă astfel că $I_1$ este uniform convergentă în raport cu $p \in [a,b]$.

Pentru $I_2$ avem inegalitatea $x^{p-1}e^{-x} \leq x^{b-1}e^{-x}$, $\forall x \in [1,\infty)$, $\forall p \in [a,b]$, iar integrala $\int_1^{\infty} x^{b-1}e^{-x}\, dx$ este convergentă. Rezultă că şi $I_2$ este uniform convergentă pe $[a,b]$, deci $\Gamma(p)$ este uniform convergentă pe $[a,b]$.

**2.** Să se demonstreze următoarele proprietăţi ale integralelor lui Euler:

a) $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, $\forall p>0$; b) $\Gamma(n) = (n-1)!\,$, $\forall n \in I\!N^*$; c) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$;

d) $qB(p+1,q) = pB(p,q+1)$, $\forall p,\, q>0$;

e) $B(p+1,q) + B(p,q+1) = B(p,q)$, $\forall p,\, q>0$;

f) $B(p,q) = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\, dt$.

**Rezolvare.** a) Avem:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}\, dx = \frac{1}{p}\int_0^{\infty} (x^p)'e^{-x}\, dx = \frac{1}{p}x^pe^{-x}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{p}\int_0^{\infty} x^pe^{-x}\, dx = \frac{1}{p}\Gamma(p+1),$$

deci $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, $\forall p>0$.

b) Folosind relaţia de la punctul a) obţinem:

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \cdots = (n-1)!\,\Gamma(1),$$

iar $\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}\,dx=-e^{-x}\Big|_0^\infty=1$. Deci $\Gamma(n)=(n-1)!,\ \forall\, n\in I\!N^*$.

c) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\int_0^\infty x^{-1/2}e^{-x}\,dx$. Notăm $x=u^2,\ \ dx=2u\,du$. Rezultă:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty u^{-1}e^{-u^2}\cdot 2u\,du=2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du=2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi},$$

(am folosit integrala lui Euler-Poisson).

d) Avem:

$$qB(p+1,q)=q\int_0^1 x^p\cdot(1-x)^{q-1}\,dx=-\int_0^1 x^p\cdot[(1-x)^q]'\,dx=-x^p\cdot(1-x)^q\Big|_0^1+$$

$$+p\int_0^1 x^{p-1}\cdot(1-x)^q\,dx=pB(p,q+1),\ \ \forall\, p,\ q>0.$$

e) $B(p+1,q)+B(p,q+1)=\int_0^1 x^p\cdot(1-x)^{q-1}\,dx+\int_0^1 x^{p-1}\cdot(1-x)^q\,dx=$

$$=\int_0^1 x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}(x+1-x)\,dx=\int_0^1 x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}\,dx=B(p,q),\ \ \forall\, p,\ q>0.$$

f) Facem schimbarea de variabilă $x=\dfrac{t}{1+t}\ \ (t>0)\Rightarrow t=\dfrac{x}{1-x},\ \ dx=\dfrac{dt}{(1+t)^2}$; $x=0\Rightarrow t=0,\ \ x\to 1_-\Rightarrow t\to\infty$. Rezultă:

$$B(p,q)=\int_0^\infty\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p-1}}\left(1-\frac{t}{1+t}\right)^{q-1}\cdot\frac{1}{(1+t)^2}\,dt=\int_0^\infty\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt.$$

**3.** Să se demonstreze următoarea relaţie dintre funcţiile beta şi gama:

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\quad p,\ q>0.$$

**Rezolvare.** Avem:

$$\Gamma(p+q)\cdot B(p,q)=\Gamma(p+q)\int_0^1 x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}\,dx=\Gamma(p+q)\int_0^\infty\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt=$$

$$=\int_0^\infty\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\left(\int_0^\infty x^{p+q-1}\cdot e^{-x}\,dx\right)dt=\int_0^\infty\underbrace{\left(\int_0^\infty\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\cdot x^{p+q-1}e^{-x}\,dx\right)}_{I_1}dt.$$

În integrala $I_1$ facem schimbarea de variabilă $x=(1+t)u,\ \ t>0$. Obţinem:

$$I_1=\int_0^\infty\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\cdot(1+t)^{p+q-1}\cdot u^{p+q-1}e^{-(1+t)u}(1+t)\,du=\int_0^\infty t^{p-1}u^{p+q-1}\cdot e^{-(1+t)u}\,du.$$

Deci $\Gamma(p+q)\cdot B(p,q)=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty t^{p-1}u^{p+q-1}e^{-(1+t)u}\,du\right)dt.$

Schimbând ordinea de integrare în integrala de mai sus, obţinem:

$$\Gamma(p+q)\cdot B(p,q)=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty t^{p-1}u^{p+q-1}e^{-(1+t)u}\,dt\right)du=$$

$$=\int_0^\infty u^{p+q-1}\underbrace{\left(\int_0^\infty t^{p-1}e^{-(1+t)u}\,dt\right)}_{I_2}du.$$

În integrala $I_2$ de mai sus facem schimbarea de variabilă $tu=\tau,\ \ u>0$. Rezultă:

$$I_2=\int_0^\infty\frac{\tau^{p-1}}{u^{p-1}}\cdot e^{-u-\tau}\cdot\frac{d\tau}{u}=\frac{e^{-u}}{u^p}\int_0^\infty\tau^{p-1}e^{-\tau}\,d\tau.$$

Deci:

$$\Gamma(p+q)\cdot B(p,q)=\int_0^\infty u^{p+q-1}\cdot\frac{e^{-u}}{u^p}\left(\int_0^\infty \tau^{p-1}e^{-\tau}\,d\tau\right)du=\left(\int_0^\infty u^{q-1}e^{-u}\,du\right)\times$$
$$\times\left(\int_0^\infty \tau^{p-1}e^{-\tau}\,d\tau\right)=\Gamma(p)\cdot\Gamma(q).$$

**4.** Să se demonstreze formula:
$$B(p,1-p)=\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin(p\pi)},\ \ \forall\, p\in(0,1),$$
(formula complementelor).

**Rezolvare.** Deoarece prima parte a relaţiei de mai sus a fost demonstrată în Problema 3, rămâne să arătăm că:
$$B(p,1-p)=\frac{\pi}{\sin(p\pi)},\ \ \forall\, p\in(0,1)\quad\text{sau}\quad\int_0^\infty\frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt=\frac{\pi}{\sin(p\pi)},\ \ \forall\, p\in(0,1).$$

Pentru aceasta vom folosi dezvoltarea în serie Fourier a funcţiei $f:[-\pi,\pi]\to I\!R$, $f(x)=\cos px,\ \ p\in I\!R\setminus Z$. Fiind o funcţie pară, coeficienţii $b_n=0,\ \ \forall\, n\in I\!N^*$, iar:
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos px\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos px\,dx=\frac{2}{p\pi}\sin px\Big|_0^{\pi}=\frac{2\sin p\pi}{p\pi},$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos px\cdot\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos px\cdot\cos nx\,dx=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(p+n)x+\cos(p-n)x]\,dx=\frac{1}{\pi(p+n)}\sin(p+n)x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{\pi(p-n)}\sin(p-n)x\Big|_0^{\pi}=$$
$$=\frac{(-1)^n\sin p\pi}{\pi}\left(\frac{1}{p+n}+\frac{1}{p-n}\right)=\frac{(-1)^n2p}{\pi(p^2-n^2)}\sin p\pi,\ \ n\ge 1.$$

Deoarece $f$ este continuă, iar derivata sa are un număr finit de puncte de discontinuitate de specia întâi (deci este netedă pe porţiuni) rezultă, conform {Capitolul 2, §4, Teorema 2.4.1} că seria Fourier asociată lui $f$:
$$\frac{\sin p\pi}{p\pi}-\frac{\sin p\pi}{\pi}\cdot\frac{2p}{p^2-1^2}\cos x+\frac{\sin p\pi}{\pi}\cdot\frac{2p}{p^2-2^2}\cos 2x+\cdots+\frac{(-1)^n\sin p\pi}{\pi}\cdot\frac{2p}{p^2-n^2}\cos nx+\cdots$$
este convergentă în $\forall\, x\in[-\pi,\pi]$ şi suma sa este $f(x)$. Deci:
$$f(x)=\frac{\sin p\pi}{\pi}\left[\frac{1}{p}-\frac{2p}{p^2-1}\cos x+\frac{2p}{p^2-2^2}\cos 2x+\cdots+\frac{2p\cdot(-1)^n}{p^2-n^2}\cos nx+\cdots\right],$$
$\forall\, x\in[-\pi,\pi]$. Pentru $x=0$ rezultă:
$$\frac{\pi}{\sin p\pi}=\frac{1}{p}+\frac{2}{1-p^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2p}{n^2-p^2}+\cdots.$$

Scriind fracţia $\dfrac{2p}{n^2-p^2}$ sub forma $\dfrac{2p}{n^2-p^2}=\dfrac{1}{n-p}-\dfrac{1}{n+p}=\dfrac{1}{(n-1)+(1-p)}-$ $-\dfrac{1}{n+p}$ şi notând cu $g(p)$ suma seriei alternate:
$$g(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}-\cdots+\frac{(-1)^n}{p+n}+\cdots$$
rezultă relaţia:
$$\frac{\pi}{\sin p\pi}=g(p)+g(1-p).$$

În continuare revenim la integrala $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt$, $0<p<1$, pe care o descompunem în:

$$\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt = \underbrace{\int_0^1 \frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt}_{I_2}.$$

În integrala a doua $I_2$ facem schimbarea de variabilă $\dfrac{1}{t}=u$. Rezultă:

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{u^{p-1}\cdot\left(1+\frac{1}{u}\right)}\cdot\frac{du}{u^2} = \int_0^1 \frac{du}{u^p(1+u)} = \int_0^1 \frac{u^{-p}}{1+u}\,du.$$

Deci $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt = \int_0^1 \frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt + \int_0^1 \frac{u^{-p}}{1+u}\,du.$

Notând cu $h(p)=\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt$, obţinem următoarea relaţie:

$$\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt = h(p)+h(1-p),\quad 0<p<1.$$

Vom arăta în continuare că funcţiile $g$ şi $h$ sunt identice, de unde va rezulta relaţia dorită, adică:

$$\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{\sin(p\pi)},\quad \forall\, 0<p<1.$$

Pentru aceasta pornim de la dezvoltarea:

$$\frac{1}{1+t} = 1-t+t^2-\cdots+(-1)^n t^n + \frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t},$$

relaţie pe care o înmulţim cu $t^{p-1}$ şi o integrăm pe $[0,1]$. Obţinem:

$$h(p)=\int_0^1 \frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt = \int_0^1 t^{p-1}\,dt - \int_0^1 t^p\,dt + \cdots + (-1)^n \int_0^1 t^{n+p-1}\,dt + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+p}}{1+t}\,dt.$$

Deci $\displaystyle h(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+p} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+p}}{1+t}\,dt.$

Pentru ca $h(p)=g(p)$, adică $h(p)$ să fie suma seriei $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+p}$ este suficient să demonstrăm că integrala:

$$\int_0^1 \frac{t^{n+p}}{1+t}\,dt \to 0, \text{ pentru } n\to\infty, \text{ uniform în raport cu } p.$$

Dar $\dfrac{t^{n+p}}{1+t} \le t^{n+p}$, $\forall\, t\in[0,1]$, $\forall\, p\in(0,1)$, iar:

$$\int_0^1 t^{n+p}\,dt = \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} \to 0, \text{ pt. } n\to\infty, \text{ uniform în raport cu } p.$$

Rezultă astfel că $h(p)=g(p)$, $\forall\, p\in(0,1)$.

**5.** Să se exprime cu ajutorul integralei lui Euler de primul tip următoarele integrale:

a) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x^{p-1}\cdot(1-x^m)^{q-1}\,dx$; $p,\,q,\,m>0$;

b) $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{p-1}x\cdot\cos^{q-1}x\,dx$; $p,\,q>0$.

**Rezolvare.** a) Făcând substituţia $x^m=y$, obţinem:

$$I_1 = \int_0^1 y^{(p-1)/m}\cdot(1-y)^{q-1}\cdot\frac{1}{m}y^{1/m-1}\,dy = \frac{1}{m}\int_0^1 y^{p/m-1}\cdot(1-y)^{q-1}\,dy = \frac{1}{m}B\left(\frac{p}{m},q\right) =$$
$$= \frac{1}{m}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{p}{m}+q\right)}.$$

b) Facem substituţia $\sin^2 x = y$; avem:

$$I_2 = \int_0^1 y^{(p-1)/2}\cdot(1-y)^{(q-1)/2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y}}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y^{p/2-1}\cdot(1-y)^{q/2-1}\,dy =$$
$$= \frac{1}{2}B\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}.$$

În particular pentru $q=1$ obţinem:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{p-1}x\,dx = \frac{1}{2}B\left(\frac{p}{2},\frac{1}{2}\right),$$

iar pentru $p=1$ avem:

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{q-1}x\,dx = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{q}{2}\right).$$

**6.** Să se stabilească relaţia:

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\,\Gamma(2p),$$

(formulele lui Legendre).

**Rezolvare.** Plecăm de la funcţia $B(p,p)$:

$$B(p,p) = \int_0^1 x^{p-1}\cdot(1-x)^{p-1}\,dx = \int_0^1[x(1-x)]^{p-1}\,dx = \int_0^1\left(-x^2+x-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^{p-1}dx =$$
$$= \int_0^1\left[-\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]^{p-1}dx = \frac{1}{2^{2(p-1)}}\int_0^1[-(2x-1)^2+1]^{p-1}\,dx =$$
$$= \frac{2}{2^{2(p-1)}}\int_0^{1/2}[-(2x-1)^2+1]^{p-1}\,dx.$$

Facem în continuare substituţia $(2x-1)^2 = y \Rightarrow 1-2x = \sqrt{y} \geq 0$. Obţinem:

$$B(p,p) = \frac{1}{2^{2p-3}}\int_0^1(1-y)^{p-1}\cdot\frac{1}{4\sqrt{y}}\,dy = \frac{1}{2^{2p-1}}\int_0^1 y^{-1/2}\cdot(1-y)^{p-1}\,dy =$$
$$= \frac{1}{2^{2p-1}}B\left(\frac{1}{2},p\right).$$

Dar $B(p,p) = \dfrac{\Gamma^2(p)}{\Gamma(2p)}$, iar $B\left(\dfrac{1}{2},p\right) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(p)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)}$.

Din relaţiile de mai sus obţinem:

$$\frac{\Gamma^2(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{1}{2^{2p-1}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(p)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} \Leftrightarrow \Gamma(p)\cdot\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p).$$

**7.** Să se exprime cu ajutorul integralei lui Euler de al doilea tip următoarea integrală:

$$I_m = \int_0^\infty x^m\cdot e^{-\alpha x^2}\,dx,\quad \alpha>0,\ m>-1.$$

**Rezolvare.** Facem substituţia $\alpha x^2 = y > 0$. Obţinem:

$$I_m = \int_0^\infty\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{m/2}\cdot e^{-y}\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\,y^{-1/2}\,dy = \frac{1}{2\alpha^{(m+1)/2}}\int_0^\infty y^{(m-1)/2}\cdot e^{-y}\,dy =$$

$= \dfrac{1}{2\alpha^{(m+1)/2}}\,\Gamma\left(\dfrac{m+1}{2}\right).$

Pentru $m = 0$ avem:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}},$$

iar pentru $\alpha = 1$ integrala de mai sus este integrala Euler-Poisson (vezi {§1, Problema 7}):

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

**8.** Să se calculeze folosind funcţia $B$ integrala:

$$I = \int_0^1 x^{p-1}\cdot(1-x)^{-p}\frac{dx}{x+\alpha},\quad 0 < p < 1,$$

unde $\alpha \in I\!R \setminus (-1,0)$.

**Rezolvare.** Se face o schimbare de variabilă de forma $x = \dfrac{at+b}{ct+d}$ cu $ad - bc \neq 0$ (această transformare se numeşte *transformare omografică*). Vom determina $a$, $b$, $c$, $d$ astfel încât în urma acestei tranformări intervalul pentru noua variabilă $t$ să fie tot $(0,1)$.

Pentru $t = 0$ obţinem $x = 0$ de îndată ce $b = 0$. Deci $x = \dfrac{at}{ct+d}$. Pentru $t = 1 \Rightarrow$ $x = \dfrac{a}{c+d} = 1$ pentru $d = a - c$. Obţinem astfel $x = \dfrac{at}{ct+a-c}$. Apoi:

$1 - x = 1 - \dfrac{at}{ct+a-c} = \dfrac{(c-a)(t-1)}{ct+a-c}$, iar $x + \alpha = \dfrac{at}{ct+a-c} + \alpha = \dfrac{(a+c\alpha)t+(a-c)\alpha}{ct+a-c}$.

Alegem $c = -1$ şi determinăm pe $a$ astfel încât $x + \alpha$ să se simplifice. Avem:

$$x = \frac{at}{-t+a+1},\quad 1 - x = \frac{(-1-a)(t-1)}{-t+a+1},\quad x + \alpha = \frac{(a-\alpha)t+(a+1)\alpha}{-t+a+1}.$$

Pentru $a = \alpha$ obţinem $x = \dfrac{\alpha t}{\alpha+1-t}$, $1 - x = \dfrac{-(\alpha+1)(t-1)}{\alpha+1-t}$, $x + \alpha = \dfrac{(\alpha+1)\alpha}{\alpha+1-t}$, iar $dx = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+1-t)^2}\,dt$. Atunci:

$$I = \int_0^1 \frac{\alpha^{p-1}t^{p-1}}{(\alpha+1-t)^{p-1}}\cdot\frac{(\alpha+1)^{-p}\cdot(1-t)^{-p}}{(\alpha+1-t)^{-p}}\cdot\frac{\alpha+1-t}{\alpha(\alpha+1)}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+1-t)^2}\,dt =$$

$$= \frac{\alpha^{p-1}}{(\alpha+1)^p}\int_0^1 t^{p-1}\cdot(1-t)^{-p}\,dt = \frac{\alpha^{p-1}}{(\alpha+1)^p}B(p,1-p) = \frac{\alpha^{p-1}}{(\alpha+1)^p}\cdot\frac{\pi}{\sin(p\pi)} =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\cdot\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^p\cdot\frac{\pi}{\sin(p\pi)}.$$

**9.** Să se calculeze cu ajutorul integralei lui Euler $B$ următoarea integrală:

$$I = \int_0^1 \frac{x^{a-1}\cdot(1-x)^{b-1}}{(x+p)^{a+b}}\,dx;\quad a,\ b > 0,\ \ p \in I\!R \setminus (-1,0).$$

**Rezolvare.** Facem substituţia $t = (1+p)\dfrac{x}{x+p} \Rightarrow x = \dfrac{tp}{p+1-t}$, $1 - x = \dfrac{(p+1)(1-t)}{p+1-t}$, $x + p = \dfrac{p(p+1)}{p+1-t}$, $dx = \dfrac{p(p+1)}{(p+1-t)^2}$.

Atunci:

$$I = \int_0^1 \frac{t^{a-1}p^{a-1}}{(p+1-t)^{a-1}} \cdot \frac{(p+1)^{b-1}\cdot(1-t)^{b-1}}{(p+1-t)^{b-1}} \cdot \frac{(p+1-t)^{a+b}}{p^{a+b}\cdot(p+1)^{a+b}} \cdot \frac{p(p+1)}{(p+1-t)^2} =$$

$$= \frac{1}{p^b(p+1)^a}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt = \frac{1}{(1+p)^a p^b}B(a,b).$$

**10.** Să se calculeze folosind integralele lui Euler următoarele integrale:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$; b) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$; c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+x)}$; d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x^2)^2}\,dx$;

e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx$; f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt[5]{x}}{(x^2+1)(x+1)^2}\,dx$; g) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$;

h) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{tg}^p x\,dx,\ \ |p|<1$; i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$; j) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x+1}\,dx$.

**Rezolvare.** a) Notăm $x^3 = t \Rightarrow x = t^{1/3},\ \ dx = \dfrac{1}{3}t^{-2/3}\,dt$. Rezultă:

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{3}t^{-2/3}\frac{dt}{1+t} = \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{t^{-2/3}}{1+t}\,dt.$$

În continuare facem schimbarea de variabilă $t = \dfrac{v}{1-v} \Rightarrow v = \dfrac{t}{1+t}$, $dt = \dfrac{dv}{(1-v)^2}$, $(1+t) = \dfrac{1}{1-v}$. Obţinem:

$$I = \frac{1}{3}\int_0^1 v^{-2/3}(1-v)^{2/3}(1-v)\frac{dv}{(1-v)^2} = \frac{1}{3}\int_0^1 v^{-2/3}(1-v)^{-1/3}\,dv = \frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

b) Avem:

$$I = \int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx = \int_0^1 x^{1/2}(1-x)^{1/2}\,dx = B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{2!} =$$

$$= \frac{1}{8}(\sqrt{\pi})^2 = \frac{\pi}{8}.$$

c) Facem substituţia $x = \dfrac{t}{1-t} \Rightarrow t = \dfrac{x}{1+x}$, $dx = \dfrac{dt}{(1-t)^2}$, $1+x = \dfrac{1}{1-t}$. Rezultă:

$$I = \int_0^1 (1-t)^{1/3}t^{-1/3}(1-t)\frac{1}{(1-t)^2}\,dt = \int_0^1 t^{-1/3}(1-t)^{-2/3}\,dt = B\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

d) Notăm $x = \sqrt{t}$. Rezultă:

$$I = \int_0^\infty \frac{t^{1/6}}{(1+t)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{t^{-1/3}}{(1+t)^2}\,dt.$$

Facem în continuare substituţia $t = \dfrac{y}{1-y} \Rightarrow y = \dfrac{t}{1+t}$, $dt = \dfrac{dy}{(1-y)^2}$, $1+t = \dfrac{1}{1-y}$. Atunci:

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 y^{-1/3}(1-y)^{1/3}(1+y)^2\cdot\frac{dy}{(1-y)^2}=\frac{1}{2}\int_0^1 y^{-1/3}(1-y)^{1/3}\,dy=\frac{1}{2}B\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{1!}=\frac{1}{6}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

e) Notăm $x=\dfrac{t}{1-t}$, $t=\dfrac{x}{1+x}$, $1+x=\dfrac{1}{1-t}$, $dx=\dfrac{dt}{(1-t)^2}$. Rezultă:

$$I=\int_0^1 t^{1/4}(1-t)^{-1/4}(1-t)^2\frac{dt}{(1-t)^2}=\int_0^1 t^{1/4}(1-t)^{-1/4}\,dt=B\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

f) Avem $\dfrac{1}{(x^2+1)(x+1)^2}=\dfrac{1}{2x}\left[\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right]$. Atunci:

$$I=\int_0^\infty\frac{\sqrt[5]{x}}{2x}\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx-\int_0^\infty\frac{\sqrt[5]{x}}{2x}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty x^{-4/5}\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty x^{-4/5}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}\,dx.$$

Pentru $I_1=\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^{-4/5}}{x^2+1}\,dx$, notăm $x^2=\dfrac{t}{1-t}\Rightarrow x=\sqrt{\dfrac{t}{1-t}}$, $dx=\dfrac{1}{2\sqrt{\frac{t}{1-t}}}\times$ $\times\dfrac{dt}{(1-t)^2}$. Deci:

$$I_1=\int_0^1 t^{-4/10}\cdot(1-t)^{4/10}\cdot(1-t)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{t}{1-t}}}\cdot\frac{dt}{(1-t)^2}=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{-9/10}\cdot(1-t)^{-1/10}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{10},\frac{9}{10}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{10}}.$$

Pentru $I_2=\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^{-4/5}}{(x+1)^2}\,dx$, notăm $x=\dfrac{t}{1-t}\Rightarrow x+1=\dfrac{1}{1-t}$, $dx=\dfrac{1}{(1-t)^2}\,dt$. Deci:

$$I_2=\int_0^1 t^{-4/5}\cdot(1-t)^{4/5}\cdot(1-t)^2\cdot\frac{1}{(1-t)^2}\,dt=B\left(\frac{1}{5},\frac{9}{5}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)\Gamma\left(\frac{9}{5}\right)}{\Gamma(2)}=$$

$$=\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{4}{5}\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{4}{5}\cdot\frac{\pi}{5\sin\frac{\pi}{5}}.$$

Rezultă că $I=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{10}}-\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{5}}$.

g) $$I=\int_{-1}^1 x^2\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx=\int_{-1}^1 x^2\cdot\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int_{-1}^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx-\int_{-1}^1\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Pentru $I_1=\displaystyle\int_{-1}^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=2\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ facem substituţia $x^2=t\Rightarrow x=$ $=\sqrt{t}$, $dx=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$. Deci:

$$I_1=2\int_0^1\frac{t}{\sqrt{1-t}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt=\int_0^1 t^{1/2}(1-t)^{-1/2}\,dt=B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Pentru $I_2 = \int_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \underbrace{\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}_{not.\ -x=t} + \int_{0}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int_{0}^{1} \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\,dt +$

$+\int_{0}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0.$

Deci $I = \frac{\pi}{2}$.

h) Avem:

$$I = \int_0^{\pi/2} \mathrm{tg}^p x\,dx \overset{tg\,x=t}{=} \int_0^\infty t^p \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^\infty \frac{t^p}{1+t^2}\,dt.$$

Notăm în continuare $t^2 = \frac{u}{1-u} \Rightarrow t^2+1 = \frac{1}{1-u},\ dt = \frac{1}{2\sqrt{\frac{u}{1-u}}} \cdot \frac{1}{(1-u)^2}\,du.$

Deci:

$$I = \int_0^1 u^{p/2}(1-u)^{-p/2}(1-u)\frac{1}{2\sqrt{u}}\sqrt{1-u}\frac{du}{(1-u)^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{(p-1)/2}(1-u)^{(-p-1)/2}\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 u^{(p+1)/2-1}(1-u)^{(1-p)/2-1}\,du = \frac{1}{2}B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{1-p}{2}\right) = \frac{\pi}{2\,\sin\frac{(p+1)\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\,\cos\frac{p\pi}{2}},$$

$p \in (-1,1)$.

i) Avem $I = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x^2(1-x)}} = \int_0^1 x^{-2/3}\cdot(1-x)^{-1/3}\cdot\frac{dx}{x+1}.$

Aplicăm Problema 8 cu $\alpha = 1,\ p = \frac{1}{3}$. Rezultă:

$$I = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{3}/2} = \frac{2\pi}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}}.$$

j) Avem $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x(1-x)}{(x+1)\sqrt{x(1-x)}}\,dx.$

Apoi $\frac{x(1-x)}{x+1} = 2 - x - \frac{2}{x+1}$. Deci:

$$I = \int_0^1 2x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}\,dx - \int_0^1 x^{1/2}(1-x)^{-1/2}\,dx - 2\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x(1-x)}} =$$

$$= 2B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) - B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) - 2\int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}\frac{dx}{x+1} = 2\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} - \frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} -$$

$$-2\int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}\frac{dx}{x+1} = 2\pi - \frac{\pi}{2} - 2\int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}\cdot\frac{dx}{x+1}.$$

Pentru ultima integrală aplicăm Problema 8 cu $p = \frac{1}{2}$ şi $\alpha = 1$. Rezultă:

$$\int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}\frac{dx}{x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Deci $I = \frac{3\pi}{2} - \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \pi\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right).$

**11.** Să se determine valoarea expresiei:

$$E = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

**Rezolvare.** Avem:

$$E^2 = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{n}}\cdots\frac{\pi}{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}} = \frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

Pentru a calcula produsul $P_n = \sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$ să considerăm ecuaţia binomă $x^n - 1 = 0$ cu rădăcinile $x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k = \overline{0, n-1}$. Deci avem următoarea egalitate:

$$x^n - 1 = (x-1)\left(x - \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\left(x - \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} - i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad x^n - 1 = (x-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x - \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Deoarece $x^n - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$ obţinem relaţia:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(x - \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}\right),\quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pentru $x = 1$ obţinem:

$$n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) \quad\Leftrightarrow\quad n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(2\sin^2\frac{k\pi}{n} - 2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad n = 2^{n-1}\underbrace{\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}_{P_n}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\left(\sin\frac{k\pi}{n} - i\cos\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad n = 2^{n-1}P_n\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{k\pi}{n}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad n = 2^{n-1}P_n\left[\cos\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{k\pi}{n}\right) + i\sin\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{k\pi}{n}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow\quad n = 2^{n-1}P_n\left[\cos\left(\frac{3(n-1)\pi}{2} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{3(n-1)\pi}{2} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow\quad n = 2^{n-1}P_n(\cos 2(n-1)\pi + i\sin 2(n-1)\pi) \quad\Leftrightarrow\quad n = 2^{n-1}P_n \quad\Leftrightarrow\quad P_n = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Rezultă că $E^2 = \frac{\pi^{n-1}\cdot 2^{n-1}}{n}$, deci $E = \frac{(2\pi)^{(n-1)/2}}{\sqrt{n}}$.

**12.** Să se calculeze cu ajutorul funcţiei $\Gamma$ integralele:

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^s}\,dx,\ \ b > 0,\ \ s \in (0,1);\qquad I_2 = \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^s}\,dx,\ \ b > 0,\ \ s \in (0,2).$$

**Rezolvare.** Deoarece $\left|\frac{\cos bx}{x^s}\right| \le \frac{1}{x^s}$, $\forall x \in (0,a)$, $a > 0$ şi $\int_0^a \frac{dx}{x^s}$ este convergentă, rezultă că $\int_0^a \frac{\cos bx}{x^s}\,dx$ este (absolut) convergentă. Pentru integrala $\int_a^\infty \frac{\cos bx}{x^s}\,dx$

aplicăm criteriul lui Dirichlet: $\left|\int_a^A \cos bx\,dx\right| \leq M,\ \forall\, A \geq a$ şi $\dfrac{1}{x^s} \searrow 0,\ x \to \infty,$ deci este o integrală convergentă. Rezultă astfel că $I_1$ este convergentă. În mod asemănător se arată că şi $I_2$ este convergentă.

Pentru calculul acestor integrale, pornim de la integrala:

$$\int_0^\infty t^{s-1} \cdot e^{-xt}\,dt \overset{xt=u}{=} \int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{x^{s-1}} e^{-u} \cdot \frac{du}{x} = \frac{1}{x^s}\int_0^\infty u^{s-1}e^{-u}\,du = \frac{1}{x^s}\,\Gamma(s).$$

Deci $\dfrac{1}{x^s} = \dfrac{1}{\Gamma(s)}\displaystyle\int_0^\infty t^{s-1}e^{-xt}\,dt.$

Înmulţim ambii membri ai relaţiei obţinută mai sus cu $\cos bx$ şi integrăm pe $(0,\infty)$. Obţinem:

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^s}\,dx = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \cos bx\left(\int_0^\infty t^{s-1}\cdot e^{-xt}\,dt\right)dx.$$

Schimbând ordinea integralelor (avem îndeplinite condiţiile din {§2, Teorema 3.2.13}), rezultă:

$$I_1 = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\underbrace{\left(\int_0^\infty \cos bx\cdot e^{-xt}\,dx\right)}_{I_3(t)}dt.$$

Pentru $I_3(t)$ avem:

$$I_3(t) = -\frac{1}{t}\cos bx\cdot e^{-xt}\Big|_0^\infty - \frac{b}{t}\int_0^\infty \sin bx\cdot e^{-xt}\,dx = \frac{1}{t} + \frac{b}{t^2}\sin bx\cdot e^{-xt}\Big|_0^\infty -$$
$$-\frac{b^2}{t^2}\int_0^\infty \cos bx\cdot e^{-xt}\,dx = \frac{1}{t} - \frac{b^2}{t^2}I_3(t).$$

Deci $I_3(t) = \dfrac{t}{t^2+b^2}$, iar:

$$I_1 = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{t^s}{t^2+b^2}\,dt \overset{t=ub}{=} \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{b^s u^s}{b^2(u^2+1)}\cdot b\,du = \frac{b^{s-1}}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{u^s}{u^2+1}\,du \overset{u=\mathrm{tg}\,y}{=}$$
$$= \frac{b^{s-1}}{\Gamma(s)}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{tg}^s y}{\mathrm{tg}^2 y+1}\cdot(1+\mathrm{tg}^2 y)\,dy = \frac{b^{s-1}}{\Gamma(s)}\int_0^{\pi/2}\mathrm{tg}^s y\,dy,\quad s\in(0,1).$$

Conform Problemei 10, h), $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\mathrm{tg}^s y\,dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\cos\frac{s\pi}{2}}$, deci:

$$I_1 = \frac{\pi b^{s-1}}{2\Gamma(s)\cdot\cos\frac{s\pi}{2}}.$$

Pentru $I_2$ procedăm asemănător şi obţinem:

$$I_2 = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\underbrace{\left(\int_0^\infty \sin bx\cdot e^{-xt}\,dx\right)}_{I_4(t)}dt.$$

Apoi:

$$I_4(t) = -\frac{1}{t}\sin bx\cdot e^{-xt}\Big|_0^\infty + \frac{b}{t}\int_0^\infty \cos bx\cdot e^{-xt}\,dx = -\frac{b}{t^2}\cos bx\cdot e^{-xt}\Big|_0^\infty -$$
$$-\frac{b^2}{t^2}\int_0^\infty \sin bx\cdot e^{-xt}\,dx = \frac{b}{t^2} - \frac{b^2}{t^2}I_4(t).$$

Rezultă $I_4(t) = \dfrac{b}{t^2+b^2}$, iar:

$$I_2 = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{bt^{s-1}}{t^2+b^2}\,dt \overset{t=bu}{=} \frac{b}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{b^{s-1}\cdot u^{s-1}}{b^2(u^2+1)}\cdot b\,du = \frac{b^{s-1}}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{u^2+1}\,du =$$

$$\overset{u=tg\,y}{=} \frac{b^{s-1}}{\Gamma(s)}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{tg}^{s-1}y}{1+\mathrm{tg}^2 y}(1+\mathrm{tg}^2 y)\,dy = \frac{b^{s-1}}{\Gamma(s)}\int_0^{\pi/2} \mathrm{tg}^{s-1}y\,dy, \quad s-1\in(-1,1).$$

Conform Problemei 10, h), $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{tg}^{s-1}y\,dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\cos\frac{(s-1)\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\sin\frac{s\pi}{2}}$, deci:

$$I_2 = \frac{\pi b^{s-1}}{2\Gamma(s)\cdot\sin\frac{s\pi}{2}}.$$

**13.** Să se exprime cu ajutorul integralelor euleriene următoarele integrale:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx$, $0<m<n$; b) $\displaystyle\int_a^b \frac{(x-a)^m(b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}}\,dx$;

c) $\displaystyle\int_0^\infty x^m e^{-x^n}\,dx$, $n\neq 0$.

**Rezolvare.** a) Notăm $x^n=t$. Rezultă:

$$I = \int_0^\infty \frac{t^{(m-1)/n}}{1+t}\cdot\frac{1}{n}t^{1/n-1}\,dt = \frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{t^{m/n-1}}{1+t}\,dt.$$

Notăm $t=\dfrac{y}{1-y} \Rightarrow y=\dfrac{t}{1+t}$, $1+t=\dfrac{1}{1-y}$, $t=0\Rightarrow y=0$, $t\to\infty\Rightarrow y\to 1$. Deci:

$$I = \frac{1}{n}\int_0^1 y^{m/n-1}(1-y)^{-m/n+1}(1-y)\frac{dy}{(1-y)^2} = \frac{1}{n}\int_0^1 y^{m/n-1}(1-y)^{-m/n}\,dy =$$

$$= \frac{1}{n}B\left(\frac{m}{n}, 1-\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}, \quad \left(0<\frac{m}{n}<1\right).$$

b) Notăm $t=\dfrac{x-a}{b-x} \Rightarrow x=\dfrac{a+tb}{1+t}$, $x-a=\dfrac{t(b-a)}{1+t}$, $b-x=\dfrac{b-a}{1+t}$, $x+c=$ $=\dfrac{t(b+c)+a+c}{1+t}$, $dx=\dfrac{b-a}{(1+t)^2}\,dt$. Rezultă:

$$I = \int_0^\infty \frac{t^m(b-a)^m}{(1+t)^m}\cdot\frac{(b-a)^n}{(1+t)^n}\cdot\frac{(1+t)^{m+n+2}}{[t(b+c)+a+c]^{m+n+2}}\cdot\frac{b-a}{(1+t)^2}\,dt =$$

$$= (b-a)^{m+n+1}\int_0^\infty t^m\cdot\frac{dt}{[t(b+c)+a+c]^{m+n+2}}.$$

Facem schimbarea în continuare $t=\dfrac{y}{1-y} \Rightarrow y=\dfrac{t}{1+t}$. Obţinem:

$$I = (b-a)^{m+n+1}\int_0^1 y^m(1-y)^{-m}\cdot\frac{1}{\left[\frac{y}{1-y}(b+c)+a+c\right]^{m+n+2}}\cdot\frac{dy}{(1-y)^2} =$$

$$= (b-a)^{m+n+1}\int_0^1 \frac{y^m(1-y)^n}{[y(b-a)+a+c]^{m+n+2}}\,dy = \frac{1}{b-a}\int_0^1 \frac{y^m(1-y)^n}{\left(y+\frac{a+c}{b-a}\right)^{m+n+2}}\,dy.$$

Ca în Problema 8 facem acum schimbarea de variabilă $y=\dfrac{\frac{a+c}{b-a}u}{\frac{a+c}{b-a}+1-u} = \dfrac{(a+c)u}{b+c-(b-a)u}$.

Atunci $1-y=\dfrac{(b+c)(1-u)}{b+c-(b-a)u}$, iar $y+\dfrac{a+c}{b-a} = \dfrac{(a+c)u}{b+c-(b-a)u}+\dfrac{a+c}{b-a} = \dfrac{a+c}{b-a}\times$

$\times \dfrac{b+c}{b+c-(b-a)u}$, iar $dy = \dfrac{(b+c)(a+c)}{[b+c-(b-a)u]^2}\,du$.

Deci $I = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_0^1 \frac{(a+c)^m u^m}{[b+c-(b-a)u]^m} \cdot \frac{(b+c)^n(1-u)^n}{[b+c-(b-a)u]^n} \cdot \frac{(b-a)^{m+n+2}}{(a+c)^{m+n+2}} \times$
$\times \dfrac{[b+c-(b-a)u]^{m+n+2}}{(b+c)^{m+n+2}} \cdot \dfrac{(b+c)(a+c)\,du}{[b+c-(b-a)u]^2} = \dfrac{(b-a)^{m+n+1}}{(a+c)^{n+1}(b+c)^{m+1}}\displaystyle\int_0^1 u^m(1-u)^n\,du =$
$= \dfrac{(b-a)^{m+n+1}}{(a+c)^{n+1}(b+c)^{m+1}} \cdot B(m+1,n+1),\ \ n,\, m > -1.$

c) Notăm $x^n = t \Rightarrow x = t^{1/n},\ \ dx = \dfrac{1}{n}t^{1/n-1}\,dt$. Deci:

$I = \displaystyle\int_0^\infty t^{m/n} \cdot \frac{1}{n} \cdot t^{1/n-1} \cdot e^{-t}\,dt = \frac{1}{n}\int_0^\infty t^{(m+1)/n-1} \cdot e^{-t}\,dt = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right),\ \ \frac{m+1}{n} >$
$> 0,\ \ n \neq 0.$

## PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

**14.** Să se demonstreze următoarele proprietăţi ale integralei $B$:

a) $B(p,q) = B(q,p)$; b) $B(p,q) = \dfrac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q),\ \ p>1,\ \ q>0;$

c) $B(p,q) = \dfrac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1),\ \ q>1,\ \ p>0;$

d) $B(p,q) = \dfrac{(p-1)(q-1)}{(p+q-1)(p+q-2)}B(p-1,q-1),\ \ p>1,\ \ q>1;$

e) $B(p,n) = B(n,p) = \dfrac{(n-1)!}{p(p+1)\cdots(p+n-1)},\ \ n \in \mathbb{N}^*;$

f) $B(m,n) = \dfrac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!},\ \ m,\, n \in \mathbb{N}^*.$

**15.** Să se demonstreze că:

a) $\Gamma(p)$ este o funcţie infinit derivabilă pe $(0,\infty)$ şi:

$$\Gamma^{(n)}(p) = \int_0^\infty x^{p-1} \cdot (\ln x)^n \cdot e^{-x}\,dx,\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

b) $\lim\limits_{p\to 0+}\Gamma(p) = \infty,\ \ \lim\limits_{p\to\infty}\Gamma(p) = \infty.$

**16.** Să se exprime cu ajutorul funcţiei $B$ următoarea integrală:

$$I = \int_0^1 \frac{x^{a-1}\cdot(1-x)^{b-1}}{[\alpha x + \beta(1-x) + \gamma]^{a+b}}\,dx;\ \ \alpha,\, \beta \geq 0;\ \ \gamma,\, a,\, b > 0.$$

**17.** Să se calculeze cu ajutorul integralei lui Euler $B$ următoarea integrală:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{(1+x)^{2p-1}\cdot(1-x)^{2q-1}}{(1+x^2)^{p+q}}\,dx,\ \ p,\, q > 0.$$

**18.** Să se calculeze folosind integralele lui Euler următoarele integrale:

a) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$; b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+x^2)}$; c) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^3(1-x)}\,dx$; d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$;

e) $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^4 x \, dx$; f) $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(1+x)^3} \, dx$; g) $\int_0^1 \frac{dx}{(x+3)\sqrt[4]{x^3(1-x)}}$.

**19.** Să se calculeze integrala $I(p,q) = \int_a^b (x-a)^p (b-x)^q \, dx$, $p, q > -1$ şi apoi să se aplice rezultatul la integralele:

$I_1 = \int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)} \, dx$, $I_2 = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$; $I_3 = \int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} \, dx$;

$I_4 = \int_a^b \sqrt[3]{\frac{b-x}{x-a}} \, dx$.

**20.** Să se calculeze:

$I_1 = \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-1} \cos bx \, dx$, $I_2 = \int_0^\infty e^{-ax} x^{p-1} \sin bx \, dx$; $a > 0$, $p > 0$, $b \in I\!R$.

**21.** Să se exprime cu ajutorul integralelor euleriene următoarele integrale:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}}$, $m > 0$; b) $\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}$; c) $\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx$, $p > -1$;

d) $\int_0^\infty \frac{x^{p-1} \ln x}{1+x} \, dx$, $0 < p < 1$.

# Capitolul 4
# INTEGRALE CURBILINII

## §1. INTEGRALE CURBILINII DE PRIMUL TIP

**Curbă. Suprafaţă**

Fie $\Gamma$ o *curbă* în spaţiu de *ecuaţii parametrice*:

$(\Gamma): \ \ x = \varphi(t), \ \ y = \psi(t), \ \ z = \chi(t), \ \ t \in [a, b]$,

cu $\varphi, \ \psi, \ \chi$ funcţii continue pe $[a, b]$.

Curba $\Gamma$ se numeşte *închisă* dacă $\varphi(a) = \varphi(b), \ \psi(a) = \psi(b), \ \chi(a) = \chi(b)$. Curba $\Gamma$ se numeşte *simplă* dacă nu are puncte multiple, adică $\nexists \, t', \, t'' \in [a, b]$ cu $a \leq t' < t'' \leq b$, în care cel puţin una din inegalităţile extreme este strictă, astfel încât $\varphi(t') = \varphi(t'')$, $\psi(t') = \psi(t'')$, $\chi(t') = \chi(t'')$.

Numim *lungime* a curbei $\Gamma$ marginea superioară a mulţimii tuturor lungimilor liniilor poligonale înscrise în $\Gamma$.

Fie $\Delta$ o diviziune a intervalului $[a, b]$, $\Delta \in \mathcal{D}_{[a,b]}$, $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, $M_i(\varphi(t_i), \psi(t_i), \chi(t_i))$, $i = \overline{0, n}$, iar $\Pi_\Delta$ linia poligonală obţinută prin unirea punctelor $M_i$. Atunci:

$$L(\Gamma) = \sup_{\Delta \in \mathcal{D}} L(\Pi_\Delta),$$

unde $L(\Pi_\Delta) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \|\vec{f}(t_{i+1}) - \vec{f}(t_i)\|$, cu $\vec{f} = (\varphi, \psi, \chi)$, $\| \cdot \|$ fiind norma euclidiană în spaţiul $I\!R^3$.

Curba $\Gamma$ se numeşte *rectificabilă* (în sens Jordan) dacă $L(\Gamma) < \infty$.

Curba $\Gamma$ se numeşte *netedă* dacă funcţiile $\varphi, \ \psi, \ \chi$ au derivate parţiale de ordinul întâi continue pe $[a, b]$, adică $\varphi, \ \psi, \ \chi \in C^1([a, b])$. Curba $\Gamma$ se numeşte *netedă pe porţiuni* dacă $\exists \, \Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ a.î. $\Gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ este netedă, $\forall \, i = \overline{0, n-1}$.

**Teorema 4.1.1.** Dacă $\Gamma$ este o curbă netedă atunci:

$$L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}\, dt = \int_a^b \|\vec{f}'(t)\|\, dt.$$

Dacă $\Gamma$ este o curbă netedă plană de ecuaţii $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)\ (\chi(t) = 0),\ t \in \in [a, b]$ atunci $L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt$. Dacă curba $\Gamma$ este dată prin ecuaţia explicită $y = f(x),\ x \in [a, b]$ atunci $L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$, iar dacă $\Gamma$ este dată prin ecuaţia polară $r = r(\varphi),\ \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ atunci $L(\Gamma) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi$.

Fie $\Gamma$ o curbă rectificabilă în sens Jordan, iar $s(t) = L(\Gamma_t)$, unde $\Gamma_t = \Gamma|_{[a,t]},\ t \in [a, b]$. Funcţia $s(t)$ se numeşte *lungime de arc*. Dacă $\Gamma$ este netedă atunci şi $\Gamma_t$ este netedă şi:

$$L(\Gamma_t) = s(t) = \int_a^t \sqrt{(\varphi'(\tau))^2 + (\psi'(\tau))^2 + (\chi'(\tau))^2}\, d\tau,$$

iar $ds = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}\, dt$ se numeşte *element de arc*.

Pentru o curbă $\Gamma$ plană dată prin ecuaţia $y = f(x),\ x \in [a, b],\ ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$, iar dacă $\Gamma$ este dată prin ecuaţia $r = r(\varphi),\ \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ atunci $ds = \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi$.

*A orienta* o curbă $\Gamma$ înseamnă a alege un sens de parcurgere pe ea. O asemenea curbă se numeşte *orientată*. Unul dintre sensuri îl vom numi *pozitiv*, iar celălalt *negativ*. În general orientăm curba în sensul creşterii parametrului $t$.

O curbă $\Gamma$ poate fi definită şi ca mulţimea punctelor din spaţiu ($\mathbb{R}^3$) ale căror coordonate satisfac relaţiile $F(x, y, z) = 0,\ G(x, y, z) = 0$, unde $F,\ G : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue, care verifică condiţiile din teorema de existenţă pentru sistemele de funcţii definite implicit. Deci $\Gamma$ poate fi dată ca intersecţia a două suprafeţe $(\Sigma_1) :\ F(x, y, z) = 0$ şi $(\Sigma_2) :\ G(x, y, z) = 0$. Ecuaţiile $F(x, y, z) = 0,\ G(x, y, z) = 0$ se numesc *ecuaţiile carteziene implicite* ale curbei $\Gamma$. Dacă $F$ şi $G$ sunt de clasă $C^1(D)$ atunci $\Gamma$ este o curbă *netedă*. Dacă ecuaţiile de mai sus se pot scrie $y = y(x),\ z = z(x)$ obţinem *ecuaţiile carteziene explicite* ale curbei $\Gamma$. Pentru $z = 0$ obţinem o curbă plană de ecuaţie $F(x, y) = 0$ (ecuaţia carteziană implicită) sau $y = y(x)$ (ecuaţia carteziană explicită).

Fie *suprafaţa* $\widetilde{\Sigma}$ de *ecuaţii parametrice*:

$(\widetilde{\Sigma}) :\ x = \widetilde{\varphi}_1(t, s),\ y = \widetilde{\varphi}_2(t, s),\ z = \widetilde{\varphi}_3(t, s),\ (t, s) \in E = [0, 1] \times [0, 1]$,

cu $\widetilde{\varphi}_1,\ \widetilde{\varphi}_2,\ \widetilde{\varphi}_3$ funcţii continue pe $E$.

Suprafaţa $\widetilde{\Sigma}$ se numeşte *închisă* dacă $\vec{F}(0, s) = \vec{F}(1, s),\ \forall s \in [0, 1]$ şi $\vec{F}(t, 0) = = \vec{F}(t, 1),\ \forall t \in [0, 1]$, unde $\vec{F}(t, s) = (\widetilde{\varphi}_1(t, s), \widetilde{\varphi}_2(t, s), \widetilde{\varphi}_3(t, s))$.

Suprafaţa $\widetilde{\Sigma}$ se numeşte *simplă* dacă nu are puncte multiple, adică $\nexists\, (t', s'),\ (t'', s'') \in \in E,\ (t', s') \neq (t'', s'')$ astfel încât:

a) $\vec{F}(t', s') = \vec{F}(t'', s'')$;

b) Dacă $\vec{F}(0, s') = \vec{F}(t'', s'')$ atunci $t'' \neq 1$ sau $s' \neq s''$;

c) Dacă $\vec{F}(1, s') = \vec{F}(t'', s'')$ atunci $t'' \neq 0$ sau $s' \neq s''$;

d) Dacă $\vec{F}(t', 0) = \vec{F}(t'', s'')$ atunci $t' \neq t''$ sau $s'' \neq 1$;

e) Dacă $\vec{F}(t', 1) = \vec{F}(t'', s'')$ atunci $t' \neq t''$ sau $s'' \neq 0$.

Fie *suprafaţa* $\Sigma$ de *ecuaţii parametrice*:

$(\Sigma): \ x = \varphi_1(u, v), \ \ y = \varphi_2(u, v), \ \ z = \varphi_3(u, v), \ \ (u, v) \in \Delta,$

unde $\Delta \subset I\!R^2$ este un *domeniu compact*, adică o mulţime compactă cu $\mathring{\Delta}$ *domeniu* (deschis şi conex), cu $\varphi_1, \ \varphi_2, \ \varphi_3$ funcţii continue pe $\Delta$.

Suprafaţa $\Sigma$ se numeşte *simplă (închisă)* dacă există o aplicaţie $\vec{\alpha}: E \to \Delta$, $\vec{\alpha}(t, s) = (\alpha_1(t, s), \alpha_2(t, s))$ bijectivă şi bicontinuă ($\vec{\alpha}$ şi inversa sa sunt continue) astfel încât suprafaţa $\widetilde{\Sigma}$ de ecuaţii:

$(\widetilde{\Sigma}): \ x = \widetilde{\varphi}_1(t, s), \ \ y = \widetilde{\varphi}_2(t, s), \ \ z = \widetilde{\varphi}_3(t, s), \ \ (t, s) \in E,$

unde $\widetilde{\varphi}_1(t, s) = \varphi_1(\alpha_1(t, s), \alpha_2(t, s))$, $\widetilde{\varphi}_2(t, s) = \varphi_2(\alpha_1(t, s), \alpha_2(t, s))$, $\widetilde{\varphi}_3(t, s) = \varphi_3(\alpha_1(t, s), \alpha_2(t, s))$, este simplă (respectiv închisă) în sensul definiţiei de mai sus.

Suprafaţa $\Sigma$ se numeşte *netedă* dacă $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ au derivate parţiale de ordinul întâi continue pe $\Delta$, adică $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in C^1(\Delta)$. Suprafaţa netedă $\Sigma$ se numeşte *regulată* dacă $A^2 + B^2 + C^2 > 0, \ \forall\, (u, v) \in \Delta$, unde $A = \dfrac{D(\varphi_2, \varphi_3)}{D(u, v)}, \ B = \dfrac{D(\varphi_3, \varphi_1)}{D(u, v)}, \ C = \dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(u, v)}$. Punctele suprafeţei care satisfac inegalitatea de mai sus se numesc *puncte ordinare*. Deci o suprafaţă regulată este formată din puncte ordinare. Suprafaţa $\Sigma$ se numeşte *netedă (regulată) pe porţiuni* dacă $\exists$ o diviziune $(\Delta_i)_{i=\overline{1,n}}$ a domeniului $\Delta$ a.î. $\Sigma|_{\bar{\Delta}_i}$ este netedă (respectiv regulată), $\forall\, i = \overline{1, n}$.

Dacă suprafaţa $\Sigma$ este dată prin *ecuaţia carteziană implicită* $F(x, y, z) = 0$, unde $F: D \subset I\!R^3 \to I\!R$ este continuă pe $D$, atunci $\Sigma$ este *netedă* dacă $F \in C^1(D)$. Dacă în plus $\nabla F(x, y, z) \neq \vec{0}, \ \forall\, (x, y, z) \in D$ suprafaţa netedă $\Sigma$ este *regulată*. Dacă ecuaţia de mai sus se poate scrie sub forma $z = z(x, y)$ obţinem *ecuaţia carteziană explicită* a suprafeţei $\Sigma$.

*Vectorul normal* $\vec{N}$ la suprafaţa netedă şi regulată $\Sigma$ într-un punct al ei este:

· $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$ cu versorul $\vec{n} = \dfrac{\vec{N}}{\pm\|\vec{N}\|}$, unde $\vec{r} = \varphi_1\vec{i} + \varphi_2\vec{j} + \varphi_3\vec{k}$, în cazul în care $\Sigma$ este dată prin ecuaţiile parametrice $x = \varphi_1(u, v), \ y = \varphi_2(u, v), \ z = \varphi_3(u, v)$;

· $\vec{N} = \nabla F = \dfrac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\vec{k}$ cu versorul $\vec{n}$, în cazul în care $\Sigma$ este dată prin ecuaţia carteziană implicită $F(x, y, z) = 0$;

$\cdot$ $\vec{N} = -p\vec{i} - q\vec{j} + \vec{k}$ cu versorul $\vec{n}$, în cazul în care $\Sigma$ este dată prin ecuaţia carteziană explicită $z = z(x, y)$, unde $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

O suprafaţă netedă şi regulată $\Sigma$ se numeşte *cu două feţe* dacă pentru orice punct $M$ interior lui $\Sigma$, $\vec{n}(M)$ depinde continuu de $M$. Dacă există cel puţin un punct $A_0$ interior lui $\Sigma$ a.î. $\vec{n}(A_0)$ nu depinde continuu de $A_0$ atunci suprafaţa se numeşte *cu o singură faţă*. O suprafaţă cu două feţe se numeşte *orientabilă*, iar procesul de alegere a unei feţe pe care o numim *pozitivă* (cealaltă se numeşte *negativă*) se numeşte *orientarea suprafeţei*. Se consideră *faţa pozitivă* a suprafeţei cea pentru care $\cos\gamma > 0$, unde $\vec{n} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$.

Pentru ecuaţiile carteziene şi/sau parametrice ale principalelor curbe şi suprafeţe care vor apărea pe parcursul culegerii vezi Anexa.

**Integrale curbilinii de primul tip (sau de prima specie)**

Fie $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$ o curbă rectificabilă, dată prin ecuaţiile:

$(\Gamma): \;\; x = \varphi(t), \;\; y = \psi(t), \;\; z = \chi(t), \;\; t \in [a, b]$,

iar $F : D \subset I\!R^3 \to I\!R$ o funcţie definită pe un domeniu $D$ care conţine curba $\overset{\frown}{AB}$.

Funcţia $F$ este *integrabilă* pe $\Gamma$ dacă $\exists$ şi este finită limita sumelor integrale:

$$\sigma_\pi = \sum_{i=0}^{n-1} F(P_i)\sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} F(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i), \chi(\tau_i)) \cdot \sigma_i,$$

când norma $\lambda$ a diviziunii $\pi$: $A_0 = A, A_1, \ldots, A_n = B$ a curbei $\Gamma$ tinde la 0 şi această limită este independentă de diviziunea $\pi$ şi de alegerea punctelor intermediare $P_i \in \overset{\frown}{A_i A_{i+1}}$, $P_i(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i), \chi(\tau_i))$, $i = \overline{0, n-1}$, unde $\lambda = \max\limits_{i=\overline{0,n-1}} \sigma_i$ şi $\sigma_i = L(\overset{\frown}{A_i A_{i+1}})$, $i = \overline{0, n-1}$.

Dacă $F$ este integrabilă pe $\Gamma$ atunci $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma_\pi$ se numeşte *integrala curbilinie în raport cu lungimea arcului* sau *integrala curbilinie de primul tip* (sau *de prima specie*) a funcţiei $F$ pe $\Gamma$ şi se notează $\int_\Gamma F(x, y, z)\, ds$.

*Proprietăţi.* a) Dacă $F$, $G : D \subset I\!R^3 \to I\!R$ sunt integrabile pe $\Gamma$ ($\Gamma$ curbă rectificabilă, conţinută în $D$), deci $\exists \int_\Gamma F(x, y, z)\, ds$ şi $\exists \int_\Gamma G(x, y, z)\, ds$, iar $\lambda$, $\mu \in I\!R$ atunci şi $\lambda F + \mu G$ este integrabilă pe $\Gamma$ şi:

$$\int_\Gamma (\lambda F(x, y, z) + \mu G(x, y, z))\, ds = \lambda \int_\Gamma F(x, y, z)\, ds + \mu \int_\Gamma G(x, y, z)\, ds.$$

b) Fie $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\;\Gamma_1, \;\Gamma_2$ curbe rectificabile, iar $F : D \subset I\!R^3 \to I\!R$ este integrabilă pe $\Gamma$ ($\Gamma$ conţinută în $D$). Atunci $F$ este integrabilă pe $\Gamma_1$ şi pe $\Gamma_2$ şi în plus:

$$\int_\Gamma F(x, y, z)\, ds = \int_{\Gamma_1} F(x, y, z)\, ds + \int_{\Gamma_2} F(x, y, z)\, ds.$$

**Teorema 4.1.2.** Dacă $\Gamma$ este o curbă rectificabilă, iar $F : D \subset I\!R^3 \to I\!R$ este o funcţie continuă pe domeniul $D$ care conţine pe $\Gamma$ atunci $\exists \int_\Gamma F(x, y, z)\, ds$.

**Teorema 4.1.3.** Dacă $\Gamma$ este o curbă netedă de ecuaţii $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t)$, $t \in [a, b]$, iar $F : D \subset I\!R^3 \to I\!R$ este o funcţie continuă pe domeniul $D$ care conţine pe $\Gamma$, atunci $F$ este integrabilă pe $\Gamma$ şi:

$$\int_\Gamma F(x, y, z)\, ds = \int_a^b F(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}\, dt.$$

Teorema de mai sus este adevărată şi pentru $\Gamma$ netedă pe porţiuni.

Dacă parametrul $t$ pe curba $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$ este parametrul natural $s$, adică $\overset{\frown}{AB}$ are ecuaţiile parametrice $x = x(s),\ y = y(s),\ z = z(s),\ \ s \in [0, S]$, iar $A(s = 0)$, $B(s = S)$ atunci:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\, ds = \int_0^S F(x(s), y(s), z(s))\, ds.$$

Valoarea integralei nu depinde de orientarea curbei $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$.

*Aplicaţiile integralei curbilinii de primul tip în mecanică*

1. Dacă $\varrho = \varrho(x, y, z)$ este densitatea liniară în punctul $(x, y, z)$ al curbei $\Gamma$, *masa curbei* $\Gamma$ este $M = \int_\Gamma \varrho(x, y, z)\, ds$.

2. Coordonatele *centrului de greutate* $G(x_0, y_0, z_0)$ ale acestei curbe $\Gamma$ se exprimă prin formulele:

$$x_0 = \frac{1}{M}\int_\Gamma x \cdot \varrho(x, y, z)\, ds, \quad y_0 = \frac{1}{M}\int_\Gamma y \cdot \varrho(x, y, z)\, ds, \quad z_0 = \frac{1}{M}\int_\Gamma z \cdot \varrho(x, y, z)\, ds.$$

3. *Momentele de inerţie* ale curbei $\Gamma$ în raport cu un plan $\alpha$, o dreaptă $d$ sau un punct $P$ este integrala $I = \int_\Gamma r^2\, dm$, unde $dm = \varrho(x, y, z)\, ds$, iar $r$ este distanţa punctului curent $(x, y, z)$ al curbei la planul $\alpha$, dreapta $d$, respectiv punctul $P$.

Momentele de inerţie *planare* în raport cu planele de coordonate sunt:

$$I_{xy} = \int_\Gamma z^2\, dm = \int_a^b \chi^2(t) \cdot \varrho(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}\, dt,$$

$$I_{yz} = \int_\Gamma x^2\, dm, \quad I_{xz} = \int_\Gamma y^2\, dm.$$

Momentele de inerţie în raport cu axele de coordonate, numite momente de inerţie *axiale* sunt:

$$I_x = \int_\Gamma (y^2 + z^2)\, dm = I_{xz} + I_{xy}, \quad I_y = \int_\Gamma (x^2 + z^2)\, dm = I_{yz} + I_{xy},$$

$$I_z = \int_\Gamma (x^2 + y^2)\, dm = I_{yz} + I_{xz}.$$

Momentul de inerţie în raport cu originea sistemului de axe, numit moment de inerţie *central* este:

$$I_0 = \int_\Gamma (x^2 + y^2 + z^2)\, dm = I_{xy} + I_{yz} + I_{xz}.$$

## PROBLEME REZOLVATE

**1.** Să se calculeze lungimile următoarele arce de curbă $\Gamma$ plane:

a) $x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t),\ \ t \in [0, 2\pi],\ \ a > 0$, (cicloida);

b) $x = (a+b)\cos t - b\cos\dfrac{a+b}{b}t,\ \ y = (a+b)\sin t - b\sin\dfrac{a+b}{b}t,\ \ t \in \left[\dfrac{\pi b}{a}, t_0\right];\ \ t_0 \in \in \left[\dfrac{\pi b}{a}, \dfrac{2\pi b}{a}\right];\ \ a,\, b > 0$, (arcul epicicloidei);

c) $y = \ln x - \dfrac{x^2}{8}$, care se proiectează pe axa $Ox$ în intervalul $[2, 5]$.

d) $ay^2 = x^3$ de la $x = a$ la $x = b$, $(0 < a < b)$, (arcul parabolei semicubice);

e) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\dfrac{y}{b}\right)^{2/3} = 1,\ \ a,\, b > 0$;

f) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),\ \ a > 0$, (lemniscata);

g) $r = e^{a\varphi},\ \ a > 0$, de la $O(r = 0)$ la punctul $M(r_0, \varphi_0)$, (arcul spiralei logaritmică).

**Rezolvare.** Curbele date sunt netede pe porţiuni.

a) Avem: $x'(t) = a(1 - \cos t),\ \ y'(t) = a\sin t$. Apoi:

$ds^2 = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)\, dt^2 = 2a^2(1 - \cos t)\, dt^2 = 4a^2 \sin^2 \dfrac{t}{2}\, dt^2.$

Atunci $\displaystyle L(\Gamma) = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\, dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$

b) Avem:

$x'(t) = -(a+b)\sin t + b\cdot\dfrac{a+b}{b}\sin\dfrac{a+b}{b}t = -(a+b)\sin t + (a+b)\sin\dfrac{a+b}{b}t,$

$y'(t) = (a+b)\cos t - b\cdot\dfrac{a+b}{b}\cos\dfrac{a+b}{b}t = (a+b)\cos t - (a+b)\cos\dfrac{a+b}{b}t.$

Rezultă:

$ds^2 = (a+b)^2\left[\sin^2 t + \sin^2\dfrac{a+b}{b}t - 2\sin t\cdot\sin\dfrac{a+b}{b}t + \cos^2 t + \cos^2\dfrac{a+b}{b}t - \right. \left. -2\cos t\cos\dfrac{a+b}{b}t\right] dt^2 = (a+b)^2\left(2 - 2\cos\left(\dfrac{a+b}{b}t - t\right)\right) dt^2 = (a+b)^2\cdot 2\,(1 - -\cos\dfrac{a}{b}t\Big)\ dt^2 = 4(a+b)^2\sin^2\dfrac{at}{2b}\, dt^2.$

Deci $\displaystyle L(\Gamma) = \int_{\pi b/a}^{t_0} 2(a+b)\sin\frac{at}{2b}\, dt = -2(a+b)\cdot\frac{2b}{a}\cos\frac{at}{2b}\Big|_{\pi b/a}^{t_0} = -\frac{4b}{a}(a+b)\times \times\left(\cos\frac{at_0}{2b} - \cos\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{4b}{a}(a+b)\cos\frac{at_0}{2b} = \frac{4b}{a}(a+b)\cdot\left|\cos\frac{at_0}{2b}\right|.$

Pentru $a = b$ obţinem cardioida $x = a(2\cos t - \cos 2t),\ \ y = a(2\sin t - \sin 2t)$, cu lungimea $8a\left|\cos\dfrac{t_0}{2}\right|$.

c) Pentru o curbă plană dată în mod explicit $y = f(x),\ \ f \in C^1,\ \ ds^2 = (1+ +(f'(x))^2)\, dx^2$, iar $\displaystyle L(\Gamma) = \int_{x_1}^{x_2} ds$. Avem:

$ds^2 = \left[1 + \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{4}\right)^2\right] dx^2 = \left(1 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{x^2}{16}\right) dx^2 = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{x^2}{16}\right) dx^2 = = \left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{x}\right)^2 dx^2,$

iar $L(\Gamma) = \int_2^5 \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right) dx = \left(\frac{x^2}{8} + \ln x\right)\Big|_2^5 = \frac{21}{8} + \ln\frac{5}{2}$.

d) Ecuaţiile parametrice ale curbei $\Gamma$ sunt: $x = \sqrt[3]{at^2}$, $y = t$, $t \in \left[a, \sqrt{\frac{b^3}{a}}\right]$.

Avem: $x'(t) = \frac{1}{3}(2at)(at^2)^{-2/3} = \frac{2at}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a^2t^4}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{t}}$, iar $y'(t) = 1$. Deci $ds^2 = \left(\frac{4}{9} \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2}{t^2}} + 1\right) dt^2$, iar $L(\Gamma) = \int_a^{b\sqrt{\frac{b}{a}}} \sqrt{\frac{4}{9} \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2}{t^2}} + 1}\, dt$. Pentru a calcula această integrală facem schimbarea de variabilă $\sqrt[3]{\frac{a^2}{t^2}} = u^2 \Rightarrow t = \frac{a}{u^3}$, iar $dt = -\frac{3a}{u^4}\, du$. Obţinem $u = \sqrt[3]{\frac{a}{t}}$, $t = a \Rightarrow u = 1$, $t = b\sqrt{\frac{b}{a}} \Rightarrow u = \sqrt{\frac{a}{b}}$. Deci:

$$L(\Gamma) = \int_1^{\sqrt{\frac{a}{b}}} \sqrt{\frac{4}{9}u^2 + 1} \cdot \frac{-3a}{u^4}\, du = 3a \int_{\sqrt{\frac{a}{b}}}^1 \frac{1}{u^4} \cdot \sqrt{\frac{4}{9}u^2 + 1}\, du.$$

Notăm $\frac{2}{3}u = v \Rightarrow u = \frac{3}{2}v$, $du = \frac{3}{2}dv$. Rezultă:

$$L(\Gamma) = 3a \int_{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\frac{2}{3}} \frac{16}{81v^4}\sqrt{v^2 + 1} \cdot \frac{3}{2}\, dv = \frac{8a}{9} \int_{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{v^2 + 1}}{v^4}\, dv.$$

În continuare facem schimbarea de variabilă $\frac{1}{v} = x \Rightarrow v = \frac{1}{x}$, $dv = -\frac{1}{x^2}\, dx$. Deci:

$$L(\Gamma) = \frac{8a}{9} \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x \cdot \frac{1}{x^4}} \cdot \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{8a}{9} \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}} x \cdot \sqrt{x^2 + 1}\, dx.$$

Calculăm mai întâi integrala nedefinită:

$$I = \int x\sqrt{x^2 + 1}\, dx = \int \frac{x(x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx + \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx =$$

$= \int x^2 \cdot (\sqrt{x^2 + 1})'\, dx + \sqrt{x^2 + 1} = x^2\sqrt{x^2 + 1} - \int 2x \cdot \sqrt{x^2 + 1}\, dx + \sqrt{x^2 + 1} = (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} - 2I$.

Deci $I = \frac{1}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + \mathcal{C}$, iar:

$$L(\Gamma) = \frac{8a}{9} \cdot \frac{1}{3}(x^2 + 1)^{3/2}\Big|_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}} = \frac{8a}{27}\left[\left(\frac{9}{4} \cdot \frac{b}{a} + 1\right)^{3/2} - \left(\frac{9}{4} + 1\right)^{3/2}\right] =$$

$$= \frac{8a}{27}\left[\frac{(9b + 4a)^{3/2} - (13a)^{3/2}}{8a^{3/2}}\right] = \frac{1}{27\sqrt{a}}\left[(9b + 4a)^{3/2} - (13a)^{3/2}\right].$$

e) Ecuaţiile parametrice ale curbei $\Gamma$ sunt $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$. Avem:

$$ds^2 = [(-3a\cos^2 t \cdot \sin t)^2 + (3b\sin^2 t \cdot \cos t)^2]\, dt^2 = 9\sin^2 t\cos^2 t(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t)\, dt^2.$$

Rezultă astfel:

$$L(\Gamma) = \int_0^{2\pi} 3|\sin t\cos t| \cdot \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dt = 12\int_0^{\pi/2} \sin t\cos t \cdot \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dt.$$

Pentru calculul ultimei integrale facem schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} t = u$. Obţinem:

$$L(\Gamma) = 12\int_0^\infty \frac{u}{1+u^2}\cdot\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{1+u^2}+b^2\cdot\frac{u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{du}{1+u^2} = 12\int_0^\infty \frac{u\sqrt{a^2+b^2u^2}}{(1+u^2)^{5/2}}\,du.$$

Notăm $u^2 = v$. Deci $L(\Gamma) = 6\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{a^2+b^2v}}{(1+v)^{5/2}}\,dv.$

În continuare facem schimbarea de variabilă $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2v}{1+v}} = x \Rightarrow v = \dfrac{x^2-a^2}{b^2-x^2}$, iar $dv = \dfrac{2x(b^2-a^2)}{(b^2-x^2)^2}\,dx$. Pentru $v = 0 \Rightarrow x = a$, iar pentru $v \to \infty \Rightarrow x \to b$. Rezultă atunci:

$$L(\Gamma) = 6\int_a^b \frac{x}{\left(1+\frac{x^2-a^2}{b^2-x^2}\right)^2}\cdot\frac{2x(b^2-a^2)}{(b^2-x^2)^2}\,dx = 12\int_a^b \frac{x^2}{b^2-a^2}\,dx = \frac{4}{b^2-a^2}(b^3-a^3) =$$

$$= \frac{4(a^2+ab+b^2)}{a+b}.$$

Pentru $a = b$ deducem că lungimea astroidei $x^{2/3}+y^{2/3} = a^{2/3}$ este $L(\Gamma) = 6a$.

f) Pentru a găsi o parametrizare a lemniscatei (vezi Figura 4.1.1) notăm $y = x\operatorname{tg}\varphi$.

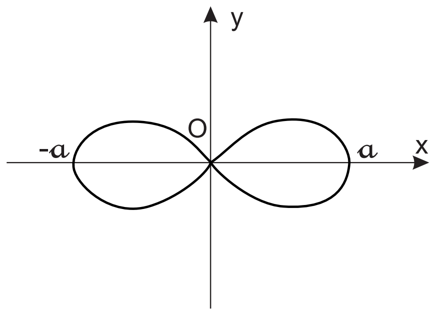


Figura 4.1.1

Introducând această relaţie în ecuaţia curbei obţinem $x = a\cos\varphi\cdot\sqrt{\cos 2\varphi}$, cu $\cos 2\varphi \geq 0 \Leftrightarrow \varphi \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{4},2\pi\right]$, iar $y = a\sin\varphi\cdot\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Deoarece lemniscata este simetrică faţă de axele $Ox$ şi $Oy$ putem scrie atunci că:

$$L(\Gamma) = 4\int_0^{\pi/4}\sqrt{(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2}\,d\varphi.$$

Avem:

$$x'(\varphi) = -a\sin\varphi\cdot\sqrt{\cos 2\varphi} + a\cos\varphi\cdot\frac{-2\sin 2\varphi}{2\sqrt{\cos 2\varphi}} = \frac{-a\sin 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \quad \text{şi}$$

$$y'(\varphi) = a\cos\varphi\cdot\sqrt{\cos 2\varphi} + a\sin\varphi\cdot\frac{-2\sin 2\varphi}{2\sqrt{\cos 2\varphi}} = \frac{a\cos 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Rezultă astfel:

$$L(\Gamma) = 4\int_0^{\pi/4}\frac{\sqrt{a^2\sin^2 3\varphi + a^2\cos^2 3\varphi}}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi = 4a\int_0^{\pi/4}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \overset{tg\,\varphi=u}{=}$$

$$= 4a\int_0^1 \frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{1+u^2} = 4a\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^4}} \overset{u^2=t}{=} 4a\int_0^1\frac{dt}{2\sqrt{t}\cdot\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= 2a\int_0^1 t^{-1/2}\cdot(1-t^2)^{-1/2}\,dt \overset{t^2=v}{=} 2a\int_0^1 v^{-1/4}\cdot(1-v)^{-1/2}\cdot\frac{dv}{2v^{1/2}} =$$

$= a\int_0^1 v^{-3/4}\cdot(1-v)^{-1/2}\,dv = a\,B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right).$

g) Pentru o curbă plană dată în coordonate polare $r=r(\varphi)$, $r\in C^1$, $ds=\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi$ şi $L(\Gamma)=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} ds$. Avem aici $r'=ae^{a\varphi}$, $ds=\sqrt{e^{2a\varphi}+a^2e^{2a\varphi}}\,d\varphi = e^{a\varphi}\cdot\sqrt{1+a^2}\,d\varphi$.

Deci $L(\Gamma)=\int_{-\infty}^{\varphi_0} e^{a\varphi}\sqrt{1+a^2}\,d\varphi = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}e^{a\varphi}\Big|_{-\infty}^{\varphi_0} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}e^{a\varphi_0} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}r_0,$ $(O(\varphi=-\infty))$.

**2.** Să se afle lungimea elipsei de axe $2a$ şi $2b$ dezvoltând în serie după puterile crescătoare ale excentricităţii $e=\frac{c}{a}$.

**Rezolvare.** Ecuaţia elipsei de semiaxe $a$ şi $b$ este $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, iar ecuaţiile parametrice ale ei sunt $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $t\in[0,2\pi]$. Deci $x'(t)=-a\sin t$, $y'(t)=$ $=b\cos t$. Rezultă atunci că:

$$L(\Gamma)=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+(a^2-c^2)\cos^2 t}\,dt=$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2-c^2\cos^2 t}\,dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,dt = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,dt=$$
$$=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\sin^2 t}\,dt.$$

Folosim dezvoltarea în serie de puteri a funcţiei $\sqrt{1-x^2}$ (vezi {Capitolul 2, §3, Problema 15}):

$$\sqrt{1-x^2}=1-\frac{1}{2\cdot 1!}x^2-\frac{1}{2^2\cdot 2!}x^4-\frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}x^6-\cdots-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n\cdot n!}x^{2n}-\cdots,\quad |x|\le 1.$$

Avem:

$$\sqrt{1-e^2\sin^2 t}=1-\frac{1}{2\cdot 1!}e^2\sin^2 t-\frac{1}{2^2\cdot 2!}e^4\sin^4 t-\frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}e^6\sin^6 t-\cdots-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n\cdot n!}\times$$
$$\times e^{2n}\sin^{2n} t-\cdots.$$

Rezultă astfel:

$$L(\Gamma)=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\sin^2 t}\,dt=4a\left[\frac{\pi}{2}-\frac{e^2}{2\cdot 1!}\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,dt-\frac{e^4}{2^2\cdot 2!}\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\,dt-\right.$$
$$\left.-\frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}e^6\int_0^{\pi/2}\sin^6 t\,dt-\cdots\right]=4a\left[\frac{\pi}{2}-\frac{e^2}{2\cdot 1!}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt-\right.$$
$$\left.-\frac{e^4}{2^2\cdot 2!}\int_0^{\pi/2}\frac{(1-\cos 2t)^2}{4}\,dt-\frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}e^6\int_0^{\pi/2}\frac{(1-\cos 2t)^3}{8}\,dt-\cdots\right]=$$
$$=4a\left[\frac{\pi}{2}-\frac{e^2}{2\cdot 1!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{e^4}{2^2\cdot 2!}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}e^6\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{3}{16}\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\cdots\right]=$$
$$=4a\cdot\frac{\pi}{2}\left[1-\frac{1}{2^2\cdot 1!}e^2-\frac{3e^4}{2^2\cdot 2!\cdot 2^3}-\frac{3e^6\cdot 5}{2^3\cdot 3!\cdot 16}-\cdots\right]=2a\pi\left(1-\frac{e^2}{2^2}-\frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}e^4-\right.$$
$$\left.-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}e^6-\cdots\right).$$

**3.** Să se calculeze lungimile arcelor curbelor strâmbe $\Gamma$:

a) $x = a\cos t,\ \ y = a\sin t,\ \ z = he^{bt},\ \ t \in [0, 2\pi],\ a > 0,\ b \in I\!R^*,\ h \in I\!R.$

b) $x = ae^{-t}\cos t,\ \ y = ae^{-t}\sin t,\ \ z = be^{-t},$ între $t = 0$ şi $t = \infty,\ a,\ b \in I\!R.$

c) $x = 3t,\ \ y = 3t^2,\ \ z = 2t^3,$ de la $O(0,0,0)$ la $A(3,3,2)$.

d) $x^2 + y^2 = cz,\ \ \dfrac{y}{x} = \operatorname{tg}\dfrac{z}{c},$ de la $O(0,0,0)$ la $A(x_0, y_0, z_0);\ \ c,\ z_0 > 0.$

e) $y = a\arcsin\dfrac{x}{a},\ \ z = \dfrac{a}{4}\ln\dfrac{a-x}{a+x},$ de la $O(0,0,0)$ la $A(x_0, y_0, z_0);\ \ a,\ x_0 > 0.$

**Rezolvare.** Curbele sunt netede $(x,\ y,\ z \in C^1)$, deci:

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt.$$

a) Avem $x'(t) = -a\sin t,\ \ y'(t) = a\cos t,\ \ z'(t) = hbe^{bt}$. Deci:

$ds^2 = (a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + h^2b^2e^{2bt})\,dt^2 = (a^2 + h^2b^2e^{2bt})\,dt^2,$ iar:

$$L(\Gamma) = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2 + h^2b^2e^{2bt}}\,dt \overset{e^{bt}=u}{=} \int_1^{e^{2\pi b}}\sqrt{a^2 + h^2b^2u^2}\cdot\frac{du}{bu} = \frac{1}{b}\int_1^{e^{2\pi b}}\frac{\sqrt{a^2 + h^2b^2u^2}}{u}\,du.$$

Calculăm integrala nedefinită:

$$\int\frac{\sqrt{a^2 + h^2b^2u^2}}{u}\,du = \int\frac{a^2 + h^2b^2u^2}{u\sqrt{a^2 + h^2b^2u^2}}\,du = \underbrace{\int\frac{a^2}{u\sqrt{a^2 + h^2b^2u^2}}\,du}_{\frac{1}{u}=v} +$$

$$+h^2b^2\int\frac{u}{\sqrt{a^2 + h^2b^2u^2}}\,du = \int\frac{a^2}{\frac{1}{v}\cdot\sqrt{a^2 + h^2b^2\frac{1}{v^2}}}\cdot\left(-\frac{dv}{v^2}\right) + \sqrt{a^2 + h^2b^2u^2} =$$

$$= -\int\frac{a^2}{\sqrt{v^2a^2 + h^2b^2}}\,dv + \sqrt{a^2 + h^2b^2u^2} \overset{va=x}{=} -\int\frac{a}{\sqrt{x^2 + h^2b^2}}\,dx + \sqrt{a^2 + h^2b^2u^2} =$$

$$= -a\ln\left(x + \sqrt{x^2 + h^2b^2}\right) + \sqrt{a^2 + h^2b^2u^2} + \mathcal{C} \overset{x=av}{=} -a\ln\left(av + \sqrt{a^2v^2 + h^2b^2}\right) +$$

$$+\sqrt{a^2 + h^2b^2u^2} + \mathcal{C} \overset{v=\frac{1}{u}}{=} -a\ln\left(\frac{a}{u} + \sqrt{\frac{a^2}{u^2} + h^2b^2}\right) + \sqrt{a^2 + h^2b^2u^2} + \mathcal{C} =$$

$$= -a\ln\frac{a + \sqrt{a^2 + h^2b^2u^2}}{u} + \sqrt{a^2 + h^2b^2u^2} + \mathcal{C}.$$

Rezultă astfel:

$$L(\Gamma) = \frac{1}{b}\left[-a\ln\frac{a + \sqrt{a^2 + h^2b^2u^2}}{u} + \sqrt{a^2 + h^2b^2u^2}\right]\Bigg|_1^{e^{2\pi b}} = \frac{a}{b}\ln\frac{(a + \sqrt{a^2 + h^2b^2})e^{2\pi b}}{a + \sqrt{a^2 + h^2b^2e^{4\pi b}}} +$$

$$+\sqrt{a^2 + h^2b^2e^{4\pi b}} - \sqrt{a^2 + h^2b^2}.$$

b) Avem:

$$x'(t) = -ae^{-t}\cos t - ae^{-t}\sin t,\ \ y'(t) = -ae^{-t}\sin t + ae^{-t}\cos t,\ \ z'(t) = -be^{-t}.$$

Deci:

$$ds = \sqrt{a^2e^{-2t}(\cos^2 t + \sin^2 t + 2\sin t\cos t) + a^2e^{-2t}(\sin^2 t + \cos^2 t - 2\sin t\cos t) + b^2e^{-2t}}\,dt =$$

$$= \sqrt{2a^2e^{-2t} + b^2e^{-2t}}\,dt = e^{-t}\sqrt{2a^2 + b^2}\,dt.$$

Rezultă $\displaystyle L(\Gamma) = \int_0^\infty ds = \sqrt{2a^2 + b^2}\int_0^\infty e^{-t}\,dt = \sqrt{2a^2 + b^2}.$

c) Avem $ds = \sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4}\,dt = 3(1 + 2t^2)\,dt$. Deci:

$$L(\Gamma) = \int_0^1 3(1+2t^2)\,dt = 3\left(t + \frac{2t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = 5,$$

$(O(t=0),\ \ A(t=1))$.

d) Scriem ecuaţiile curbei sub forma:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{\sqrt{z}}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{\sqrt{z}}\right)^2 = c \\ \dfrac{y}{x} = \operatorname{tg}\dfrac{z}{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{cz}\cos t \\ y = \sqrt{cz}\sin t \\ z = tc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = c\sqrt{t}\cos t \\ y = c\sqrt{t}\sin t \\ z = ct,\ \ t \in \left[0, \frac{z_0}{c}\right], \end{cases}$$

$(O(t=0),\ \ A(t=\frac{z_0}{c}))$.

Avem $x'(t) = \dfrac{c}{2\sqrt{t}}\cos t - c\sqrt{t}\sin t,\ \ y'(t) = \dfrac{c}{2\sqrt{t}}\sin t + c\sqrt{t}\cos t,\ \ z'(t) = c.$

Apoi:

$$ds = c\sqrt{\frac{1}{4t}\cos^2 t + t\sin^2 t - \sin t\cos t + \frac{1}{4t}\sin^2 t + t\cos^2 t + \sin t\cos t + 1}\,dt =$$

$$= c\sqrt{\frac{1}{4t} + t + 1}\,dt = \frac{c(1+2t)}{2\sqrt{t}}\,dt.$$

Deci $L(\Gamma) = \displaystyle\int_0^{z_0/c} \frac{c(1+2t)}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{c}{2}\int_0^{z_0/c}(t^{-1/2} + 2t^{1/2})\,dt = \frac{c}{2}\left(2t^{1/2} + \frac{4}{3}t^{3/2}\right)\Bigg|_0^{z_0/c} =$

$$= c\sqrt{\frac{z_0}{c}} + \frac{2c}{3}\cdot\frac{z_0}{c}\sqrt{\frac{z_0}{c}} = \sqrt{\frac{z_0}{c}}\left(c + \frac{2z_0}{3}\right) = \sqrt{z_0 c}\left(1 + \frac{2z_0}{3c}\right).$$

e) Parametrizăm curba astfel $x = at,\ \ y = a\arcsin t,\ \ z = \dfrac{a}{4}\ln\dfrac{1-t}{1+t},\ \ (|t| < 1)$, unde parametrul $t$ parcurge intervalul $[0, t_0]$, $t_0 = \dfrac{x_0}{a}$ fiind parametrul corespunzător punctului $A$, cu condiţia $x_0 < a$. Avem:

$$x'(t) = a,\ \ y'(t) = \frac{a}{\sqrt{1-t^2}},\ \ z'(t) = \frac{-a}{2(1-t^2)}.$$

Rezultă:

$$ds = a\sqrt{1 + \frac{1}{1-t^2} + \frac{1}{4(1-t^2)^2}}\,dt = \frac{a}{2(1-t^2)}(3-2t^2)\,dt = \frac{a(3-2t^2)}{2(1-t^2)}\,dt.$$

Deci $L(\Gamma) = \displaystyle\int_0^{t_0} \frac{a}{2}\cdot\frac{3-2t^2}{1-t^2}\,dt = at\Big|_0^{t_0} - \frac{a}{4}\ln\frac{1-t}{1+t}\Bigg|_0^{t_0} = at_0 - \frac{a}{4}\ln\frac{1-t_0}{1+t_0} =$

$$= x_0 - \frac{a}{4}\ln\frac{a-x_0}{a+x_0} = x_0 - z_0.$$

**4.** Să se arate că următoarele curbe de ecuaţii parametrice:

$$(\Gamma)\quad \begin{cases} x(t) = tf'(t) - f(t) + \varphi'(t) \\ y(t) = f'(t) - t\varphi'(t) + \varphi(t),\ \ t \in [t_1, t_2], \end{cases}$$

$$(\Gamma')\quad \begin{cases} x(t) = tf'(t) - f(t) - \varphi'(t) \\ y(t) = f'(t) + t\varphi'(t) - \varphi(t),\ \ t \in [t_1, t_2] \end{cases}$$

au aceeaşi lungime, oricare ar fi funcţiile $f$ şi $\varphi$.

**Rezolvare.** Pentru curba $\Gamma$ avem:

$x'(t) = f'(t) + tf''(t) - f'(t) + \varphi''(t) = tf''(t) + \varphi''(t),$

$y'(t) = f''(t) - \varphi'(t) - t\varphi''(t) + \varphi'(t) = f''(t) - t\varphi''(t).$

Deci:

$$L(\Gamma)=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{t^2(f''(t))^2+(\varphi''(t))^2+2tf''(t)\varphi''(t)+(f''(t))^2+t^2(\varphi''(t))^2-2tf''(t)\varphi''(t)}\,dt=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{t^2((f''(t))^2+(\varphi''(t))^2)+((f''(t))^2+(\varphi''(t))^2)}\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(f''(t))^2+(\varphi''(t))^2}\cdot\sqrt{t^2+1}\,dt.$$

Pentru $\Gamma'$ avem:

$x'(t) = f'(t) + tf''(t) - f'(t) - \varphi''(t) = tf''(t) - \varphi''(t),$

$y'(t) = f''(t) + \varphi'(t) + t\varphi''(t) - \varphi'(t) = f''(t) + t\varphi''(t).$

Deci:

$$L(\Gamma')=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{t^2(f''(t))^2+(\varphi''(t))^2-2tf''(t)\varphi''(t)+(f''(t))^2+t^2(\varphi''(t))^2+2tf''(t)\varphi''(t)}\,dt=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{t^2((f''(t))^2+(\varphi''(t))^2)+((f''(t))^2+(\varphi''(t))^2)}\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(f''(t))^2+(\varphi''(t))^2}\cdot\sqrt{t^2+1}\,dt.$$

Rezultă că $L(\Gamma) = L(\Gamma')$, adică cele două curbe au aceeaşi lungime , oricare ar fi funcţiile $f$ şi $\varphi$.

**5.** În ce caz se poate afla cu ajutorul funcţiilor elementare lungimea arcului curbei de ecuaţie $y = x^{\frac{m+n}{n}}$.

**Rezolvare.** Avem $y'(x) = \left(1 + \dfrac{m}{n}\right) x^{\frac{m}{n}}$. Deci lungimea arcului de curbă dată pentru $x \in [x_1, x_2]$ este:

$$L(\Gamma) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(1 + \frac{m}{n}\right)^2 x^{\frac{2m}{n}}}\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[1 + \left(1 + \frac{m}{n}\right)^2 x^{\frac{2m}{n}}\right]^{1/2} dx.$$

Am obţinut o integrală binomă cu $\bar{m} = 0$, $\bar{n} = \dfrac{2m}{n}$ şi $\bar{p} = \dfrac{1}{2}$ (vezi {Capitolul 1, §1}). Doarece $\bar{p} \notin Z$, singurele cazuri în care integrala se poate calcula cu ajutorul funcţiilor elementare sunt:

$$\frac{\bar{m}+1}{\bar{n}} \in Z \Rightarrow \frac{n}{2m} \in Z \quad \text{sau} \quad \frac{\bar{m}+1}{\bar{n}} + \bar{p} \in Z \Rightarrow \frac{n}{2m} + \frac{1}{2} \in Z.$$

**6.** Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de primul tip:

a) $\displaystyle\int_\Gamma (x^2 + y^2)\,ds$, unde $(\Gamma): \begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t), \ \ t \in [0, 2\pi], \ \ (a > 0). \end{cases}$

b) $\displaystyle\int_\Gamma ye^{-x}\,ds$, unde $(\Gamma): \begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = 2\,\mathrm{arctg}\, t - t, \ \ t \in [0, 1]. \end{cases}$

c) $\displaystyle\int_\Gamma (x^{4/3} + y^{4/3})\,ds$, unde $\Gamma$ este astroida $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$.

d) $\displaystyle\int_\Gamma \sqrt{x^2 + y^2}\,ds$, unde $(\Gamma):\ x^2 + y^2 = ax$, $a > 0$.

e) $\displaystyle\int_\Gamma (x + y)\,ds$, unde $\Gamma$ este triunghiul cu vârfurile $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ şi $B(0, 1)$.

**Rezolvare.** Curbele de mai sus sunt netede pe porţiuni, iar funcţiile de sub semnul integrală sunt continue pe $I\!R^2$.

a) Avem $x'(t) = at\cos t$, $y'(t) = at\sin t$, $ds = at\,dt$. Deci:

$$I = \int_0^{2\pi} [a^2(\cos^2 t + t^2\sin^2 t + 2t\sin t\cos t + \sin^2 t + t^2\cos^2 t - 2t\sin t\cos t)] \cdot at\,dt =$$
$$= a^3\int_0^{2\pi}(1+t^2)t\,dt = a^3\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} = 2a^3(1+2\pi^2)\pi^2.$$

b) Avem $x'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $y'(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, iar $ds = \sqrt{\dfrac{4t^2}{(1+t^2)^2} + \dfrac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}}\,dt = dt.$

Rezultă:

$$I = \int_0^1 (2\mathrm{arctg}\, t - t)\cdot e^{-\ln(1+t^2)}\,dt = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{arctg}\, t - t}{1+t^2}\,dt = (\mathrm{arctg}\, t)^2 - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^1 =$$
$$= \frac{\pi^2}{16} - \ln\sqrt{2}.$$

c) Ecuaţiile parametrice ale astroidei sunt $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0,2\pi]$. Deci $x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t$, $y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t$, iar:

$$ds = \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt = 3a|\sin t\cos t|\,dt.$$

Rezultă:

$$I = \int_0^{2\pi} a^{4/3}(\cos^4 t + \sin^4 t)\cdot 3a|\sin t\cos t|\,dt = 3\int_0^{\pi/2} a^{7/3}(\cos^4 t + \sin^4 t)\sin t\cos t\,dt -$$
$$-3\int_{\pi/2}^{\pi} a^{7/3}(\cos^4 t + \sin^4 t)\sin t\cos t\,dt + 3\int_{\pi}^{3\pi/2} a^{7/3}(\cos^4 t + \sin^4 t)\sin t\cos t\,dt -$$
$$-3\int_{3\pi/2}^{2\pi} a^{7/3}(\cos^4 t + \sin^4 t)\sin t\cos t\,dt.$$

Calculăm integrala nedefinită:

$$I_t = \int\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2t\right)\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\,dt = \int\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2 2t\right)\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\,dt = -\frac{1}{8}\Big(\cos 2t +$$
$$+\frac{1}{3}\cos^3 2t\Big) + \mathcal{C}.$$

Deci:

$$I = 3a^{7/3}\left[-\frac{1}{8}\left(\cos 2t + \frac{1}{3}\cos^3 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{8}\left(\cos 2t + \frac{1}{3}\cos^3 2t\right)\Big|_{\pi/2}^{\pi} - \frac{1}{8}\Big(\cos 2t +\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\cos^3 2t\Big)\Big|_{\pi}^{3\pi/2} + \frac{1}{8}\left(\cos 2t + \frac{1}{3}\cos^3 2t\right)\Big|_{3\pi/2}^{2\pi}\right] = 4a^{7/3}.$$

d) Scriem ecuaţia cercului $\Gamma$ astfel $\left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 - \dfrac{a^2}{4} = 0$, de unde obţinem parametrizarea $x = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2}\cos t$, $y = \dfrac{a}{2}\sin t$, $t \in [0,2\pi]$.

Avem $x'(t) = -\dfrac{a}{2}\sin t$, $y'(t) = \dfrac{a}{2}\cos t$, $ds = \dfrac{a}{2}\,dt$, deci:

$$I = \int_0^{2\pi}\sqrt{a\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t\right)}\cdot\frac{a}{2}\,dt = \frac{a^2}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}\,dt -$$
$$-\frac{a^2}{2}\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{t}{2}\,dt = a^2\sin\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} - a^2\sin\frac{t}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi} = 2a^2.$$

e) $\Gamma$ este formată din $(\Gamma) = (OA)\cup(AB)\cup(BO)$ (vezi Figura 4.1.2), unde:

$$(OA): \begin{cases} x = t \\ y = 0, \ t \in [0,1]; \end{cases} \quad (AB): \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t, \ t \in [0,1]; \end{cases} \quad (BO): \begin{cases} x = 0 \\ y = t, \ t \in [0,1]. \end{cases}$$

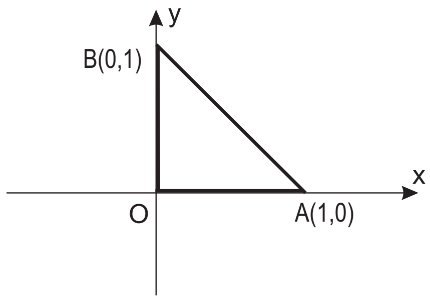


Figura 4.1.2

Rezultă:

$$I = \int_\Gamma (x+y)\,ds = \int_{OA}(x+y)\,ds + \int_{AB}(x+y)\,ds + \int_{BO}(x+y)\,ds = \int_0^1 t \cdot \sqrt{1+0}\,dt + \int_0^1 1\cdot\sqrt{1+1}\,dt + \int_0^1 t\cdot\sqrt{0+1}\,dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 + \left.\sqrt{2}\,t\right|_0^1 + \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 = 1+\sqrt{2}.$$

**7.** Să se calculeze integralele curbilinii de primul tip, luate de-a lungul următoarelor curbe strâmbe:

a) $\displaystyle\int_\Gamma xyz\,ds$, unde $(\Gamma): \begin{cases} x = t \\ y = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,t^{3/2} \\ z = \frac{1}{2}\,t^2, \quad t \in [0,1]. \end{cases}$

b) $\displaystyle\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,ds$, unde $(\Gamma): \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt, \quad t\in[0,2\pi], \quad (a,\, b \in I\!R). \end{cases}$

c) $\displaystyle\int_\Gamma x^2\,ds$, unde $(\Gamma): \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = a^2 \\ x+y+z = 0, \quad (a>0). \end{cases}$

**Rezolvare.** Curbele sunt netede, iar funcţiile de sub semnul integrală sunt continue.

a) Avem $ds = \sqrt{1+2t+t^2}\,dt = (1+t)\,dt$. Deci:

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{3}\,t^{9/2}\cdot(1+t)\,dt = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{2}{11}t^{11/2} + \frac{2}{13}t^{13/2}\right)\Big|_0^1 = \frac{16\sqrt{2}}{143}.$$

b) Avem $x'(t) = -a\sin t$, $y'(t) = a\cos t$, $z'(t) = b$, iar $ds = \sqrt{a^2+b^2}\,dt$. Rezultă:

$$I = \int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\left(a^2t + \frac{b^2t^3}{3}\right)\Big|_0^{2\pi} = \sqrt{a^2+b^2}\left(2\pi a^2 + \frac{8}{3}\pi^3 b^2\right) = \frac{2\pi}{3}(3a^2+4\pi^2b^2)\sqrt{a^2+b^2}.$$

c) Scriem ecuaţiile carteziene implicite ale curbei $\Gamma$ în felul următor:

$$\begin{cases} z = -x-y \\ 2x^2+2y^2+2xy = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -x-y \\ \left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3y^2}{4} = \dfrac{a^2}{2}. \end{cases}$$

Obţinem astfel parametrizarea:

$$\begin{cases} x+\dfrac{y}{2}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos t\\ \dfrac{y\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\sin t\\ z=-x-y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{\sqrt{6}}{6}a\sin t+\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cos t\\ y=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a\sin t\\ z=-\dfrac{\sqrt{6}}{6}a\sin t-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cos t,\quad t\in[0,2\pi].\end{cases}$$

Avem $x'(t)=-\dfrac{\sqrt{6}}{6}a\cos t-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\sin t,\ y'(t)=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a\cos t,\ z'(t)=-\dfrac{\sqrt{6}}{6}a\cos t+$ $+\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\sin t$, iar $ds=\sqrt{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}\,dt=a\,dt.$

Rezultă:

$$I=\int_0^{2\pi}\left(\frac{6}{36}a^2\sin^2 t+\frac{2a^2}{4}\cos^2 t-\frac{4\sqrt{3}}{12}a^2\sin t\cos t\right)a\,dt=\frac{a^3}{6}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt+$$

$$+\frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt-\frac{a^3\sqrt{3}}{6}\left(-\frac{\cos 2t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{a^3}{6}\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}+\frac{a^3}{2}\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}+$$

$$+\frac{a^3\sqrt{3}}{12}\cos 2t\Big|_0^{2\pi}=\frac{2\pi a^3}{3}.$$

**8.** Să se calculeze masa arcului curbei $(\Gamma):\ x=at,\ y=\dfrac{a}{2}t^2,\ z=\dfrac{a}{3}t^3,\ t\in[0,1]$, a cărei densitate variază după legea $\varrho=\sqrt{\dfrac{2y}{a}}$, $(a>0)$.

**Rezolvare.** Avem $M=\displaystyle\int_\Gamma \varrho(x,y,z)\,ds$. Deoarece $x'(t)=a,\ y'(t)=at,\ z'(t)=$ $=at^2$, iar $ds=a\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt$ rezultă:

$$M=\int_0^1\sqrt{\frac{2}{a}\cdot\frac{a}{2}t^2}\cdot a\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt=a\int_0^1 t\sqrt{1+t^2+t^4}\overset{t^2=u}{\equiv}\frac{a}{2}\int_0^1\sqrt{1+u+u^2}\,du=$$

$$=\frac{a}{2}\int_0^1\sqrt{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,du\overset{u+\frac{1}{2}=y}{\equiv}\frac{a}{2}\int_{1/2}^{3/2}\sqrt{y^2+\frac{3}{4}}\,dy.$$

Calculăm integrala nedefinită:

$$I_y=\int\sqrt{y^2+a_0^2}\,dy=\frac{1}{2}y\sqrt{y^2+a_0^2}+\frac{a_0^2}{2}\ln\left(y+\sqrt{y^2+a_0^2}\right)+\mathcal{C},\quad\left(a_0=\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Deci:

$$M=\frac{a}{4}\left[y\sqrt{y^2+\frac{3}{4}}+\frac{3}{4}\ln\left(y+\sqrt{y^2+\frac{3}{4}}\right)\right]\Big|_{1/2}^{3/2}=\frac{a}{16}\left(6\sqrt{3}-2+3\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right).$$

**9.** Să se calculeze coordonatele centrelor de greutate ale următoarelor arce, având densitatea constantă $\varrho\equiv\varrho_0$:

a) $(\Gamma):\ \begin{cases} x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t),\quad t\in[0,\pi],\quad (a>0);\end{cases}$ b) $(\Gamma):\ \begin{cases} x=e^t\cos t\\ y=e^t\sin t\\ z=e^t,\quad t\in(-\infty,0].\end{cases}$

**Rezolvare.** a) Avem $x'(t)=a(1-\cos t),\ y'(t)=a\sin t$, iar:

$$ds=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=a\sqrt{2-2\cos t}\,dt=2a\sin\frac{t}{2}\,dt.$$

Deci:

$$M = \int_\Gamma \varrho_0\, ds = 2a\varrho_0 \int_0^\pi \sin\frac{t}{2}\, dt = -2a\varrho_0 \cdot 2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi = 4a\varrho_0,$$
iar coordonatele centrului de greutate sunt:
$$x_0 = \frac{1}{M}\int_\Gamma x\varrho_0\, ds = \frac{1}{4a\varrho_0}\int_0^\pi a(t-\sin t)\varrho_0 \cdot 2a\sin\frac{t}{2}\, dt = \frac{a}{2}\int_0^\pi (t-\sin t)\cdot \sin\frac{t}{2}\, dt =$$
$$= \frac{a}{2}\left[\left(-2t\cos\frac{t}{2} + 4\sin\frac{t}{2}\right)\Big|_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\cos\frac{t}{2} - \cos\frac{3t}{2}\right) dt\right] = \frac{a}{2}\left(4 - \sin\frac{t}{2}\Big|_0^\pi +\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\sin\frac{3t}{2}\Big|_0^\pi\right) = \frac{4a}{3}, \quad \text{iar:}$$
$$y_0 = \frac{1}{M}\int_\Gamma y\varrho_0\, ds = \frac{1}{4a\varrho_0}\int_0^\pi a(1-\cos t)\varrho_0 \cdot 2a\sin\frac{t}{2}\, dt = \frac{a}{2}\int_0^\pi (1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\, dt =$$
$$= \frac{a}{2}\left[-2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi\left(-\sin\frac{t}{2} + \sin\frac{3t}{2}\right) dt\right] = \frac{a}{2}\left[2 - \frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi + \frac{1}{3}\cos\frac{3t}{2}\Big|_0^\pi\right] =$$
$$= \frac{4a}{3}.$$

Deci $G\left(\frac{4a}{3}, \frac{4a}{3}\right)$.

b) Avem $x'(t) = e^t\cos t - e^t\sin t,\ \ y'(t) = e^t\sin t + e^t\cos t,\ \ z'(t) = e^t,$ iar $ds =$ $= e^t\sqrt{3}\, dt.$

Teorema 4.1.3 rămâne adevărată şi pentru un interval infinit al parametrului $t$ şi anume $[a,\infty)$ sau $(-\infty, b]$ sau $(-\infty,\infty)$, dacă integrala improprie corespunzătoare este convergentă. Rezultă:
$$M = \int_\Gamma \varrho_0\, ds = \varrho_0\int_{-\infty}^0 \sqrt{3}\, e^t\, dt = \sqrt{3}\,\varrho_0 e^t\Big|_{-\infty}^0 = \varrho_0\sqrt{3},$$
iar coordonatele centrului de greutate sunt:
$$x_0 = \frac{1}{M}\int_\Gamma x\varrho_0\, ds = \frac{1}{\varrho_0\sqrt{3}}\int_{-\infty}^0 e^t\cos t\cdot\varrho_0 e^t\sqrt{3}\, dt = \int_{-\infty}^0 e^{2t}\cos t\, dt = e^{2t}\sin t\Big|_{-\infty}^0 -$$
$$-2\int_{-\infty}^0 e^{2t}\sin t\, dt = 2e^{2t}\cos t\Big|_{-\infty}^0 - 4\int_{-\infty}^0 e^{2t}\cos t\, dt = 2 - 4x_0, \quad \text{deci } x_0 = \frac{2}{5},$$
$$y_0 = \frac{1}{M}\int_\Gamma y\varrho_0\, ds = \frac{1}{\varrho_0\sqrt{3}}\int_{-\infty}^0 e^t\sin t\cdot\varrho_0 e^t\sqrt{3}\, dt = \int_{-\infty}^0 e^{2t}\sin t\, dt = -e^{2t}\cos t\Big|_{-\infty}^0 +$$
$$+2\int_{-\infty}^0 e^{2t}\cos t\, dt = -1 + 2e^{2t}\sin t\Big|_{-\infty}^0 - 4\int_{-\infty}^0 e^{2t}\sin t\, dt = -1 - 4y_0, \quad \text{deci } y_0 = -\frac{1}{5},$$
$$z_0 = \frac{1}{M}\int_\Gamma z\varrho_0\, ds = \frac{1}{\varrho_0\sqrt{3}}\int_{-\infty}^0 e^t\varrho_0 e^t\sqrt{3}\, dt = \frac{1}{2}e^{2t}\Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{2}.$$

Deci $G\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$.

**10.** Să se calculeze momentele de inerţie planare, axiale şi central pentru arcul de elice $(\Gamma):\ x = a\cos t,\ \ y = a\sin t,\ \ z = bt,\ \ t\in[0,2\pi]$, având densitatea constantă $\varrho_0$.

**Rezolvare.** Avem $x'(t) = -a\sin t,\ \ y'(t) = a\cos t,\ \ z'(t) = b,$ iar $ds = \sqrt{a^2+b^2}\, dt.$ Rezultă:
$$I_{xy} = \int_\Gamma z^2\varrho_0\, ds = \varrho_0\int_0^{2\pi} b^2t^2\sqrt{a^2+b^2}\, dt = b^2\sqrt{a^2+b^2}\,\varrho_0\cdot\frac{8\pi^3}{3},$$
$$I_{yz} = \int_\Gamma x^2\varrho_0\, ds = \varrho_0\int_0^{2\pi} a^2\cos^2 t\cdot\sqrt{a^2+b^2}\, dt = a^2\sqrt{a^2+b^2}\,\varrho_0\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\, dt =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{a^2+b^2}}{2}\varrho_0\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = \pi a^2\sqrt{a^2+b^2}\,\varrho_0,$$

$$I_{xz} = \int_\Gamma y^2\varrho_0\,ds = \varrho_0\int_0^{2\pi} a^2\sin^2 t\sqrt{a^2+b^2}\,dt = a^2\sqrt{a^2+b^2}\,\varrho_0\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{a^2+b^2}\,\varrho_0}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = \pi a^2\sqrt{a^2+b^2}\,\varrho_0.$$

Apoi:

$$I_x = I_{xz}+I_{xy} = \frac{8\pi^3}{3}b^2\sqrt{a^2+b^2}\,\varrho_0+\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}\,\varrho_0 = \sqrt{a^2+b^2}\,\varrho_0\left(\frac{8\pi^3b^2}{3}+\pi a^2\right),$$

$$I_y = I_{xy}+I_{yz} = b^2\sqrt{a^2+b^2}\,\varrho_0\frac{8\pi^3}{3}+\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}\,\varrho_0 = \sqrt{a^2+b^2}\,\varrho_0\left(\frac{8\pi^3b^2}{3}+\pi a^2\right),$$

$$I_z = I_{xz}+I_{yz} = 2\pi a^2\varrho_0\sqrt{a^2+b^2},$$

iar $I_0 = I_{xy}+I_{yz}+I_{xz} = \dfrac{8\pi^3}{3}b^2\varrho_0\sqrt{a^2+b^2}+2\pi a^2\varrho_0\sqrt{a^2+b^2} = 2\pi\varrho_0\sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{4\pi^2b^2}{3}+a^2\right).$

## PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

**11.** Să se calculeze lungimile arcelor $\Gamma$ de curbă plane:

a) $\begin{cases} x = \operatorname{ch}^2 t \\ y = 2\operatorname{sh} t, \ \ t\in[t_1,t_2]; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = t-\operatorname{sh} t\cdot\operatorname{ch} t \\ y = 2\operatorname{ch} t, \ \ t\in[0,T]; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = (a-b)\cos t+b\cos\dfrac{a-b}{b}t \\ y = (a-b)\sin t-b\sin\dfrac{a-b}{b}t, \ \ a>b>0, \ \ t\in\left[0,\dfrac{\pi b}{a}\right], \end{cases}$ (arcul hipocicloidei);

d) $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$, $0\le x\le b$, (lănţişorul);

e) $r(\varphi) = a\varphi$, $\varphi\in[0,2\pi]$, $a>0$, (arcul spiralei lui Arhimede);

f) $r(\varphi) = \dfrac{a}{\varphi}$, $\varphi\in[\varphi_1,\varphi_2]$; $\varphi_1,\ \varphi_2>0$, (arcul spiralei hiperbolice).

**12.** Să se calculeze lungimile arcelor de curbă strâmbe $\Gamma$:

a) $x = t$, $y = \sqrt{3}\,t^2$, $z = 2\,t^3$, $t\in[t_1,t_2]$;

b) $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = ht$, $t\in[0,2\pi]$, $R>0$, $h\in\mathbb{R}$;

c) $x = ae^{kt}\cos t$, $y = ae^{kt}\sin t$, $z = ae^{kt}$, $t\in[0,t_0]$, $a>0$, $k\in\mathbb{R}^*$;

d) $y = x^2$, $z = \dfrac{2}{3}x^3$, de la $O(0,0,0)$ la $A(3,9,18)$;

e) $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $\sqrt{x^2+y^2}\cdot\operatorname{ch}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right) = a$, de la punctul $A(a,0,0)$ la punctul $B(x_0,y_0,z_0)$, $a>0$;

f) $(x-y)^2 = a(x+y)$, $x^2-y^2 = \dfrac{9}{8}z^2$, de la $O(0,0,0)$ la $A(x_0,y_0,z_0)$, $a>0$.

**13.** Să se demonstreze că lungimea arcului curbei ale cărei ecuaţii parametrice se obţin rezolvând sistemul:

$$(\Gamma):\ \begin{cases} x\sin\varphi + y\cos\varphi = f'(\varphi) \\ x\cos\varphi - y\sin\varphi = f''(\varphi), \quad \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2] \end{cases}$$

este $L(\Gamma) = [f(\varphi_2) + f''(\varphi_2)] - [f(\varphi_1) + f''(\varphi_1)]$.

**14.** Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de primul tip:

a) $\displaystyle\int_\Gamma y^2\,ds$, unde $(\Gamma):\ \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi], \ (a > 0). \end{cases}$

b) $\displaystyle\int_\Gamma xy\,ds$, unde $\Gamma$ este arcul hiperbolei $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $y = a\,\mathrm{sh}\,t$, $t \in [0, t_0]$, $a > 0$.

c) $\displaystyle\int_\Gamma xy\,ds$, unde $\Gamma$ este arcul din primul cadran al elipsei $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $a$, $b > 0$.

d) $\displaystyle\int_\Gamma (x^2 + y^2)\,ds$, unde $\Gamma$ este segmentul de dreaptă $AB$, $A(a, a)$, $B(b, b)$, $b > a$.

e) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{ds}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$, unde $\Gamma$ este arcul spiralei hiperbolice $r = \dfrac{1}{\varphi}$ cuprins între $\varphi = \sqrt{3}$ şi $\varphi = 2\sqrt{2}$.

**15.** Să se calculeze integralele curbilinii de primul tip, luate de-a lungul următoarelor curbe strâmbe:

a) $\displaystyle\int_\Gamma z\,ds$, unde $(\Gamma):\ x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $t \in [0, 2\pi]$.

b) $\displaystyle\int_\Gamma z\,ds$, unde $\Gamma$ este arcul curbei $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 = ax$ luat între punctul $O(0, 0, 0)$ şi punctul $A(a, a, a\sqrt{2})$.

**16.** Să se calculeze masa curbei $(\Gamma):\ x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ ştiind că densitatea liniară a acesteia în punctul $(x, y)$ este $\varrho(x, y) = |y|$.

**17.** Să se găsească masa arcului curbei $y = \ln x$ cuprins între punctele de abscise $x_1$ şi $x_2$, dacă densitatea liniară a curbei în fiecare punct este egală cu pătratul abscisei ($\varrho = x^2$).

**18.** Să se găsească masa arcului lănţişorului $y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$ cuprins între punctele $x = 0$ şi $x = a$ dacă densitatea curbei în fiecare punct al ei este invers proporţională cu ordonata punctului ($\varrho = k/y$).

**19.** Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al curbei $y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$ între $A(0, a)$ şi $B(b, h)$, $h = y(b)$, având densitatea constantă $\varrho \equiv \varrho_0$.

**20.** Să se calculeze coordonatele centrului de greutate, precum şi momentele de inerţie planare, axiale şi central pentru conturul alcătuit din triunghiul sferic $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$,

$x > 0,\ y > 0,\ z > 0$, de densitate $\varrho \equiv \varrho_0$.

# §2. INTEGRALE CURBILINII DE AL DOILEA TIP

Fie $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$ o curbă dată prin ecuaţiile:

$$x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t),\ \ z = \chi(t),\ \ t \in [a, b] \tag{4.2.1}$$

şi orientată de la $A(t = a)$ la $B(t = b)$ în sensul de creştere a parametrului $t$ de la $a$ la $b$, iar $P : D \subset I\!\!R^3 \to I\!\!R$ o funcţie definită pe domeniul $D$ care conţine curba $\overset{\frown}{AB}$.

Spunem că funcţia $P$ este *integrabilă pe* $\Gamma$ *în raport cu* $x$ dacă există şi este finită limita sumelor integrale:

$$\sigma_\pi^x = \sum_{i=0}^{n-1} P(M_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} P(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i), \chi(\tau_i)) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

când norma $\mu$ a diviziunii $\pi\ :\ A_0 = A, A_1, \ldots, A_n = B$ tinde la 0 şi această limită este independentă de diviziunea $\pi$ şi de alegerea punctelor intermediare $M_i \in \overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$, $M_i(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i), \chi(\tau_i))$, unde:

$$\mu = \max_{i=\overline{0,n-1}} \|A_iA_{i+1}\| = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2},$$

cu $x_i = \varphi(t_i)$, $y_i = \psi(t_i)$, $z_i = \chi(t_i)$ coordonatele punctului $A_i$, $i = \overline{0, n}$.

Dacă $P$ este integrabilă pe $\overset{\frown}{AB}$ în raport cu $x$ atunci $I = \lim\limits_{\mu \to 0} \sigma_\pi^x$ se numeşte *integrala curbilinie de al doilea tip* sau *de a doua specie în raport cu* $x$ a funcţiei $P$ pe $\overset{\frown}{AB}$ şi se notează cu $\int_\Gamma P(x, y, z)\, dx$.

Analog se definesc *integrala curbinie de al doilea tip în raport cu* $y$ a funcţiei $Q : D \subset$ $\subset I\!\!R^3 \to I\!\!R$ pe $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$: $\int_\Gamma Q(x, y, z)\, dy$ şi *integrala curbilinie de al doilea tip în raport cu* $z$ a funcţiei $R : D \subset I\!\!R^3 \to I\!\!R$ pe $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$: $\int_\Gamma R(x, y, z)\, dz$.

*Proprietăţi* a) Dacă $P_1$, $P_2$, $Q_1$, $Q_2$, $R_1$, $R_2 : D \subset I\!\!R^3 \to I\!\!R$, $\Gamma$ este o curbă conţinută în domeniul $D$, $\exists \int_\Gamma P_1\, dx + Q_1\, dy + R_1\, dz$ şi $\exists \int_\Gamma P_2\, dx + Q_2\, dy + R_2\, dz$, iar $\lambda$, $\mu \in I\!\!R$ atunci $\exists \int_\Gamma (\lambda P_1 + \mu P_2)\, dx + (\lambda Q_1 + \mu Q_2)\, dy + (\lambda R_1 + \mu R_2)\, dz$ şi are loc relaţia:

$$\int_\Gamma (\lambda P_1 + \mu P_2)\, dx + (\lambda Q_1 + \mu Q_2)\, dy + (\lambda R_1 + \mu R_2)\, dz = \lambda \int_\Gamma P_1\, dx + Q_1\, dy + R_1\, dz +$$
$$+ \mu \int_\Gamma P_2\, dx + Q_2\, dy + R_2\, dz.$$

b) Dacă $P,\ Q,\ R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1,\ \Gamma_2 \subset D$ şi $\exists \displaystyle\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, atunci $\exists \displaystyle\int_{\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ şi $\exists \displaystyle\int_{\Gamma_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ şi în plus:

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + \int_{\Gamma_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

**Teorema 4.2.1.** Dacă $\Gamma$ este o curbă rectificabilă, iar $P,\ Q,\ R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ($\Gamma \subset D$) sunt funcţii continue pe domeniul $D$ atunci $\exists \displaystyle\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$.

**Teorema 4.2.2.** Dacă $\Gamma$ este o curbă netedă de ecuaţii (4.2.1), iar $P,\ Q,\ R : D \subset \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ($\Gamma \subset D$) sunt continue pe domeniul $D$, atunci $P$, $Q$ şi $R$ sunt integrabile pe $\Gamma$ în raport cu $x$, cu $y$, respectiv cu $z$ şi are loc relaţia:

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = \int_a^b [P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)) \cdot \varphi'(t) + $$
$$+ Q(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)) \cdot \psi'(t) + R(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)) \cdot \chi'(t)]\ dt.$$

Teorema rămâne adevărată şi pentru $\Gamma$ netedă pe porţiuni.

Fie câmpul vectorial $\vec{F}(\vec{r}) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Se numeşte *lucrul mecanic al câmpului* $\vec{F}$ de-a lungul unei curbe $\Gamma$:

$$\int_\Gamma \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Dacă masa punctului material este $m$ atunci forţa care acţionează asupra punctului este $m\vec{F}$. Dacă conturul $\Gamma$ este închis, lucrul mecanic se mai numeşte şi *circulaţia câmpului* $\vec{F}$ de-a lungul conturului $\Gamma$.

**Independenţa de drum a integralei curbilinii de al doilea tip**

Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu, iar $P,\ Q,\ R : D \to \mathbb{R}$ funcţii continue pe $D$.

Integrala $\displaystyle\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ este *independentă de drum* pe domeniul $D$ dacă $\forall\, A,\ B \in D$ şi $\forall\, \Gamma_1,\ \Gamma_2$ două curbe simple, rectificabile din $D$ care unesc $A$ şi $B$, are loc relaţia $\displaystyle\int_{\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\Gamma_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$.

Integrala $\displaystyle\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ este independentă de drum pe domeniul $D$ dacă pentru orice curbă $\Gamma$ simplă, închisă şi rectificabilă conţinută în $D$ are loc relaţia:

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

**Teorema 4.2.3.** Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu, iar $P,\ Q,\ R : D \to \mathbb{R}$ funcţii continue pe $D$. Atunci $\displaystyle\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ este independentă de drum pe domeniul $D$ dacă şi numai dacă $\exists\, F : D \to \mathbb{R}$ diferenţiabilă pe $D$ astfel încât:

$$dF(x,y,z) = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz,\ \ \forall\,(x,y,z) \in D.$$

Deci $P = \dfrac{\partial F}{\partial x}$, $Q = \dfrac{\partial F}{\partial y}$, $R = \dfrac{\partial F}{\partial z}$.

Un domeniu $D \subset \mathbb{R}^3$ se numeşte *simplu conex* dacă orice curbă simplă, închisă şi rectificabilă inclusă în $D$ poate fi deformată continuu la un punct $P \in D$. Un domeniu

*plan* $D \subset I\!R^2$ este *simplu conex* dacă o dată cu orice curbă $\Gamma$ simplă, închisă şi rectificabilă conţinută în $D$ şi domeniul interior determinat de curba $\Gamma$ este conţinut în $D$ (din punct de vedere intuitiv nu are "găuri").

**Teorema 4.2.4.** Fie $D$ un domeniu simplu conex din $I\!R^3$, $P$, $Q$, $R : D \to I\!R$ funcţii continue care admit derivate parţiale $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \dfrac{\partial R}{\partial y}, \dfrac{\partial R}{\partial x}, \dfrac{\partial P}{\partial z}$ continue pe $D$. Atunci $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ este diferenţiala unei funcţii $F$ dacă şi numai dacă:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \forall\,(x, y, z) \in D. \tag{4.2.2}$$

**Calculul integralei curbilinii de al doilea tip**

În cazul Teoremei 4.2.3 dacă $P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = dF(x, y, z)$ atunci pentru $\Gamma = \overset{\frown}{AB} \subset D$, $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ are loc relaţia:

$$\int_\Gamma P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = F(x_2, y_2, z_2) - F(x_1, y_1, z_1).$$

În cazul Teoremei 4.2.4 funcţia $F$ (primitiva) poate fi determinată din formula:

$$F(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(t, y, z)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, t, z)\,dt + \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, t)\,dt \quad \text{sau}$$

$$F(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)\,dt + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)\,dt,$$

unde $(x_0, y_0, z_0)$ este un punct oarecare fixat al domeniului $D$.

Din punct de vedere mecanic cazul diferenţialei totale corespunde lucrului mecanic al unei forţe care derivă de la un potenţial.

Tot în cazul Teoremei 4.2.4, dacă se demonstrează relaţiile (4.2.2), integrala curbilinie de al doilea tip se poate calcula alegând drumuri simple: paralele cu $Ox$ sau $Oy$ sau $Oz$, drepte, cercuri, elipse, hiperbole incluse în $D$.

## PROBLEME REZOLVATE

**1.** Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de al doilea tip:

a) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{x^2\,dy - y^2\,dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$, unde $\Gamma$ este arcul $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ cuprins în primul cadran şi parcurs în sens direct trigonometric.

b) $\displaystyle\int_\Gamma (2a - y)\,dx + x\,dy$, unde $(\Gamma) : \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi], \end{cases}$

(cicloida) parcursă în sensul creşterii parametrului $t$.

c) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dx}{y} - \sqrt{2x}\,dy$, unde $\Gamma$ este semicercul $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $y \geq 0$, parcurs în sens direct trigonometric.

d) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dy}{x+3}$, unde $\Gamma$ este arcul elipsei $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-1=0$ între punctele $A(3,0)$ şi $B(0,2)$ parcurs în sens direct trigonometric.

e) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{x\,dy-y\,dx}{ax^2+2bxy+cy^2}$, $\;b^2-ac<0$, unde $\Gamma$ este cercul $x^2+y^2=R^2$ parcurs în sens direct trigonometric.

f) $\displaystyle\int_\Gamma (x^2-y^2)\,dx+2xy\,dy$, unde $\Gamma$ este arcul de curbă $y=x^n$ cuprins între punctele $O(0,0)$ şi $A(1,1)$ şi parcurs în sens direct trigonometric.

**Rezolvare.** Curbele de mai sus sunt netede, iar funcţiile de sub semnul integrală sunt continue pe domeniul lor de definiţie.

a) Curba $\Gamma$ are parametrizarea: $x=a\cos^3 t$, $\;y=a\sin^3 t$, $\;t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, (vezi Figura 4.2.1). Rezultă:

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{a^2\cos^6 t\cdot 3a\sin^2 t\cos t+a^2\sin^6 t\cdot 3a\cos^2 t\sin t}{a^{5/3}\cos^5 t+a^{5/3}\sin^5 t}\,dt=$$
$$=3a^{4/3}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 t\cos^2 t(\cos^5 t+\sin^5 t)}{\sin^5 t+\cos^5 t}\,dt=\frac{3}{4}a^{4/3}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt=\frac{3}{8}a^{4/3}\int_0^{\pi/2}(1-$$
$$-\cos 4t)\,dt=\frac{3a^{4/3}}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{3\pi a^{4/3}}{16}.$$

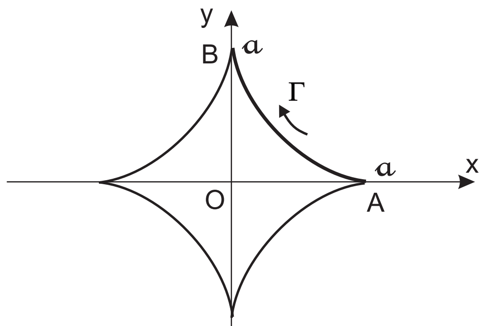

Figura 4.2.1

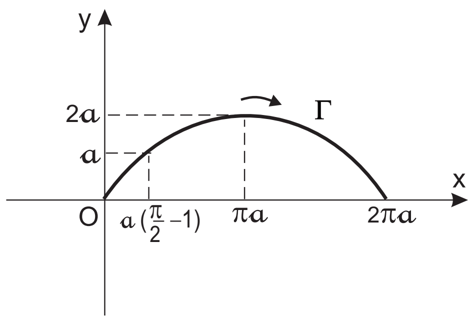

Figura 4.2.2

b) Pentru $\Gamma$ (vezi Figura 4.2.2) dată în Problemă, avem:

$$I=\int_0^{2\pi}\{[2a-a(1-\cos t)]\cdot a(1-\cos t)+a(t-\sin t)\cdot a\sin t\}\,dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos^2 t+$$
$$+t\sin t-\sin^2 t)\,dt=a^2\int_0^{2\pi}t\sin t\,dt=-a^2t\cos t\Big|_0^{2\pi}+a^2\sin t\Big|_0^{2\pi}=-2\pi a^2.$$

c) Scriem pe $\Gamma$ astfel $(x-1)^2+y^2-1=0$, $\;y\geq 0$, de unde rezultă parametrizarea $x=1+\cos t$, $\;y=\sin t$, $\;t\in[0,\pi]$, (vezi Figura 4.2.3).

Obţinem astfel:

$$I=\int_0^{\pi}\left[\frac{-\sin t}{\sin t}-\sqrt{2(1+\cos t)}\cdot\cos t\right]dt=\int_0^{\pi}\left(-1-2\cos\frac{t}{2}\cdot\cos t\right)dt=$$
$$=-\pi-\int_0^{\pi}\left(\cos\frac{3t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)dt=-\pi-\left(\frac{2}{3}\sin\frac{3t}{2}+2\sin\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{\pi}=-\left(\frac{4}{3}+\pi\right).$$

d) Avem $(\Gamma):\; x=3\cos t$, $\;y=2\sin t$, $\;t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, (vezi Figura 4.2.4). Rezultă:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos t}{3\cos t + 3}\, dt = \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1+\cos t}\, dt.$$

Facem schimbarea de variabilă $\operatorname{tg}\frac{t}{2} = u \Rightarrow \cos t = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$, $t = 2\operatorname{arctg} u$, $dt = \dfrac{2}{1+u^2}\, du$. Obţinem astfel:

$$I = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{\frac{1-u^2}{1+u^2}}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}\, du = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{(1-u^2)}{2(1+u^2)}\, du = -\frac{2}{3}\int_0^1 \frac{u^2-1}{u^2+1}\, du = -\frac{2}{3}u\Big|_0^1 + \frac{4}{3}\operatorname{arctg} u\Big|_0^1 = \frac{\pi - 2}{3}.$$

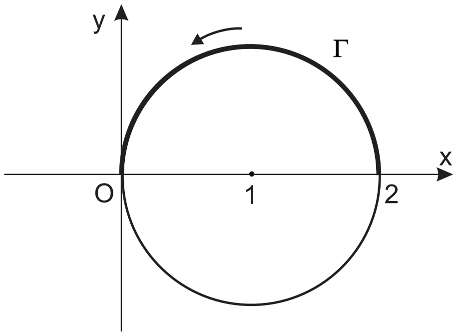


Figura 4.2.3

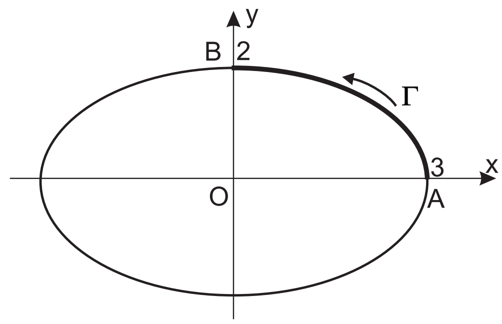


Figura 4.2.4

e) Avem $(\Gamma): \ x = R\cos t, \ y = R\sin t, \ t \in [0, 2\pi]$. Rezultă atunci:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{R\cos t(R\cos t) - R\sin t(-R\sin t)}{aR^2\cos^2 t + 2bR^2 \sin t\cos t + cR^2\sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a\cos^2 t + 2b\sin t\cos t + c\sin^2 t} =$$
$$= \int_0^{\pi} \frac{dt}{a\cos^2 t + 2b\sin t\cos t + c\sin^2 t} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dt}{a\cos^2 t + 2b\sin t\cos t + c\sin^2 t}.$$

Făcând în a doua integrală de mai sus schimbarea de variabilă $2\pi - t = u$ şi revenind înapoi la notaţia variabilei independente $t$, obţinem:

$$I = \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{dt}{a\cos^2 t + 2b\sin t\cos t + c\sin^2 t}}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{dt}{a\cos^2 t - 2b\sin t\cos t + c\sin^2 t}}_{I_2}.$$

Pentru $I_1$ avem:

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{a\cos^2 t + 2b\sin t\cos t + c\sin^2 t} + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dt}{a\cos^2 t + 2b\sin t\cos t + c\sin^2 t}.$$

În a doua integrală de mai sus facem schimbarea $\pi - t = v$ şi revenim la notaţia $t$. Obţinem:

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{a\cos^2 t + 2b\sin t\cos t + c\sin^2 t} + \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{a\cos^2 t - 2b\sin t\cos t + c\sin^2 t}.$$

În mod asemănător rezultă că:

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{a\cos^2 t - 2b\sin t\cos t + c\sin^2 t} + \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{a\cos^2 t + 2b\sin t\cos t + c\sin^2 t}.$$

Astfel am obţinut că:

$$I = 2\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{a\cos^2 t + 2b\sin t\cos t + c\sin^2 t} + 2\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{a\cos^2 t - 2b\sin t\cos t + c\sin^2 t}.$$

În integralele de mai sus facem schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} t = u$. Obţinem:

$$I=2\int_0^{\infty}\frac{1}{a\frac{1}{1+u^2}+2b\frac{u}{1+u^2}+c\frac{u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{du}{1+u^2}+2\int_0^{\infty}\frac{1}{a\frac{1}{1+u^2}-2b\frac{u}{1+u^2}+c\frac{u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{du}{1+u^2}=$$

$$=2\int_0^{\infty}\frac{du}{cu^2+2bu+a}+2\int_0^{\infty}\frac{du}{cu^2-2bu+a}=\frac{2}{c}\int_0^{\infty}\frac{du}{u^2+\frac{2b}{c}u+\frac{a}{c}}+\frac{2}{c}\int_0^{\infty}\frac{du}{u^2-\frac{2b}{c}u+\frac{a}{c}}=$$

$$=\frac{2}{c}\int_0^{\infty}\frac{du}{\left(u+\frac{b}{c}\right)^2+\frac{a}{c}-\frac{b^2}{c^2}}+\frac{2}{c}\int_0^{\infty}\frac{du}{\left(u-\frac{b}{c}\right)^2+\frac{a}{c}-\frac{b^2}{c^2}}=\frac{2}{c}\cdot\frac{c}{\sqrt{ac-b^2}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{u+\frac{b}{c}}{\frac{\sqrt{ac-b^2}}{c}}\Bigg|_0^{\infty}+$$

$$+\frac{2}{c}\cdot\frac{c}{\sqrt{ac-b^2}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{u-\frac{b}{c}}{\frac{\sqrt{ac-b^2}}{c}}\Bigg|_0^{\infty}=\frac{2}{\sqrt{ac-b^2}}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\sqrt{ac-b^2}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{b}{\sqrt{ac-b^2}}+\frac{2}{\sqrt{ac-b^2}}\times$$

$$\times\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\sqrt{ac-b^2}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{-b}{\sqrt{ac-b^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{ac-b^2}},\ (c>0).$$

f) Avem $(\Gamma):\ x=t,\ \ y=t^n,\ \ t\in[0,1]$. Rezultă atunci:

$$I=\int_0^1[(t^2-t^{2n})\cdot 1+2t\cdot t^n\cdot nt^{n-1}]\,dt=\int_0^1(t^2-t^{2n}+2nt^{2n})\,dt=\left(\frac{t^3}{3}+(2n-1)\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2n-1}{2n+1}=\frac{8n-2}{3(2n+1)}.$$

**2.** Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de al doilea tip:

a) $\displaystyle\int_\Gamma\frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, unde $\Gamma$ este pătratul cu vârfurile $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$, $D(0,-1)$ parcurs în sens direct trigonometric.

b) $\displaystyle\int_\Gamma x\,dy-y\,dx$, unde $\Gamma$ este determinat de curbele $x^2+y^2=4$, $y=x\sqrt{3}$, $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $x\geq 0$ şi parcurs în sens direct trigonometric.

c) $\displaystyle\int_\Gamma\frac{x+y}{x-y}(x\,dx-y\,dy)$, unde $\Gamma$ este determinat de curbele $x^2+y^2=1$, $y=0$, $y=x\cdot\operatorname{tg}\alpha$, $\alpha<\dfrac{\pi}{4}$, $x\geq 0$ şi parcurs în sens direct trigonometric.

**Rezolvare.** Curbele de mai sus sunt netede pe porţiuni, iar funcţiile de sub semnul integrală sunt continue.

a) Curba $\Gamma$ este pătratul $ABCD$ (vezi Figura 4.2.5), adică $(\Gamma)=(AB)\cup(BC)\cup(CD)\cup(DA)$, unde:

$$(AB):\begin{cases}x=t\\ y=1-t,\ \ t\in[1,0],\end{cases}\qquad (BC):\begin{cases}x=t\\ y=1+t,\ \ t\in[0,-1],\end{cases}$$

$$(CD):\begin{cases}x=t\\ y=-1-t,\ \ t\in[-1,0],\end{cases}\qquad (DA):\begin{cases}x=t\\ y=t-1,\ \ t\in[0,1].\end{cases}$$

Rezultă:

$$I=\int_1^0\frac{(1-1)}{t+(1-t)}\,dt+\int_0^{-1}\frac{(1+1)}{-t+1+t}\,dt+\int_{-1}^0\frac{(1-1)}{-t+1+t}\,dt+\int_0^1\frac{(1+1)}{t+1-t}\,dt=0.$$

b) Avem $(\Gamma)=(OA)\cup(AB)\cup(BO)$ (vezi Figura 4.2.6), unde:

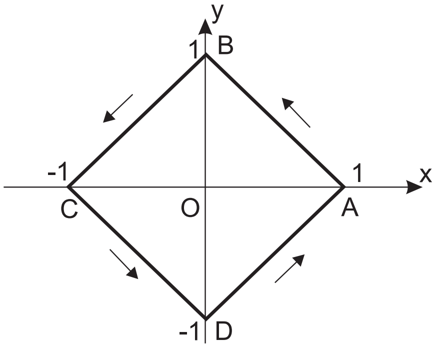


Figura 4.2.5

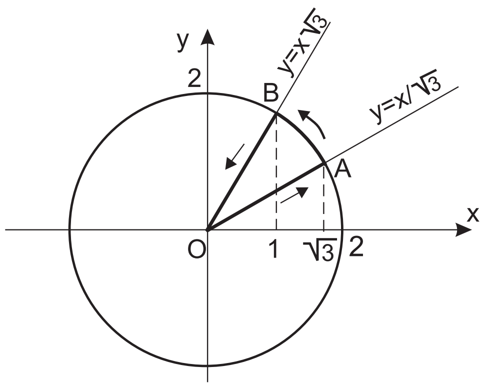


Figura 4.2.6

$$(OA): \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{3}}, \ \ t \in [0, \sqrt{3}], \end{cases} \qquad (AB): \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t, \ \ t \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right], \end{cases}$$

$$(BO): \begin{cases} x = t \\ y = t\sqrt{3}, \ \ t \in [1, 0]. \end{cases}$$

Rezultă:

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \left( t \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{t}{\sqrt{3}} \cdot 1 \right) dt + \int_{\pi/6}^{\pi/3} (2\cos t \cdot 2\cos t + 2\sin t \cdot 2\sin t)\, dt + \int_1^0 (t \cdot \sqrt{3} - $$
$$ -t\sqrt{3} \cdot 1)\, dt = \frac{2\pi}{3}.$$

c) Aici $(\Gamma) = (OA) \cup (AB) \cup (BO)$ (vezi Figura 4.2.7), unde:

$$(OA): \begin{cases} x = t \\ y = 0, \ \ t \in [0, 1], \end{cases} \qquad (AB): \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, \ \ t \in [0, \alpha], \end{cases}$$

$$(BO): \begin{cases} x = t \\ y = t \cdot \operatorname{tg} \alpha, \ \ t \in [\cos \alpha, 0]. \end{cases}$$

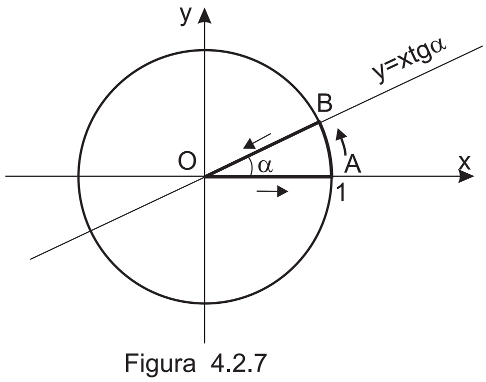


Figura 4.2.7

Rezultă:

$$I = \int_0^1 \frac{t}{t}(t \cdot 1 - 0 \cdot 0)\, dt + \int_0^\alpha \frac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t} \cdot (-\cos t \sin t - \sin t \cos t)\, dt +$$
$$+ \int_{\cos \alpha}^0 \frac{t + t \cdot \operatorname{tg} \alpha}{t - t \cdot \operatorname{tg} \alpha}(t \cdot 1 - t \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha)\, dt = \frac{1}{2} - \int_0^\alpha \frac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t} \cdot \sin 2t\, dt +$$

$$+(1+\operatorname{tg}\alpha)^2\cdot\int_{\cos\alpha}^{0} t\,dt=\frac{1}{2}-(1+\operatorname{tg}\alpha)^2\cdot\frac{\cos^2\alpha}{2}-\int_0^\alpha\frac{\cos^2 t+\sin^2 t+\sin 2t}{\cos^2 t-\sin^2 t}\cdot\sin 2t\,dt=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-\int_0^\alpha\frac{\sin 2t}{\cos 2t}\,dt-\int_0^\alpha\frac{\sin^2 2t}{\cos 2t}\,dt=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1+\sin 2\alpha)+\frac{1}{2}\ln\cos 2\alpha-$$
$$-\int_0^\alpha\frac{dt}{\cos 2t}+\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^\alpha=\frac{1}{2}\ln\cos 2\alpha-\int_0^\alpha\frac{dt}{\cos 2t}.$$

Pentru ultima integrală de mai sus avem:

$$I_1=\int_0^\alpha\frac{dt}{\cos 2t}\overset{tg\,t=u}{=}\int_0^{tg\,\alpha}\frac{1+u^2}{1-u^2}\cdot\frac{du}{1+u^2}=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\Big|_0^{tg\,\alpha}=-\frac{1}{2}\ln\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}.$$

Deci:

$$I=\frac{1}{2}\ln\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{2}\ln\frac{(1-\operatorname{tg}\alpha)^2}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\ln(\cos\alpha-\sin\alpha).$$

**3.** Să se calculeze următoarele integrale curbilinii luate de-a lungul curbelor strâmbe:

a) $\int_\Gamma y^2\,dx+z^2\,dy+x^2\,dz$, unde $\Gamma$ este curba lui Viviani, adică $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2\\ x^2+y^2=ax,\ \ z\geq 0,\end{cases}$ $(a>0)$ parcursă în sens direct trigonometric dacă privim dinspre partea pozitivă a axei $Ox$.

b) $\int_\Gamma (y^2-z^2)\,dx+2yz\,dy-x^2\,dz$, unde $(\Gamma):\ x=t,\ y=t^2,\ z=t^3,\ t\in[0,1]$, parcursă în sensul creşterii parametrului $t$.

c) $\int_\Gamma (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$, unde $\Gamma$ este cercul: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2\\ y=x\cdot\operatorname{tg}\alpha,\ \ 0<\alpha<\pi,\end{cases}$ parcurs în sens direct trigonometric dacă privim dinspre partea pozitivă a axei $Ox$.

**Rezolvare.** a) $\Gamma$ este curba de intersecţie dintre sfera de ecuaţie $x^2+y^2+z^2=a^2$ şi cilindrul de ecuaţie $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$, situată în semispaţiul $z\geq 0$ (vezi Figura 4.2.8).

Pentru a determina o parametrizare a curbei folosim coordonatele cilindrice $x=$ $=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$, $r\in[0,a]$, $\varphi\in[0,2\pi)$. Introduse în ecuaţiile curbei, obţinem $r^2+z^2=a^2$, $r^2=ar\cos\varphi$, de unde rezultă $r=a\cos\varphi$, $z=\pm\sqrt{a^2-a^2\cos^2\varphi}$.

Deci $(\Gamma):\ \begin{cases} x=a\cos^2\varphi\\ y=a\sin\varphi\cos\varphi\\ z=a|\sin\varphi|,\ \ \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right].\end{cases}$

Atunci rezultă:

$$I=\int_0^{\pi/2}(-a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\cdot 2a\cos\varphi\sin\varphi+a^2\sin^2\varphi\cdot a(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)+$$
$$+a^2\cos^4\varphi\cdot a\cos\varphi)\,d\varphi+\int_{3\pi/2}^{2\pi}(-a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\cdot 2a\cos\varphi\sin\varphi+a^2\sin^2\varphi\cdot a(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)-$$
$$-a^2\cos^4\varphi\cdot a\cos\varphi)\,d\varphi=a^3\int_0^{\pi/2}(-2\sin^3\varphi\cos^3\varphi+\sin^2\varphi\cos^2\varphi-\sin^4\varphi+\cos^5\varphi)\,d\varphi+$$
$$+a^3\int_{3\pi/2}^{2\pi}(-2\sin^3\varphi\cos^3\varphi+\sin^2\varphi\cos^2\varphi-\sin^4\varphi-\cos^5\varphi)\,d\varphi.$$

Făcând în a doua integrală de mai sus schimbarea $2\pi-\varphi=u$, obţinem:

$$I = 2a^3 \int_0^{\pi/2} (\sin^2\varphi\cos^2\varphi - \sin^4\varphi)\, d\varphi = 2a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \cdot \cos 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= 2a^3 \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\varphi}{2} \cdot \cos 2\varphi\, d\varphi = \frac{a^3}{2} \sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/2} - a^3 \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\, d\varphi = -\frac{a^3\pi}{4} -$$

$$-\frac{a^3}{8}\sin 4\varphi\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{a^3\pi}{4}.$$

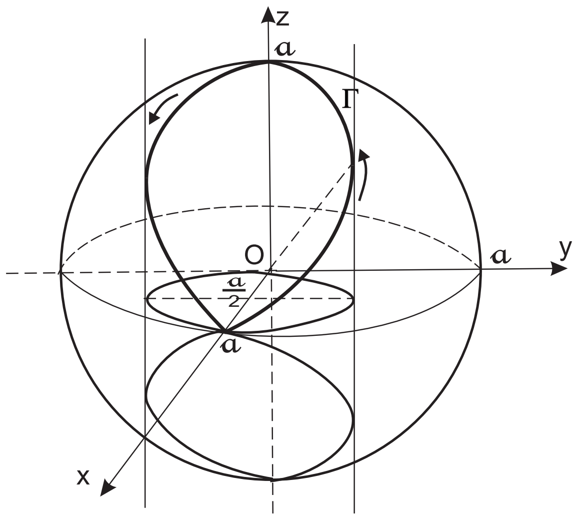


Figura 4.2.8

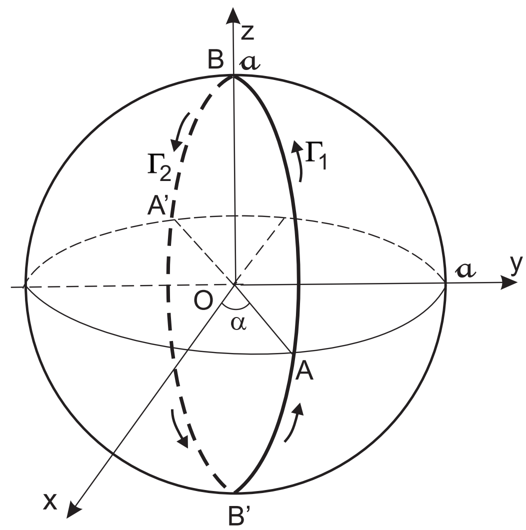


Figura 4.2.9

b) Avem:

$$I = \int_0^1 [(t^4 - t^6)\cdot 1 + 2t^2 \cdot t^3 \cdot 2t - t^2 \cdot 3t^2]\, dt = \int_0^1 (t^4 - t^6 + 4t^6 - 3t^4)\, dt =$$

$$= \frac{3}{7}t^7\Big|_0^1 - \frac{2}{5}t^5\Big|_0^1 = \frac{1}{35}.$$

c) Curba $\Gamma$ este cercul de intersecţie dintre sfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$ cu planul $y = x\cdot \operatorname{tg}\alpha$ (vezi Figura 4.2.9). Folosim şi aici coordonatele cilindrice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, care înlocuite în ecuaţiile curbei $\Gamma$ ne dau $r^2 + z^2 = a^2$, $r\sin\varphi = r\cos\varphi\cdot\operatorname{tg}\alpha$, de unde rezultă $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha$, $\varphi\in[0,2\pi)$, deci $\varphi = \alpha + k\pi$, $0<\alpha<\pi$.

Pentru $B'\overset{\frown}{A}B$ avem $\varphi = \alpha$ $(\Gamma_1)$, iar pentru $B\overset{\frown}{A'}B'$ avem $\varphi = \alpha+\pi$ $(\Gamma_2)$. Deci $(\Gamma) = (\Gamma_1)\cup(\Gamma_2)$, unde:

$$(\Gamma_1): \begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \\ z = \pm\sqrt{a^2-r^2}, \quad r\in[0,a] \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{ cu } + \text{ pt. } \overset{\frown}{AB},\ r\in[a,0] \\ \searrow \text{ cu } - \text{ pt. } \overset{\frown}{B'A},\ r\in[0,a]. \end{array} \end{cases}$$

şi $(\Gamma_2):\begin{cases} x = r\cos(\pi+\alpha) = -r\cos\alpha \\ y = r\sin(\pi+\alpha) = -r\sin\alpha \\ z = \pm\sqrt{a^2-r^2},\ \ r\in[0,a] \quad \begin{matrix} \nearrow & \text{cu} & + & \text{pt.} & \overset{\frown}{BA'}, & r\in[0,a] \\ \searrow & \text{cu} & - & \text{pt.} & \overset{\frown}{A'B'}, & r\in[a,0]. \end{matrix} \end{cases}$

Rezultă:

$$I = \int_a^0 \Big[(r\sin\alpha - \sqrt{a^2-r^2})\cos\alpha + (\sqrt{a^2-r^2} - r\cos\alpha)\sin\alpha + (r\cos\alpha - r\sin\alpha)\times$$
$$\times\frac{-r}{\sqrt{a^2-r^2}}\Big]\,dr + \int_0^a \Big[(r\sin\alpha + \sqrt{a^2-r^2})\cos\alpha + (-\sqrt{a^2-r^2} - r\cos\alpha)\sin\alpha +$$
$$+(r\cos\alpha - r\sin\alpha)\cdot\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\Big]\,dr + \int_0^a [(-r\sin\alpha - \sqrt{a^2-r^2})\cdot(-\cos\alpha) + (\sqrt{a^2-r^2}+$$
$$+r\cos\alpha)\cdot(-\sin\alpha) + (-r\cos\alpha + r\sin\alpha)\cdot\frac{-r}{\sqrt{a^2-r^2}}\Big]\,dr + \int_a^0 [(-r\sin\alpha + \sqrt{a^2-r^2})\times$$
$$\times(-\cos\alpha) + (-\sqrt{a^2-r^2} + r\cos\alpha)\cdot(-\sin\alpha) + (-r\cos\alpha + r\sin\alpha)\cdot\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\Big]\,dr =$$
$$= 2\int_0^a \sqrt{a^2-r^2}\cos\alpha\,dr - 2\int_0^a \sqrt{a^2-r^2}\sin\alpha\,dr + 2\int_0^a \frac{r^2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr +$$
$$+2\int_0^a \sqrt{a^2-r^2}\cos\alpha\,dr - 2\int_0^a \sqrt{a^2-r^2}\sin\alpha\,dr + 2\int_0^a \frac{r^2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr =$$
$$= 4(\cos\alpha - \sin\alpha)\cdot\underbrace{\int_0^a \sqrt{a^2-r^2}\,dr}_{I_1} + 4(\cos\alpha-\sin\alpha)\cdot\underbrace{\int_0^a \frac{r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr}_{I_2}.$$

Avem:

$$I_1 = \int_0^a \frac{a^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr + \int_0^a r\cdot\frac{-r}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr = a^2\arcsin\frac{r}{a}\Big|_0^a + r\cdot\sqrt{a^2-r^2}\Big|_0^a - \int_0^a \sqrt{a^2-r^2}\,dr,$$

de unde rezultă că $I_1 = \dfrac{\pi a^2}{4}$, iar:

$$I_2 = -\int_0^a r\cdot\frac{-r}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr = -r\cdot\sqrt{a^2-r^2}\Big|_0^a + \int_0^a \sqrt{a^2-r^2}\,dr = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Deci:

$$I = 4(\cos\alpha-\sin\alpha)\cdot\frac{\pi a^2}{4}\cdot 2 = 2\pi a^2(\cos\alpha - \sin\alpha) = 2\pi a^2\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - \sin\alpha\right] =$$
$$= 4\pi a^2\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{2}-2\alpha}{2}\cos\frac{\pi}{4} = 2\pi a^2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

**4.** Să se calculeze lucrul mecanic al câmpului $\vec{F}(\vec{r}) = P\vec{i} + Q\vec{j}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, unde:

$$P(x,y) = 3a(x^2+y^2) - y^3, \quad Q(x,y) = 3xy(2a-y),$$

care acţionează asupra masei unitate, când aceasta din urmă se deplasează de-a lungul unui semicerc de diametru $AB$ care nu conţine originea $O(0,0)$, $A(-a,a)$, $B(a,a)$ şi apoi pe conturul închis format din semicercul $AB$ şi segmentul $BA$, parcurse în sens direct trigonometric.

**Rezolvare.** Semicercul $\overset{\frown}{BA}$ şi segmentul $\overline{AB}$ (vezi Figura 4.2.10) au parametrizările următoare:

$$\overset{\frown}{BA}\colon \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a + a\sin t, \ \ t \in [0,\pi], \end{cases} \qquad \overline{AB}: \begin{cases} x = t \\ y = a, \ \ t \in [-a,a], \end{cases}$$

(cercul de diametru $AB$ are ecuaţia $x^2 + (y-a)^2 - a^2 = 0$).

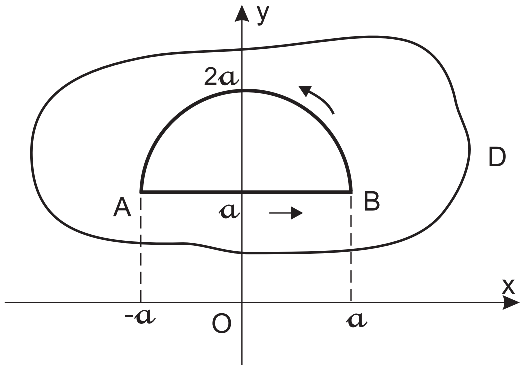


Figura 4.2.10

Atunci:

$$I_1 = \int_{\overset{\frown}{BA}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_0^{\pi} \{\{3a[a^2\cos^2 t + a^2(1+\sin t)^2] - a^3(1+\sin t)^3\}\times$$
$$\times(-a\sin t) + 3a^2\cos t(1+\sin t)\cdot(2a - a - a\sin t)\cdot a\cos t\}\,dt = \int_0^{\pi}\{[3a^3(\cos^2 t + \sin^2 t +$$
$$+1+2\sin t) - a^3(1+3\sin t + 3\sin^2 t + \sin^3 t)]\cdot(-a\sin t) + 3a^4\cos^2 t(1+\sin t)(1-\sin t)\}\,dt =$$
$$= a^4\int_0^{\pi}[(6+6\sin t - 1 - 3\sin t - 3\sin^2 t - \sin^3 t)\cdot(-\sin t) + 3(1 - 2\sin^2 t + \sin^4 t)]\,dt =$$
$$= a^4\int_0^{\pi}(-5\sin t - 3\sin^2 t + 3\sin^3 t + \sin^4 t + 3 - 6\sin^2 t + 3\sin^4 t)\,dt =$$
$$= a^4\int_0^{\pi}(3 - 5\sin t - 9\sin^2 t + 3\sin^3 t + 4\sin^4 t)\,dt = a^4\cdot 3\pi + 5a^4\cos t\Big|_0^{\pi} -$$
$$-\frac{9}{2}a^4\int_0^{\pi}(1-\cos 2t)\,dt - 3a^4\int_0^{\pi}(1-\cos^2 t)\cdot(\cos t)'\,dt + a^4\int_0^{\pi}(1-\cos 2t)^2\,dt =$$
$$= 3\pi a^4 - 10a^4 - \frac{9}{2}a^4\pi - 3a^4\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Big|_0^{\pi} + a^4\pi - a^4\sin 2t\Big|_0^{\pi} + \frac{a^4}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 4t)\,dt =$$
$$= 3\pi a^4 - 10a^4 - \frac{9}{2}a^4\pi + 4a^4 + a^4\pi + \frac{a^4\pi}{2} = -6a^4.$$

Pe segmentul $\overline{AB}$ avem:

$$I_2 = \int_{-a}^{a}\{[3a(t^2+a^2) - a^3]\cdot 1 + 3ta(2a-a)\cdot 0\}\,dt = 3a\frac{t^3}{3}\Big|_{-a}^{a} + 2a^3 t\Big|_{-a}^{a} = 6a^4.$$

Deci $I_{\overset{\frown}{BAB}} = I_1 + I_2 = -6a^4 + 6a^4 = 0$.

O altă modalitate de calcul a celor două integrale $I_1$ şi $I_{\overset{\frown}{BAB}}$ este următoarea: alegem un domeniu simplu conex $D$ care conţine şi semicercul $\overset{\frown}{AB}$ şi segmentul $\overline{AB}$ (vezi Figura 4.2.10). Funcţiile $P$ şi $Q$ sunt continue cu derivatele parţiale $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 6ay - 3y^2$ şi $\dfrac{\partial Q}{\partial x} =$

$= 3y(2a - y)$ continue pe $D$ şi în plus $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Conform Teoremei 4.2.4 rezultă că $\int P\,dx + Q\,dy$ este independentă de drum, deci:

$$\int_{\overset{\frown}{BA}} P\,dx + Q\,dy = \int_{\overline{BA}} P\,dx + Q\,dy = -I_2 = -6a^4,$$

iar $\displaystyle\int_{B\overset{\frown}{A}B} P\,dx + Q\,dy = 0$, $\;B\overset{\frown}{A}B$ fiind un contur închis.

**5.** Să se calculeze lucrul mecanic al forţei gravitaţionale $\vec{F}(\vec{r}) = \dfrac{k\vec{r}}{r^3}$, unde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, iar $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, care acţionează asupra masei unitate când aceasta din urmă se deplasează din punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ în punctul $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

**Rezolvare.** Ecuaţiile canonice ale segmentului $\overline{M_1M_2}$ sunt:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (= t),$$

de unde obţinem ecuaţiile parametrice:

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Astfel rezultă:

$$I = \int_{\overline{M_1M_2}} \frac{k(x\,dx + y\,dy + z\,dz)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = k\int_0^1 \Big\{[x_1 + t(x_2 - x_1)]\cdot(x_2 - x_1) + [y_1 + t(y_2 -$$
$$- y_1)]\cdot(y_2 - y_1) + [z_1 + t(z_2 - z_1)]\cdot(z_2 - z_1)\Big\}\Big/\Big\{\{[x_1^2 + t^2(x_2 - x_1)^2 + 2tx_1(x_2 - x_1) + y_1^2 +$$
$$+ t^2(y_2 - y_1)^2 + 2ty_1(y_2 - y_1) + z_1^2 + t^2(z_2 - z_1)^2 + 2tz_1(z_2 - z_1)]\}^{3/2}\Big\}\,dt =$$
$$= \frac{k}{2}\int_0^1 \Big\{2t[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2] + 2x_1(x_2 - x_1) + 2y_1(y_2 - y_1) + 2z_1(z_2 - z_1)\Big\}\Big/$$
$$\Big/\Big\{\{t^2[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2] + 2t[x_1(x_2 - x_1) + y_1(y_2 - y_1) + z_1(z_2 - z_1)] +$$
$$+ (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)\}^{3/2}\Big\}\,dt = \frac{k}{2}\cdot\frac{1}{-1/2}\Big\{t^2[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2] +$$
$$+ 2t[x_1(x_2 - x_1) + y_1(y_2 - y_1) + z_1(z_2 - z_1)] + (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)\Big\}^{-1/2}\Big|_0^1 =$$
$$= -k\Big[(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{-1/2} - (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{-1/2}\Big] = k\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}\right) =$$
$$= k\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right), \quad \text{unde } r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}, \quad i = 1, 2.$$

**6.** Integrala $\displaystyle\int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{y\,dx - x\,dy}{(x + y)^2}$ este independentă de drum ? Să se calculeze valoarea ei când $A(1, 0)$, $B(2, 3)$.

**Rezolvare.** Considerăm funcţiile $P(x, y) = \dfrac{y}{(x + y)^2}$, $Q(x, y) = \dfrac{-x}{(x + y)^2}$ definite pe un domeniu $D$ simplu conex care conţine punctele $A$ şi $B$ şi nu taie bisectoarea a doua (vezi Figura 4.2.11).

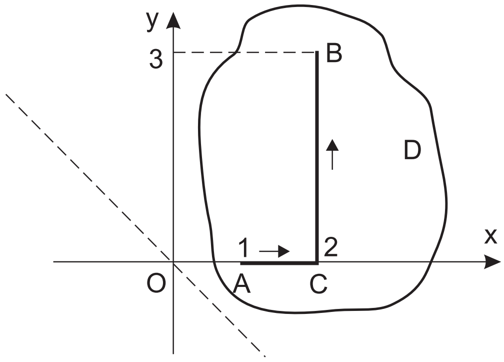


Figura 4.2.11

Funcţiile $P$ şi $Q$ sunt continue cu derivate parţiale continue şi:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x-y}{(x+y)^3}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x-y}{(x+y)^3}.$$

Deci $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Deducem că $\displaystyle\int P\,dx + Q\,dy$ este independentă de drum. Ne alegem drumuri paralele cu axele de coordonate incluse în domeniul $D$, şi anume $\overline{AC}$ şi $\overline{CB}$. Segmentele $\overline{AC}$ şi $\overline{CB}$ au parametrizările:

$$\overline{AC}: \begin{cases} x = t \\ y = 0, \ \ t \in [1,2]; \end{cases} \qquad \overline{CB}: \begin{cases} x = 2 \\ y = t, \ \ t \in [0,3]. \end{cases}$$

Avem:

$$I = \int_1^2 \frac{0\cdot 1 - t\cdot 0}{t^2}\,dt + \int_0^3 \frac{t\cdot 0 - 2\cdot 1}{(t+2)^2}\,dt = \frac{2}{t+2}\bigg|_0^3 = -\frac{3}{5}.$$

O altă metodă de calcul a integralei de mai sus este determinarea primitivei $F$, care verifică relaţia $dF = P\,dx + Q\,dy$, adică:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P = \frac{y}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q = \frac{-x}{(x+y)^2}.$$

Integrând în raport cu $x$ prima relaţie de mai sus obţinem $F(x,y) = -\dfrac{y}{x+y} + \varphi(y)$.

Prin derivare în raport cu $y$, rezultă $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{-x}{(x+y)^2} + \varphi'(y)$. Egalând această expresie cu $Q$ deducem că $\varphi'(y) = 0$, deci $\varphi(y) = C$. Rezultă că $F(x,y) = -\dfrac{y}{x+y}$ (luăm $C = 0$). Atunci:

$$\int_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy = F(2,3) - F(1,0) = -\frac{3}{5}.$$

Funcţia $F$ o putem determina şi aplicând formula:

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)\,dt, \quad (x_0,y_0) \in D \ \text{ punct fixat.}$$

Pentru $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ rezultă:

$$F(x,y) = \int_1^x \frac{y}{(t+y)^2}\,dt + \int_0^y \frac{-1}{(1+t)^2}\,dt = -\frac{y}{t+y}\bigg|_1^x + \frac{1}{1+t}\bigg|_0^y = -\frac{y}{x+y}.$$

Iar $\displaystyle\int_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy = F(2,3) - F(1,0) = -\frac{3}{5}.$

**7.** Constatând în prealabil că expresia de sub semnul integrală este o diferenţială totală, să se calculeze următoarele integrale curbilinii:

a) $\displaystyle\int_{(-1,2)}^{(2,3)} x\,dy + y\,dx$; b) $\displaystyle\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$ de-a lungul unui drum care nu intersectează axa $Oy$; c) $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ de-a lungul unui drum care nu trece prin $O$;

d) $\displaystyle\int_{(a,b)}^{(\alpha a,\alpha b)} \sqrt{\sqrt{x^2+y^2} - x}\,dx + \sqrt{\sqrt{x^2+y^2} + x}\,dy$; $a,\,b,\alpha > 0$.

**Rezolvare.** a) Avem $P(x,y) = y$, $Q(x,y) = x$ definite pe $I\!R^2$ (domeniu simplu conex) şi $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1$. Rezultă că $\displaystyle\int P\,dx + Q\,dy$ este independentă de drum pe $I\!R^2$. Alegem drumuri paralele cu axele de coordonate $\overline{AC}$ şi $\overline{CB}$ (vezi Figura 4.2.12):

$$\overline{AC}: \begin{cases} x = t \\ y = 2, \;\; t \in [-1,2], \end{cases} \qquad \overline{CB}: \begin{cases} x = 2 \\ y = t, \;\; t \in [2,3]. \end{cases}$$

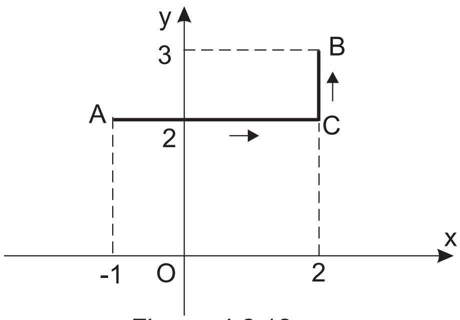

Figura 4.2.12

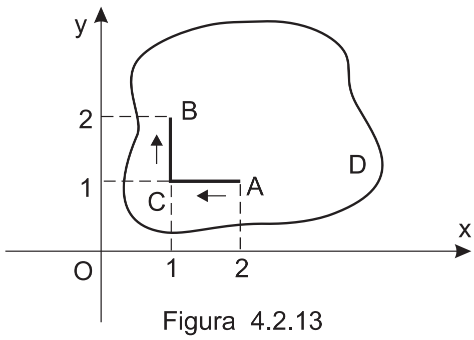

Figura 4.2.13

Rezultă:

$$\int_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int_{-1}^{2} (t\cdot 0 + 2\cdot 1)\,dt + \int_{2}^{3} (2\cdot 1 + t\cdot 0)\,dt = 2t\Big|_{-1}^{2} + 2t\Big|_{2}^{3} = 8.$$

Primitiva $F$ în acest caz, cu $dF = P\,dx + Q\,dy$, adică $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = Q$, este $F(x,y) = xy + C$. Deci:

$$\int_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy = F(2,3) - F(-1,2) = 8.$$

b) Considerăm funcţiile $P(x,y) = \dfrac{y}{x^2}$, $Q(x,y) = -\dfrac{x}{x^2} = -\dfrac{1}{x}$ definite pe un domeniu $D$ simplu conex care nu intersectează axa $Oy$ (vezi Figura 4.2.13). Avem $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, iar funcţiile $P$ şi $Q$ sunt continue cu derivate parţiale continue. Conform Teoremei 4.2.4 rezultă că integrala $\displaystyle\int P\,dx + Q\,dy$ este independentă de drum pe $D$. Alegem drumuri paralele cu axele de coordonate $\overline{AC}$ şi $\overline{CB}$:

$$\overline{AC}: \begin{cases} x = t \\ y = 1, \;\; t \in [2,1], \end{cases} \qquad \overline{CB}: \begin{cases} x = 1 \\ y = t, \;\; t \in [1,2]. \end{cases}$$

Deci:

$$\int_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int_{2}^{1} \frac{dt}{t^2} - \int_{1}^{2} \frac{dt}{1} = -\frac{1}{t}\Big|_{2}^{1} - t\Big|_{1}^{2} = -\frac{3}{2}.$$

Primitiva $F$ ($dF = P\,dx + Q\,dy$, adică $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = Q$) este aici $F(x,y) = -\dfrac{y}{x} + C$. Deci:

$$\int_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy = F(1,2) - F(2,1) = -\frac{3}{2}.$$

c) Considerăm funcţiile $P(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $Q(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, definite pe un domeniu $D$ simplu conex care nu conţine $O$ şi care conţine punctele $A(1,0)$, $B(6,8)$ (vezi Figura 4.2.14). Apoi $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, adică integrala $\displaystyle\int P\,dx + Q\,dy$ este independentă de drum. Alegem drumuri paralele cu axele de coordonate $\overline{AC}$ şi $\overline{CB}$:

$$\overline{AC}: \begin{cases} x = t \\ y = 0, \ \ t \in [1,6], \end{cases} \qquad \overline{CB}: \begin{cases} x = 6 \\ y = t, \ \ t \in [0,8]. \end{cases}$$

Rezultă:

$$I = \int_1^6 \frac{t}{t}\,dt + \int_0^8 \frac{t}{\sqrt{t^2+36}}\,dt = t\Big|_1^6 + \sqrt{t^2+36}\Big|_0^8 = 9.$$

În acest caz primitiva $F$ este $F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + C$, deci:

$$\int_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy = F(6,8) - F(1,0) = 9.$$

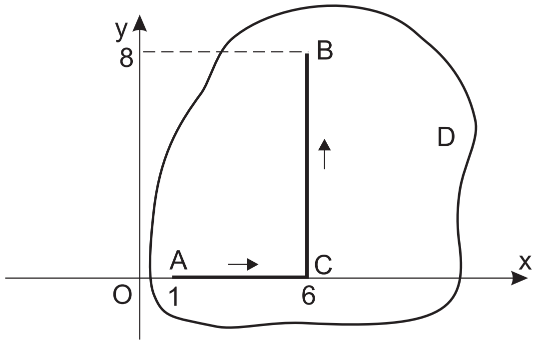


Figura 4.2.14

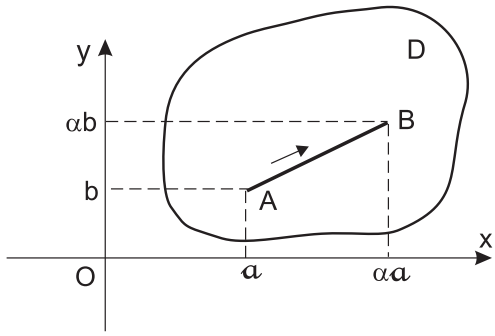


Figura 4.2.15

d) Avem $P(x,y) = \sqrt{\sqrt{x^2+y^2} - x}$, $Q(x,y) = \sqrt{\sqrt{x^2+y^2} + x}$, definite pe un domeniu simplu conex $D \subset I\!R^2$ (vezi Figura 4.2.15). Derivatele parţiale $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ sunt:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{2\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{2\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}},$$

deoarece $\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x} = \dfrac{y}{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}}$.

Deci $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, adică integrala $\displaystyle\int P\,dx + Q\,dy$ este independentă de drum. Pentru a calcula integrala din enunţ alegem drumul $\Gamma$ dreapta $AB$ ($A(a,b)$, $B(\alpha a, \alpha b)$), de ecuaţii

parametrice $(\Gamma):\ \begin{cases} x = at \\ y = bt, \quad t \in [1, \alpha]. \end{cases}$ Rezultă atunci:

$$I = \int_1^\alpha \left( \sqrt{\sqrt{a^2t^2 + b^2t^2} - at} \cdot a + \sqrt{\sqrt{a^2t^2 + b^2t^2} + at} \cdot b \right) dt =$$

$$= \left( a\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a} + b\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a} \right) \int_1^\alpha t^{1/2}\, dt = \frac{2}{3}\left(\alpha^{3/2} - 1\right) \left[ a\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a} + \right.$$

$$\left. + b\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a} \right].$$

**8.** i) Să se arate că forma:

$$\omega = \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2} \left[ (x \sin x - y \cos x)\, dx + (x \cos x + y \sin x)\, dy \right]$$

este diferenţială totală.

ii) Notând cu $I(R)$ integrala lui $\omega$ pe semicercul $x^2 + y^2 = R^2$, $y \geq 0$ parcurs în sens direct trigonometric, să se determine $\lim\limits_{R \to 0} I(R)$ şi $\lim\limits_{R \to \infty} I(R)$.

iii) Se notează cu $\Gamma$ drumul orientat în sens direct trigonometric format de două semicercuri analoage precedentului de raze $R_1$ şi $R_2$ $(0 < R_1 < R_2)$ şi de segmentele $[-R_2, -R_1]$ şi $[R_1, R_2]$ ale axei $Ox$. Să se calculeze integrala lui $\omega$ pe $\Gamma$ şi limita sa când $R_1 \to 0$ şi $R_2 \to \infty$. Să se deducă $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$.

**Rezolvare.** i) Funcţiile:

$$P(x, y) = \frac{e^{-y}(x \sin x - y \cos x)}{x^2 + y^2} \quad \text{şi} \quad Q(x, y) = \frac{e^{-y}(x \cos x + y \sin x)}{x^2 + y^2}$$

sunt definite pe un domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$ simplu conex care nu conţine originea, (vezi Figura 4.2.17). Avem:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{e^{-y}(-x \sin x + y \cos x - \cos x)(x^2 + y^2) - 2ye^{-y}(x \sin x - y \cos x)}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{e^{-y}(-x^3 \sin x - xy^2 \sin x + x^2 y \cos x + y^3 \cos x - x^2 \cos x + y^2 \cos x - 2xy \sin x)}{(x^2 + y^2)^2},$$

iar $$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{e^{-y}(\cos x - x \sin x + y \cos x)(x^2 + y^2) - 2xe^{-y}(x \cos x + y \sin x)}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{e^{-y}(-x^2 \cos x - x^3 \sin x + y^2 \cos x + x^2 y \cos x + y^3 \cos x - xy^2 \sin x - 2xy \sin x)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Deci $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

ii) Pentru a calcula $I(R)$ considerăm semicercul $(\Gamma_0):\ x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $t \in [0, \pi]$ (vezi Figura 4.2.16). Rezultă:

$$I(R) = \int_{\Gamma_0} \omega = \int_0^\pi \left\{ \frac{e^{-R\,sin\,t}}{R^2} \{ [R \cos t \sin (R \cos t) - R \sin t \cos (R \cos t)] \cdot (-R \sin t) + \right.$$

$$\left. + [R \cos t \cos (R \cos t) + R \sin t \sin (R \cos t)] \cdot (R \cos t) \} \right\} dt = \int_0^\pi e^{-R\,sin\,t} \{ [\cos t \sin (R \cos t) -$$

$$- \sin t \cos (R \cos t)] \cdot (-\sin t) + [\cos t \cos (R \cos t) + \sin t \sin (R \cos t)] \cdot \cos t \}\, dt =$$

$= \int_0^{\pi} e^{-R\,sin\,t}[-\sin t \sin(R\cos t - t) + \cos t \cos(R\cos t - t)]\,dt = \int_0^{\pi} e^{-R\,sin\,t} \cos(R\cos t)\,dt.$

Avem:

$|I(R)| \le \int_0^{\pi} e^{-R\,sin\,t}\,dt = \int_0^{\pi/2} e^{-R\,sin\,t}\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-R\,sin\,t}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}\,dt.$

Deoarece $0 < \dfrac{x}{\sin x} \le \dfrac{\pi}{2},\ \forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, rezultă că $\sin x \ge \dfrac{2x}{\pi},\ \forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sau $-\sin t \le -\dfrac{2t}{\pi},\ \forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Deci:

$|I(R)| \le 2\int_0^{\pi/2} e^{-2Rt/\pi}\,dt = -\dfrac{\pi}{R} e^{-2Rt/\pi}\Big|_0^{\pi/2} = \dfrac{\pi}{R}\left(1 - e^{-R}\right) \to 0,$ pentru $R \to \infty$.

Rezultă $\lim\limits_{R\to\infty} I(R) = 0$.

Apoi, privind $I(R)$ ca o integrală depinzând de parametrul $R$, avem:

$$\lim_{R\to 0} e^{-R\,sin\,t} \cos(R\cos t) = 1,\ \forall t \in [0, \pi],$$

convergenţă care este uniformă, deoarece:

$$\left|e^{-R\,sin\,t}\cos(R\cos t) - 1\right| \le \left|e^{-R\,sin\,t}\cos(R\cos t) - \cos(R\cos t)\right| + |\cos(R\cos t) - 1| \le$$

$$\le \left|e^{-R\,sin\,t} - 1\right| + |\cos(R\cos t) - 1| \le R\sin t + 2\sin^2\frac{R\cos t}{2} \le R + 2\left(\frac{R\cos t}{2}\right)^2 \le$$

$$\le R + \frac{R^2}{2},\ \forall t \in [0, \pi],$$

(am folosit inegalitatea $-e^{-u} + 1 \le u,\ \forall u \ge 0$), iar $\lim\limits_{R\to 0}\left(R + \dfrac{R^2}{2}\right) = 0$.

Rezultă astfel că putem trece la limită sub semnul integrală în $I(R)$ şi obţinem:

$$\lim_{R\to 0} I(R) = \int_0^{\pi} 1\,dt = \pi.$$

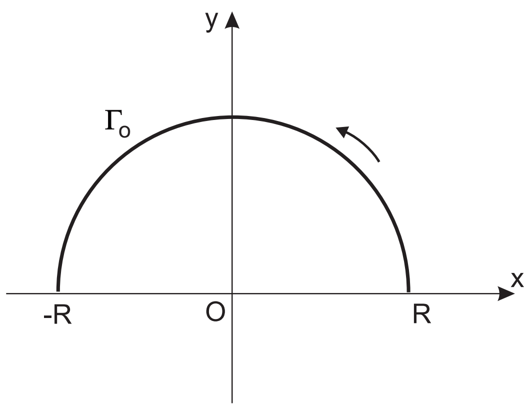


Figura 4.2.16

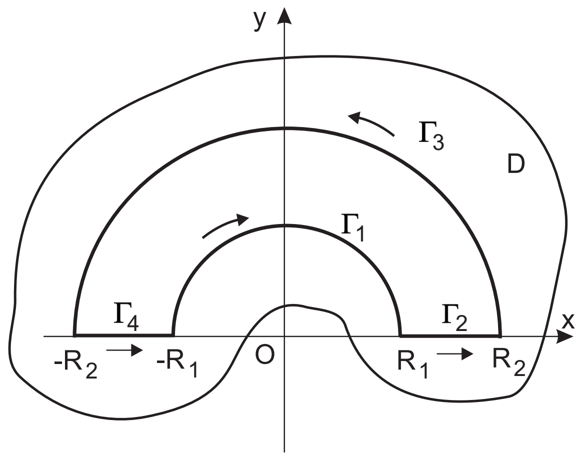


Figura 4.2.17

iii) Conturul $\Gamma$ este format din: $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ (vezi Figura 4.2.17). Avem:

$\int_{\Gamma_1} \omega = -\int_0^{\pi} e^{-R_1\,sin\,t} \cos(R_1 \cos t)\,dt, \quad \int_{\Gamma_3} \omega = \int_0^{\pi} e^{-R_2\,sin\,t} \cos(R_2\cos t)\,dt,$

$\int_{\Gamma_2} \omega = \int_{R_1}^{R_2} \dfrac{1}{t^2}(t\sin t)\,dt = \int_{R_1}^{R_2} \dfrac{\sin t}{t}\,dt, \quad ((\Gamma_2):\ x = t,\ y = 0,\ t \in [R_1, R_2]),$

iar $\displaystyle\int_{\Gamma_4}\omega=\int_{-R_2}^{-R_1}\frac{1}{t^2}(t\sin t)\,dt=\int_{-R_2}^{-R_1}\frac{\sin t}{t}\,dt\overset{-t=u}{=}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\sin u}{u}\,du,$
$((\Gamma_4):\ \ x=t,\ \ y=0,\ \ t\in[-R_2,-R_1])$.

Dar $\displaystyle\int_{\Gamma}\omega=0$, deoarece $\Gamma$ este o curbă închisă inclusă într-un domeniu $D$ simplu conex, iar $\displaystyle\int\omega$ este independentă de drum pe $D$ (conform punctului i)). Rezultă că:

$$\int_{\Gamma_1}\omega+\int_{\Gamma_2}\omega+\int_{\Gamma_3}\omega+\int_{\Gamma_4}\omega=0\quad\Leftrightarrow$$

$$-\int_0^{\pi}e^{-R_1\sin t}\cos(R_1\cos t)\,dt+\int_0^{\pi}e^{-R_2\sin t}\cos(R_2\cos t)\,dt+2\int_{R_1}^{R_2}\frac{\sin t}{t}\,dt=0.$$

Trecând la limită pentru $R_1\to 0$ şi $R_2\to\infty$, conform punctului ii) avem:

$$\lim_{R_1\to 0}\int_{\Gamma_1}\omega=\pi,\ \text{ iar }\ \lim_{R_2\to\infty}\int_{\Gamma_2}\omega=0.$$

Deci $\displaystyle -\pi+2\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=0\ \Rightarrow\ \int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}.$

**9.** Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de diferenţiale totale:

a) $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)}x\,dx+y^2\,dy-z^3\,dz$; b) $\displaystyle\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

unde punctul $(x_1,y_1,z_1)$ este situat pe sfera de ecuaţie $x^2+y^2+z^2=a^2$, iar punctul $(x_2,y_2,z_2)$ este situat pe sfera de ecuaţie $x^2+y^2+z^2=b^2$, $(a,b>0)$.

**Rezolvare.** a) Funcţiile $P(x,y,z)=x$, $Q(x,y,z)=y^2$, $R(x,y,z)=-z^3$ sunt definite pe $I\!R^3$ (domeniu simplu conex), sunt continue cu derivate parţiale continue şi:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}=0.$$

Deci integrala $\displaystyle\int P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ este independentă de drum pe $I\!R^3$. Pentru a o calcula alegem drumuri paralele cu axele de coordonate:

$$A(1,1,1)\to B(2,1,1)\to C(2,3,1)\to D(2,3,-4),\quad \text{unde:}$$

$$\overline{AB}:\begin{cases}x=t\\ y=1\\ z=1,\ \ t\in[1,2],\end{cases}\qquad \overline{BC}:\begin{cases}x=2\\ y=t\\ z=1,\ \ t\in[1,3],\end{cases}\qquad \overline{CD}:\begin{cases}x=2\\ y=3\\ z=t,\ \ t\in[1,-4].\end{cases}$$

Deci:

$$\int_{\widehat{AB}}P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int_1^2 t\,dt+\int_1^3 t^2\,dt-\int_1^{-4}t^3\,dt=\left.\frac{t^2}{2}\right|_1^2+\left.\frac{t^3}{3}\right|_1^3-\left.\frac{t^4}{4}\right|_1^{-4}=-\frac{643}{12}.$$

O altă metodă de calcul este determinarea funcţiei $F$, primitiva, cu proprietatea:

$$dF(x,y,z)=P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz,$$

adică $\dfrac{\partial F}{\partial x}=x$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}=y^2$, $\dfrac{\partial F}{\partial z}=-z^3$. Integrând în raport cu $x$ prima relaţie de mai sus rezultă că $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{2}+\varphi(y,z)$. Derivând această ultimă relaţie în raport cu $y$ şi $z$ şi comparând cu $Q$ şi respectiv $R$, rezultă $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=y^2$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=-z^3$. Din prima relaţie de mai

sus rezultă $\varphi(y,z) = \dfrac{y^3}{3} + \psi(z)$, deci folosind a doua relaţie deducem că $\psi'(z) = -z^3$ sau $\psi(z) = -\dfrac{z^4}{4} + C$. Obţinem astfel $\varphi(y,z) = \dfrac{y^3}{3} - \dfrac{z^4}{4} + C$, iar:

$$F(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{z^4}{4} + C.$$

Deci:

$$\int_{\overset{\frown}{AD}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = F(2,3,-4) - F(1,1,1) = -\frac{643}{12}.$$

Funcţia $F$ o putem determina şi cu ajutorul formulei:

$$F(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(t,y,z)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t,z)\,dt + \int_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,t)\,dt,$$

unde $(x_0,y_0,z_0)$ este un punct fixat din $I\!R^3$. Alegând $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ rezultă:

$$F(x,y,z) = \int_0^x t\,dt + \int_0^y t^2\,dt + \int_0^z (-t^3)\,dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x + \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^y - \left.\frac{t^4}{4}\right|_0^z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{z^4}{4},$$

iar $\displaystyle\int_{\overset{\frown}{AD}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = F(2,3,-4) - F(1,1,1) = -\frac{643}{12}$.

b) Avem $P(x,y,z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $Q(x,y,z) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $R(x,y,z) = = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Alegem un domeniu $D$ simplu conex din $I\!R^3$ care conţine punctele $A$ şi $B$ , dar nu conţine originea.

Apoi:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{-yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\partial R}{\partial y},$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{-xz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Deci $\displaystyle\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ este independentă de drum pe $D$.

Dacă $O \notin \overline{AB}$ (vezi Figura 4.2.18) şi $D$ este ales astfel încât $\overline{AB} \subset D$ atunci ne alegem drumul $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} : \begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in [0,1] \end{cases}$$

Rezultă:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_0^1 \Big\{[x_1 + t(x_2 - x_1)](x_2 - x_1) + [y_1 + t(y_2 - y_1)](y_2 - y_1) +$$

$$+[z_1 + t(z_2 - z_1)](z_2 - z_1)\Big\}\Big/\Big\{\sqrt{[x_1 + t(x_2-x_1)]^2 + [y_1 + t(y_2-y_1)]^2 + [z_1 + t(z_2-z_1)]^2}\Big\} =$$

$$= \left.\sqrt{[x_1 + t(x_2 - x_1)]^2 + [y_1 + t(y_2 - y_1)]^2 + [z_1 + t(z_2 - z_1)]^2}\right|_0^1 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} -$$

$$-\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = b - a.$$

Dacă $O \in \overline{AB}$ alegem $D$ astfel încât să conţină punctele $A$ şi $B$, să nu conţină pe $O$ şi să conţină drumurile $\overline{AC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DB}$ (paralele cu axele de coordonate), unde:

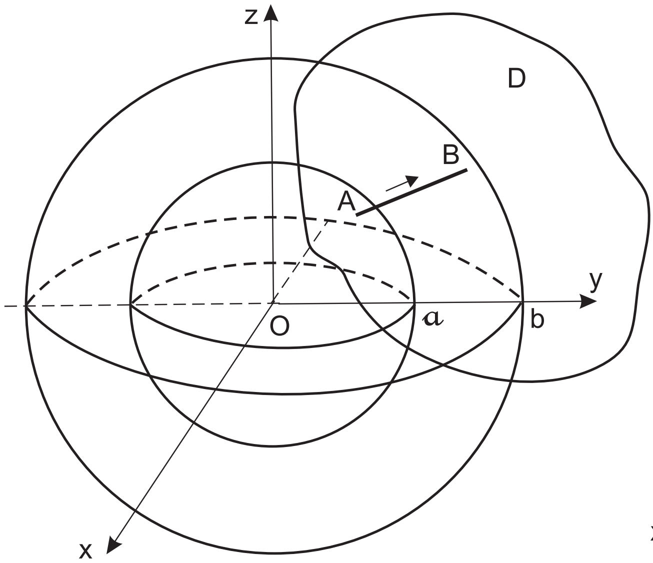


Figura 4.2.18

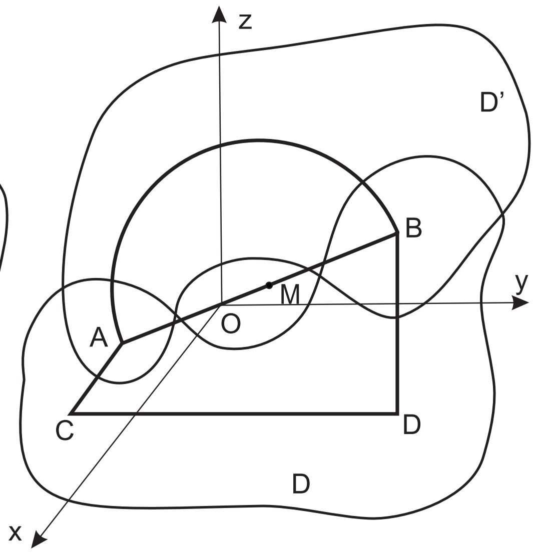


Figura 4.2.19

$$A(x_1, y_1, z_1) \to C(x_2, y_1, z_1) \to D(x_2, y_2, z_1) \to B(x_2, y_2, z_2),$$

dacă fiecare nu conţine originea (vezi Figura 4.2.19). Sau putem considera un semicerc situat pe sfera centrată în punctul $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ şi de rază $\frac{AB}{2}$ sau pentru a evita calcule prea lungi putem folosi funcţia $F$ (primitiva), $dF(x,y,z) = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, adică:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Din relaţiile de mai sus rezultă $F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + C$. Deci:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = F(x_2,y_2,z_2) - F(x_1,y_1,z_1) = \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2} - \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} = b - a.$$

**10.** Să se determine funcţiile $z$ ale căror diferenţiale totale sunt:

a) $dz = (x^2+2xy-y^2)\,dx + (x^2-2xy-y^2)\,dy$;

b) $dz = e^x\left[e^y(x-y+2)+y\right]dx + e^x\left[e^y(x-y)+1\right]dy$.

**Rezolvare.** a) Funcţiile $P(x,y) = x^2+2xy-y^2$, $Q(x,y) = x^2-2xy-y^2$ definite pe $\mathbb{R}^2$ sunt continue cu derivate parţiale continue şi $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Deci $\exists$ z astfel încât $dz = P\,dx + Q\,dy$. Funcţia $z$ se poate determina folosind derivatele sale parţiale:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P = x^2+2xy-y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = Q = x^2-2xy-y^2.$$

Rezultă că $z(x,y) = \frac{x^3}{3} + x^2y - y^2x + \varphi(y)$, de unde $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 2xy + \varphi'(y) = Q$. Deci $\varphi'(y) = -y^2 \Rightarrow \varphi(y) = -\frac{y^3}{3} + C$. Rezultă:

$$z(x,y) = \frac{x^3}{3} + x^2y - y^2x - \frac{y^3}{3} + C.$$

Sau se poate folosi formula:

$$z(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)\,dt, \quad (x_0,y_0) \in I\!R^2.$$

Luând $x_0 = y_0 = 0$ obţinem:

$$z(x,y) = \int_0^x (t^2 + 2ty - y^2)\,dt + \int_0^y (-t^2)\,dt = \left(\frac{t^3}{3} + t^2y - y^2t\right)\Big|_0^x - \frac{t^3}{3}\Big|_0^y =$$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 - \frac{y^3}{3}.$$

b) Funcţiile $P(x,y) = e^x\,[e^y(x-y+2)+y]$, $Q(x,y) = e^x\,[e^y(x-y)+1]$ definite pe $I\!R^2$ sunt continue cu derivate parţiale continue pe $I\!R^2$. În plus:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x\,[e^y(x-y+1)+1] = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Rezultă că $\exists\, z$ astfel încât $dz(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$. Avem:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P = e^x\,[e^y(x-y+2)+y], \quad \frac{\partial z}{\partial y} = Q = e^x\,[e^y(x-y)+1],$$

de unde rezultă:

$$z(x,y) = \int e^y \cdot xe^x\,dx + \int e^x(e^y(2-y)+y)\,dx = e^{x+y}x - e^{x+y} + e^x[e^y(2-y)+y] +$$

$$+\varphi(y) = e^{x+y}(x-y+1) + e^xy + \varphi(y).$$

Apoi $\dfrac{\partial z}{\partial y} = e^{x+y}(x-y) + e^x + \varphi'(y) = Q$, de unde rezultă că $\varphi'(y) = 0$, deci $\varphi(y) = C$, iar:

$$z(x,y) = e^{x+y}(x-y+1) + ye^x + C.$$

Funcţia $z$ se poate determina folosind şi formula:

$$z(x,y) = \int_0^x e^t[e^y(t-y+2)+y]\,dt + \int_0^y [e^t(-t)+1]\,dt = e^{t+y}\cdot t\Big|_0^x - e^{t+y}\Big|_0^x -$$

$$-e^{t+y}(y-2)\Big|_0^x + ye^t\Big|_0^x - te^t\Big|_0^y + e^t\Big|_0^y + t\Big|_0^y = e^{x+y}(x-y+1) + ye^x - 1, \quad (x_0 = y_0 = 0).$$

Deci $\quad z(x,y) = e^{x+y}(x-y+1) + ye^x + C.$

**11.** Să se determine funcţiile ale căror diferenţiale totale sunt:

a) $du = (x^2 - 2yz)\,dx + (y^2 - 2xz)\,dy + (z^2 - 2xy)\,dz$;

b) $du = \dfrac{(x+y-z)\,dx + (x+y-z)\,dy + (x+y+z)\,dz}{x^2+y^2+z^2+2xy}$.

**Rezolvare.** a) Funcţiile $P(x,y,z) = x^2 - 2yz$, $Q(x,y,z) = y^2 - 2xz$, $R(x,y,z) = = z^2 - 2xy$ sunt definite pe $I\!R^3$, continue şi cu derivate parţiale continue. În plus:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2z = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = -2x = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = -2y = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Deci $\exists\, u$ astfel încât $du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$. Avem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P = x^2 - 2yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q = y^2 - 2xz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R = z^2 - 2xy,$$

de unde rezultă $u(x,y) = \dfrac{x^3}{3} - 2xyz + \varphi(y,z)$. Derivatele funcţiei $u$ în raport cu $y$ şi $z$ sunt:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2xz + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = y^2 - 2xz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -2xy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = z^2 - 2xy,$$

de unde deducem că $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = y^2$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = z^2$. Rezultă $\varphi(y,z) = \dfrac{y^3+z^3}{3} + C$, iar:

$$u(x,y,z) = \frac{x^3+y^3+z^3}{3} - 2xyz + C.$$

Funcţia $u$ se mai poate determina folosind formula:

$$u(x,y,z) = \int_0^x P(t,y,z)\,dt + \int_0^y Q(0,t,z)\,dt + \int_0^z R(0,0,t)\,dt = \int_0^x (t^2 - 2yz)\,dt+$$

$$+\int_0^y t^2\,dt + \int_0^z t^2\,dt = \frac{x^3+y^3+z^3}{3} - 2xyz,$$

$(x_0 = y_0 = z_0 = 0)$.

Deci $u(x,y,z) = \dfrac{x^3+y^3+z^3}{3} - 2xyz + C$.

b) Funcţiile $P(x,y,z) = \dfrac{x+y-z}{x^2+y^2+z^2+2xy}$, $Q(x,y,z) = \dfrac{x+y-z}{x^2+y^2+z^2+2xy}$, $R(x,y,z) = \dfrac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2+2xy}$ sunt definite pe $I\!R^3 \setminus (d)$, unde $(d):\ x+y=0,\ z=0$ este o dreaptă din planul $(xOy)$, (este a doua bisectoare). Alegem un domeniu $D$ simplu conex care nu intersectează dreapta $(d)$ şi avem:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2-y^2+z^2+2yz-2xy+2xz}{(x^2+y^2+z^2+2xy)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{-x^2-y^2+z^2-2xy-2yz-2xz}{(x^2+y^2+z^2+2xy)^2} = \frac{\partial R}{\partial y},$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{-x^2-y^2+z^2-2xy-2xz-2yz}{(x^2+y^2+z^2+2xy)^2} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Rezultă că $\exists\, u$ astfel încât $du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, adică:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x+y-z}{x^2+y^2+z^2+2xy}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x+y-z}{x^2+y^2+z^2+2xy}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2+2xy}.$$

Integrând în raport cu $x$ prima relaţie de mai sus obţinem:

$$u(x,y,z) = \int \frac{x+y-z}{x^2+y^2+z^2+2xy}\,dx = \int \frac{x+y-z}{(x+y)^2+z^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2+$$

$$+2xy) - \operatorname{arctg}\frac{x+y}{z} + \varphi(y,z).$$

Derivând funcţia $u$ de mai sus în raport cu $y$ şi $z$, rezultă:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x+y-z}{x^2+y^2+z^2+2xy} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2+2xy} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Egalând derivatele de mai sus cu $Q$, respectiv cu $R$, obţinem $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$, deci $\varphi(y,z) = C$. Rezultă astfel că:

$$u(x,y,z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2+2xy) - \operatorname{arctg}\frac{x+y}{z} + C.$$

O altă metodă de calcul a primitivei $u$ este formula:

$$u(x,y,z) = \int_0^x \frac{t+y-z}{t^2+y^2+z^2+2ty}\,dt + \int_0^y \frac{t-z}{t^2+z^2}\,dt + \int_1^z \frac{t}{t^2}\,dt =$$

$= \int_0^x \frac{(t+y)-z}{(t+y)^2+z^2}\,dt + \int_0^y \frac{t-z}{t^2+z^2}\,dt + \int_1^z \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln\left[(t+y)^2+z^2\right]\Big|_0^x - \operatorname{arctg}\frac{t+y}{z}\Big|_0^x +$
$+\frac{1}{2}\ln(t^2+z^2)\Big|_0^y - \operatorname{arctg}\frac{t}{z}\Big|_0^y + \ln t\Big|_1^z = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2+2xy) - \frac{1}{2}\ln(y^2+z^2) -$
$-\operatorname{arctg}\frac{x+y}{z} + \operatorname{arctg}\frac{y}{z} + \frac{1}{2}\ln(y^2+z^2) - \frac{1}{2}\ln z^2 - \operatorname{arctg}\frac{y}{z} + \ln z =$
$= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2+2xy) - \operatorname{arctg}\frac{x+y}{z},$
(am considerat $x_0 = y_0 = 0,\ \ z_0 = 1$).

Se mai poate folosi formula:
$u(x,y,z) = \int_0^x \frac{t-1}{t^2+1}\,dt + \int_0^y \frac{x+t-1}{x^2+t^2+1+2xt}\,dt + \int_1^z \frac{x+y+t}{x^2+y^2+t^2+2xy}\,dt =$
$= \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\Big|_0^x - \operatorname{arctg} t\Big|_0^x + \frac{1}{2}\ln(x^2+t^2+1+2xt)\Big|_0^y - \operatorname{arctg}(x+t)\Big|_0^y +$
$+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+t^2+2xy)\Big|_1^z + \operatorname{arctg}\frac{t}{x+y}\Big|_1^z = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x +$
$+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+1+2xy) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{arctg}(x+y) + \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2+$
$+2xy) - \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+1+2xy) + \operatorname{arctg}\frac{z}{x+y} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x+y} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2+2xy) -$
$-\operatorname{arctg}\frac{x+y}{z} + C,$
(am luat $x_0 = y_0 = 0,\ \ z_0 = 1$). Rezultă:

$$u(x,y,z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2+2xy) - \operatorname{arctg}\frac{x+y}{z} + C.$$

## PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

**12.** Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de al doilea tip:

a) $\int_\Gamma (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$, unde $\Gamma$ este elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ parcursă în sens direct trigonometric.

b) $\int_\Gamma \frac{(x+y)\,dx - (x-y)\,dy}{x^2+y^2}$, unde $\Gamma$ este cercul $x^2+y^2 = 4$ parcurs în sens direct trigonometric.

c) $\int_\Gamma (x^2-2xy)\,dx + (y^2-2xy)\,dy$, unde $\Gamma$ este arcul de parabolă $y = x^2$, $x \in [-1,1]$, parcurs de la $A(-1,1)$ la $B(1,1)$.

d) $\int_\Gamma (x^2+y^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy$, unde $(\Gamma):\ y = 1 - |1-x|$, $x \in [0,2]$, parcursă în sensul creşterii parametrului.

e) $\int_\Gamma xy^2\,dx + 2x^2y\,dy$, unde $\Gamma$ este elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ parcursă în sens direct trigonometric.

f) $\int_\Gamma 2xy\,dx + x^2\,dy$, pe drumul $\Gamma$ care uneşte punctele $O(0,0)$ şi $A(1,1)$, dacă $\Gamma$ este: i) dreapta $y = x$; ii) parabola $y = x^2$; iii) parabola $x = y^2$; iv) parabola cubică $y = x^3$, ($\Gamma$ parcurs de la $O$ la $A$).

**13.** Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de al doilea tip:

a) $\int_\Gamma \sin y\,dx + \sin x\,dy$, unde $\Gamma$ este segmentul de dreaptă determinat de punctele $A(0,\pi)$ şi $B(\pi,0)$, parcurs de la $B$ la $A$.

b) $\int_\Gamma (x+y)\,dx - y\,dy$, unde $\Gamma$ este determinat de curbele $xy = 2$, $y = 2x$, $y = \dfrac{x}{2}$, $x \geq 0$.

**14.** Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\int_\Gamma y^2(x\,dy - y\,dx)$, unde $(\Gamma)$ : $\begin{cases} x = \sqrt{|\cos t|}\cdot \mathrm{sgn}\,(\cos t) \\ y = \sqrt{|\sin t|}\cdot \mathrm{sgn}\,(\sin t), \quad t \in [0, 2\pi], \end{cases}$

unde $\mathrm{sgn}\, x = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -1, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$

b) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dx + dy}{\max\{|x|, |y|\}}$, unde $\Gamma$ este dreptunghiul $A_1(-1,-1)$, $A_2(2,-1)$, $A_3(2,1)$, $A_4(-1,1)$ parcurs în sens direct trigonometric.

**15.** Să se calculeze următoarele integrale curbilinii luate de-a lungul curbelor strâmbe:

a) $\int_\Gamma (y^2+z^2)\,dx + (z^2+x^2)\,dy + (x^2+y^2)\,dz$, unde $\Gamma$ este curba $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 4ax \\ x^2+y^2 = ax, \quad z \geq 0, \end{cases}$ parcursă în sens direct trigonometric dacă privim dinspre partea pozitivă a axei $Ox$.

b) $\int_\Gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz$, unde $(\Gamma)$ : $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $t \in [0, 2\pi]$ parcursă în sensul creşterii parametrului $t$.

c) $\int_\Gamma (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz$, unde $\Gamma$ este conturul care mărgineşte porţiunea sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, parcurs în sens direct trigonometric dacă privim dinspre origine.

**16.** Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forţa gravitaţională $\vec{F} = -g\vec{k}$ atunci când punctul de masă $m$ se deplasează din poziţia $A(x_1, y_1, z_1)$ în poziţia $B(x_2, y_2, z_2)$.

**17.** Valoarea integralei curbilinii:
$$\int_{\widehat{AB}} \frac{x^2 + 2xy - y^2}{(x+y)^2}\,dx + \frac{y^2 + 2xy - x^2}{(x+y)^2}\,dy$$
depinde de drum ? Să se calculeze această integrală pentru $A(1,0)$ şi $B(3,4)$.

**18.** Constatând în prealabil că expresia de sub semnul integrală este o diferenţială totală, să se calculeze următoarele integrale curbilinii:

a) $\displaystyle\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$; b) $\displaystyle\int_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{x\,dy - y\,dx}{(x-y)^2}$ de-a lungul unui drum care nu intersectează dreapta $y = x$; c) $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,1)} e^x(\cos y\,dx - \sin y\,dy)$.

**19.** Fie $\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$, unde:

$$P(x,y) = \frac{3x^4 - y^2(x^2+y^2)}{x^2y}, \quad Q(x,y) = \frac{3y^4 - x^2(x^2+y^2)}{xy^2}.$$

a) Să se arate că în domeniul $D = \{(x,y) \in I\!R^2,\ x > 0,\ y > 0\}$ cele două funcţii sunt continuu diferenţiabile şi $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

b) Să se determine în $D$ o funcţie $U$ a cărei diferenţială este $\omega$ : $dU = \omega$.

c) Să se calculeze valoarea integralei curbilinii $\displaystyle\int_\Gamma \omega$, curba $\Gamma$ fiind definită prin:

$$x = t + \cos^2 t,\ \ y = 1 + \sin^2 t,\ \ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

**20.** Să se arate că $P\,dx + Q\,dy = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}\,dx + \dfrac{y-x}{x^2+y^2}\,dy$, definită pe $I\!R^2 \setminus \{(0,0)\}$ nu este o diferenţială totală, deşi $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

**21.** Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de diferenţiale totale:

a) $\displaystyle\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$; b) $\displaystyle\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x_1,y_1,z_1)} z^2\,dx + 2yz\,dy + (2xz + y^2)\,dz$.

**22.** Să se determine funcţiile $z$ ale căror diferenţiale totale sunt:

a) $dz = \dfrac{y\,dx - x\,dy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$; b) $dz = \dfrac{x^2y(x^2+3y^2)\,dx + x^3(x^2-y^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2}$;

c) $dz = \dfrac{y^2\,dx + dy}{(1-xy)^2}$.

**23.** Să se determine funcţiile ale căror diferenţiale totale sunt:

a) $du = \left(1 - \dfrac{1}{y} + \dfrac{y}{z}\right)dx + \left(\dfrac{x}{z} + \dfrac{x}{y^2}\right)dy - \dfrac{xy}{z^2}\,dz$;

b) $du = z\left(\dfrac{1}{x^2y} - \dfrac{1}{x^2+z^2}\right)dx + \dfrac{z\,dy}{xy^2} + \left(\dfrac{x}{x^2+z^2} - \dfrac{1}{xy}\right)dz$.

# Capitolul 5
# INTEGRALE MULTIPLE

## §1. INTEGRALE DUBLE. FORMULA LUI GREEN

Fie $D \subset I\!R^2$ o mulţime *carabilă* sau *măsurabilă Jordan*, adică o mulţime mărginită cu proprietatea că pentru $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists$ mulţimile poligonale $P_\varepsilon$, $Q_\varepsilon$ a.î. $P_\varepsilon \subset D \subset Q_\varepsilon$ şi $A(Q_\varepsilon) - A(P_\varepsilon) < \varepsilon$. Numărul $A(D) = \sup\limits_{P \subset D} A(P) = \inf\limits_{D \subset Q} A(Q)$ se numeşte *aria* lui $D$. Prin *mulţime poligonală* înţelegem o figură plană mărginită de una sau mai multe linii poligonale închise. Un domeniu compact este carabil.

Funcţia $f : D \to I\!R$ este *integrabilă* pe $D$ (mulţime carabilă), notat $f \in \mathcal{R}(D)$ dacă există un număr real $I$ astfel încât $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ cu proprietatea că pentru $\forall\, \Delta \in \mathcal{D}$ (mulţimea diviziunilor lui $D$) cu $\|\Delta\| < \delta$, $\Delta = (D_i)_{i=\overline{1,n}}$ şi $\forall$ punctele $z_i \in D_i$, $i = \overline{1,n}$ rezultă:

$$|\sigma_\Delta(f, z_i) - I| < \varepsilon, \quad \text{unde} \quad \sigma_\Delta(f, z_i) = \sum_{i=1}^{n} f(z_i) \cdot A(D_i).$$

Numărul $I$ se numeşte *integrala dublă* a funcţiei $f$ pe mulţimea carabilă $D$ şi se notează $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

*Proprietăţi.* a) Fie $f$, $g : D \subset I\!R^2 \to I\!R$, $D$ mulţime carabilă. Dacă $f \in \mathcal{R}(D)$ şi $g \in \mathcal{R}(D)$, iar $\lambda$, $\mu \in I\!R$ atunci $\lambda f + \mu g \in \mathcal{R}(D)$ şi:

$$\iint_D (\lambda f(x,y) + \mu g(x,y))\,dx\,dy = \lambda \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + \mu \iint_D g(x,y)\,dx\,dy.$$

b) Fie $D = D_1 \cup D_2$, $D_1$, $D_2$ mulţimi carabile cu $\overset{\circ}{D_1} \cap \overset{\circ}{D_2} = \emptyset$, iar $f : D \to I\!R$. Dacă $f \in \mathcal{R}(D)$ atunci $f \in \mathcal{R}(D_1)$ şi $f \in \mathcal{R}(D_2)$ şi:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

şi invers dacă $f \in \mathcal{R}(D_1)$ şi $f \in \mathcal{R}(D_2)$ atunci $f \in \mathcal{R}(D)$ şi are loc egalitatea de mai sus.

c) Fie $f$, $g : D \to I\!R$, $D$ mulţime carabilă, $f$, $g \in \mathcal{R}(D)$ şi $f(x,y) \le g(x,y)$, $(x,y) \in$ $\in D$ atunci:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \le \iint_D g(x,y)\,dx\,dy.$$

d) Fie $f : D \to I\!R$ mărginită, $f \in \mathcal{R}(D)$, $M = \sup\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$, $m = \inf\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$. Atunci:

$$m \cdot A(D) \le \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \le M \cdot A(D).$$

e) Dacă $f \in \mathcal{R}(D)$ rezultă $|f| \in \mathcal{R}(D)$ şi:

$$\left|\iint_D f(x,y)\,dx\,dy\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy.$$

**Teorema 5.1.1.** Dacă $D \subset I\!R^2$ este un domeniu compact, cu $A(D) \ne 0$, iar $f : D \to I\!R$ este o funcţie continuă pe $D$ atunci $f \in \mathcal{R}(D)$.

Fie $D \subset I\!R^2$ un domeniu compact simplu în raport cu axa $Oy$, adică definit de inegalităţile: $\begin{cases} a \le x \le b \\ y_2(x) \le y \le y_1(x), \end{cases}$ unde $y_1,\ y_2 : [a,b] \to I\!R$ sunt funcţii continue şi $y_2(x) \le y_1(x),\ \ \forall\, x \in [a,b]$.

**Teorema 5.1.2 (Fubini).** Fie $f : D \to I\!R$, unde $D$ este domeniu simplu în raport cu axa $Oy$, dat prin inegalităţile de mai sus. Presupunem:

a) $f \in \mathcal{R}(D)$, b) $\forall\, x \in [a,b]\ \exists\, J(x) = \displaystyle\int_{y_2(x)}^{y_1(x)} f(x,y)\,dy$.

Atunci i) $J \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ şi

ii) $\displaystyle\int_a^b J(x)\,dx \equiv \int_a^b dx \int_{y_2(x)}^{y_1(x)} f(x,y)\,dy = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$

Dacă $D \subset I\!R^2$ este un domeniu compact simplu în raport cu axa $Ox$, adică: $\begin{cases} c \le y \le d \\ x_2(y) \le x \le x_1(y), \end{cases}$ cu $x_1,\ x_2 : [c,d] \to I\!R$ funcţii continue, $x_2(y) \le x_1(y),\ \ \forall\, y \in [c,d]$ atunci are loc:

**Teorema 5.1.3 (Fubini).** Fie $f : D \to I\!R$, $D$ domeniu simplu în raport cu axa $Ox$, ca mai sus. Dacă:

a) $f \in \mathcal{R}(D)$, b) $\forall\, y \in [c,d]\ \exists\, I(y) = \displaystyle\int_{x_2(y)}^{x_1(y)} f(x,y)\,dx$

atunci i) $I \in \mathcal{R}_{[c,d]}$ şi

ii) $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{x_2(y)}^{x_1(y)} f(x,y)\,dx \equiv \int_c^d I(y)\,dy.$

**Consecinţa 5.1.1.** Dacă $D$ este un domeniu compact simplu în raport cu axa $Oy$ sau axa $Ox$, iar $f : D \to I\!R$ este o funcţie continuă atunci sunt îndeplinite toate ipotezele din Teorema 5.1.2, respectiv Teorema 5.1.3, deci au loc egalităţile ii) de mai sus.

**Consecinţa 5.1.2.** Dacă $f$ este continuă pe un domeniu $D$ simplu în raport cu axa $Ox$ şi faţă de axa $Oy$ atunci ordinea de integrare nu afectează valoarea integralei.

**Teorema 5.1.4.** (schimbarea de variabile în integrala dublă). Fie $T : I\!R^2 \to I\!R^2$ o

transformare regulată, $T = (\varphi, \psi)$ (adică $\exists \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \ \dfrac{\partial \psi}{\partial x_i}, \ i = 1, 2$, continue şi $J =$ $= \dfrac{D(\varphi, \psi)}{D(x_1, x_2)} \neq 0$), de ecuaţii $\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v), \end{cases}$ în care $\varphi$ şi $\psi$ admit derivate parţiale de ordinul al doilea mixte continue, iar $D$, $\widetilde{D}$ domenii plane compacte mărginite de $\Gamma$, respectiv $\widetilde{\Gamma}$ curbe simple, închise şi netede (sau netede pe porţiuni) astfel încât $\Gamma = T(\widetilde{\Gamma})$, $D = T(\widetilde{D})$. Fie $f : D \to I\!R$ o funcţie continuă pe $D$. Atunci are loc formula:

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\widetilde{D}} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \cdot \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right| (u, v)\, du\, dv.$$

În particular dacă trecem la coordonate polare $r$ şi $\varphi$ după formulele $x = r\cos\varphi$, $y =$ $= r\sin\varphi$, cu $\dfrac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = r$, obţinem formula:

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\widetilde{D}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r\, dr\, d\varphi.$$

**Calculul ariilor domeniilor Green.** Un domeniu Green este un domeniu compact simplu în raport cu axa $Ox$ sau simplu în raport cu axa $Oy$ sau este un domeniu compact mărginit de o curbă simplă, închisă şi rectificabilă sau se descompune într-un număr finit de domenii de genul de mai sus. Dacă $D$ este un domeniu Green atunci:

$$A(D) = \iint_D dx\, dy.$$

**Calculul volumelor.** Volumul cilindroidului limitat sus de suprafaţa continuă $z =$ $= f(x, y)$, jos de planul $z = 0$ şi lateral de o suprafaţă cilindrică dreaptă care intersectează planul $Oxy$ după domeniul $D$ a cărui arie există este egal cu:

$$V = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

**Aplicaţiile integralei duble în mecanică**

1°. *Masa unei plăci.* Pentru o placă $D$ din planul $Oxy$ cu densitatea $\varrho = \varrho(x, y)$ în punctul $(x, y)$, masa sa este egală cu $M = \iint_D \varrho(x, y)\, dx\, dy$.

2°. *Centrul de greutate.* Dacă $x_0$, $y_0$ sunt coordonatele centrului de greutate al plăcii $D$ atunci $x_0 = \dfrac{1}{M} \iint_D x \cdot \varrho(x, y)\, dx\, dy, \quad y_0 = \dfrac{1}{M} \iint_D y \cdot \varrho(x, y)\, dx\, dy,$ unde $M$ este masa plăcii.

3°. *Momente de inerţie.* Momentul de inerţie al plăcii $D$ din planul $Oxy$ în raport cu o dreaptă $d$ sau cu un punct $P$ este $I = \iint_D \varrho r^2\, dx\, dy,$ unde $r$ este distanţa punctului curent al plăcii $(x, y)$ la axa $d$, respectiv la punctul $P$.

Momentele de inerţie $I_x$ şi $I_y$ ale plăcii $D$ în raport cu axele de coordonatele $Ox$ şi $Oy$ sunt $I_x = \iint_D \varrho y^2\, dx\, dy, \quad I_y = \iint_D \varrho x^2\, dx\, dy.$

Momentul de inerţie al plăcii $D$ în raport cu originea coordonatelor este:

$$I_0 = \iint_D \varrho(x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

**Teorema 5.1.5 (Formula lui Green).** Fie $D$ un domeniu simplu faţă de axa $Ox$ şi $Oy$ cu $Fr\, D = \Gamma$, iar $P$ şi $Q : D \to I\!R$ îndeplinesc condiţiile:

a) $P,\ Q$ sunt continue pe $D$; b) $\exists\, \dfrac{\partial P}{\partial y},\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ continue pe $D$.

Atunci:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_\Gamma P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy,$$

unde $\Gamma$ este parcursă în sens direct trigonometric.

Formula se păstrează dacă $D$ este un domeniu Green oarecare.

**Consecinţa 5.1.3.** Dacă $D$ este un domeniu Green cu $Fr\, D = \Gamma$ atunci:

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_\Gamma x\, dy - y\, dx,$$

unde $\Gamma$ este parcursă în sens direct trigonometric.

## PROBLEME REZOLVATE

**1.** Să se calculeze următoarele integrale duble:

a) $\displaystyle\iint_D \frac{x-y}{x+y}\, dx\, dy$, unde $D$ este definit prin $1 \le x \le 2,\ 2 \le y \le 3$.

b) $\displaystyle\iint_D xy^2\, dx\, dy$, unde $D$ este domeniul compact limitat de parabola $y^2 = 2px$ şi de dreapta $x = \dfrac{p}{2}$ $(p > 0)$.

c) $\displaystyle\iint_D (x^2 + y)\, dx\, dy$, unde $D$ este domeniul compact limitat de curbele $y = x^2$ şi $y^2 = x$.

d) $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy$, unde $D$ este domeniul compact mărginit de paralelogramul cu laturile $y = x,\ y = x + a,\ y = a,\ y = 3a,\ (a > 0)$.

e) $\displaystyle\iint_D y^2\, dx\, dy$, unde $D$ este limitat de axa absciselor şi de prima buclă a cicloidei $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ t \in [0, 2\pi]$.

f) $\displaystyle\iint_D \sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) dx\, dy$, unde $D$ este domeniul compact mărginit de triunghiul $OAB$, $O(0,0)$, $A(a,0)$, $B(0,b)$, $a,\ b > 0$.

g) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$, unde $D$ este limitat de $x = 0,\ y = 1,\ y = \sqrt[3]{2}$ şi $y = x$.

h) $\displaystyle\iint_D (1 - y)\, dx\, dy$, unde $D$ este definit prin $x^2 + (y-1)^2 \le 1,\ y \le x^2,\ x \ge 0$.

i) $\displaystyle\iint_D (x + y)\, dx\, dy$, unde $D$ este limitat de $y^2 = 2x,\ x + y = 4,\ x + y = 12$.

j) $\displaystyle\iint_D \sqrt{|y - x^2|}\, dx\, dy$, unde $D$ este definit prin $|x| \le 1,\ 0 \le y \le 1$.

**Rezolvare.** Funcţiile de mai sus sunt continue pe domeniile compacte respective.

a) Domeniul $D$ este simplu şi faţă de axa $Ox$ şi faţă de axa $Oy$ (vezi Figura 5.1.1). Considerând pe $D$ simplu faţă de axa $Oy$, rezultă:

$$I = \int_1^2 \left( \int_2^3 \frac{x-y}{x+y}\, dy \right) dx = \int_1^2 [-y + 2x\ln(y+x)]\Big|_{y=2}^{y=3} dx = \int_1^2 [-1 + 2x\ln(x+3) -$$

$$-2x\ln(x+2)]\, dx = -1 + x^2\ln(x+3)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{x+3}\, dx - x^2\ln(x+2)\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{x^2}{x+2}\, dx =$$

$$= -1 + 4\ln 5 - \ln 4 - \int_1^2 \frac{x^2+6x+9-6(x+3)+9}{x+3}\, dx - 4\ln 4 + \ln 3 +$$

$$+ \int_1^2 \frac{x^2+4x+4-4x-8+4}{x+2}\, dx = -1 + 4\ln\frac{5}{4} + \ln\frac{3}{4} - \left( \frac{x^2}{2} + 3x - 6x + 9\ln(x+3) \right)\Big|_1^2 +$$

$$+ \left( \frac{x^2}{2} + 2x - 4x + 4\ln(x+2) \right)\Big|_1^2 = 4\ln\frac{5}{3} - 9\ln\frac{5}{4} + \ln\frac{3}{4}.$$

Integrala se poate calcula considerând pe $D$ simplu în raport cu axa $Ox$, deci:

$$I = \int_2^3 \left( \int_1^2 \frac{x-y}{x+y}\, dx \right) dy = 4\ln\frac{5}{3} - 9\ln\frac{5}{4} + \ln\frac{3}{4} = \ln\frac{2^{16}}{3^3 \cdot 5^5}.$$

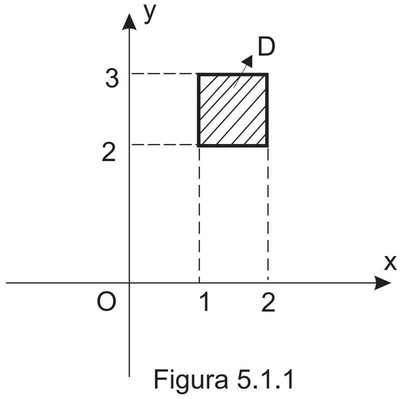

Figura 5.1.1

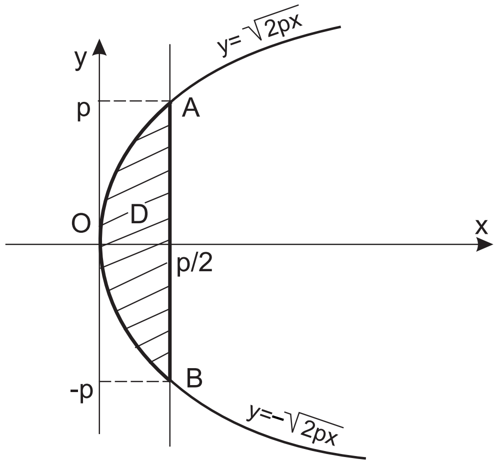

Figura 5.1.2

b) Domeniul compact $D$ este simplu şi în raport cu axa $Ox$ şi în raport cu axa $Oy$ (vezi Figura 5.1.2). Considerându-l simplu în raport cu axa $Oy$ : $\begin{cases} 0 \le x \le p/2 \\ -\sqrt{2px} \le y \le \sqrt{2px}, \end{cases}$ obţinem:

$$I = \int_0^{p/2} \left( \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} xy^2\, dy \right) dx = \int_0^{p/2} \left( \frac{xy^3}{3}\Big|_{y=-\sqrt{2px}}^{y=\sqrt{2px}} \right) dx = \int_0^{p/2} \frac{x}{3} \left( 4px\sqrt{2px} \right) dx =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}p^{3/2}}{3} \int_0^{p/2} x^{5/2}\, dx = \frac{4\sqrt{2}p^{3/2}}{3} \cdot \frac{2}{7} \left( \frac{p}{2} \right)^{7/2} = \frac{p^5}{21}.$$

Dacă considerăm pe $D$ ca fiind simplu în raport cu axa $Ox$ : $\begin{cases} -p \le y \le p \\ \dfrac{y^2}{2p} \le x \le \dfrac{p}{2}, \end{cases}$ atunci $(A(p/2, p),\ B(p/2, -p))$ rezultă:

$$I = \int_{-p}^{p} \left( \int_{y^2/(2p)}^{p/2} xy^2\, dx \right) dy = \int_{-p}^{p} \left( \frac{x^2 y^2}{2} \Big|_{x=y^2/(2p)}^{x=p/2} \right) dy = \int_{-p}^{p} \frac{y^2}{2} \left( \frac{p^2}{4} - \frac{y^4}{4p^2} \right) dy =$$
$$= \frac{1}{12} p^5 - \frac{1}{28p^2} p^7 = \frac{p^5}{21}.$$

c) Şi aici domeniul compact $D$ este simplu şi în raport cu axa $Ox$ şi în raport cu axa $Oy$, (vezi Figura 5.1.3). Considerând pe $D$ simplu în raport cu axa $Oy$ : $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le \sqrt{x}, \end{cases}$ avem:

$$I = \int_0^1 \left( \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[ \left( x^2 y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} \right] dx =$$
$$= \int_0^1 \left( x^{5/2} + \frac{x}{2} - x^4 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left( \frac{2}{7} x^{7/2} + \frac{x^2}{4} - \frac{3}{10} x^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{33}{140}.$$

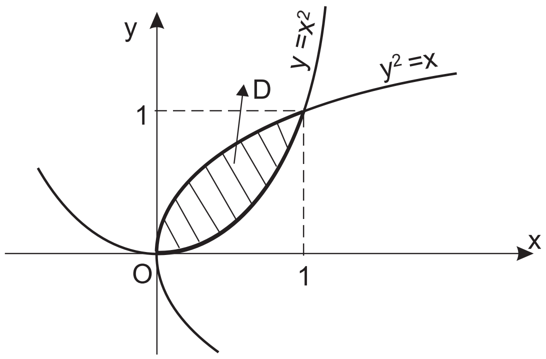

Figura 5.1.3

Dacă considerăm pe $D$ simplu în raport cu axa $Ox$ : $\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y^2 \le x \le \sqrt{y}, \end{cases}$ atunci:

$$I = \int_0^1 \left( \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (x^2 + y)\, dx \right) dy = \int_0^1 \left[ \left( \frac{x^3}{3} + xy \right) \Big|_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}} \right] dy = \int_0^1 \left( \frac{y^{3/2}}{3} + y^{3/2} - \right.$$
$$\left. -\frac{y^6}{3} - y^3 \right) dy = \left( \frac{8}{15} y^{5/2} - \frac{1}{21} y^7 - \frac{1}{4} y^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{33}{140}.$$

d) Domeniul compact $D$ este desenat în Figura 5.1.4, adică domeniul mărginit de paralelogramul $ABCD$, unde $A(0,a)$, $B(a,a)$, $C(3a,3a)$, $D(2a,3a)$.

Domeniul $D$ este simplu în raport cu axa $Ox$ : $\begin{cases} a \le y \le 3a \\ y - a \le x \le y. \end{cases}$ Atunci:

$$I = \int_a^{3a} \left( \int_{y-a}^{y} (x^2 + y^2)\, dx \right) dy = \int_a^{3a} \left( \frac{x^3}{3} + xy^2 \right) \Big|_{x=y-a}^{x=y} dy = \int_a^{3a} \left( \frac{y^3}{3} + y^3 - \right.$$
$$\left. - \frac{(y-a)^3}{3} - y^2(y-a) \right) dy = \left( \frac{1}{3} y^4 - \frac{1}{12} (y-a)^4 - \frac{y^4}{4} + \frac{ay^3}{3} \right) \Big|_a^{3a} = 14a^4.$$

Dacă dorim să integrăm mai întâi în raport cu $y$, descompunem domeniul compact $D$ în 3 subdomenii simple în raport cu $Oy$. Atunci:

$$I = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3}, \quad \iint_{D_1} f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^a \left( \int_a^{x+a} (x^2 + y^2)\, dy \right) dx,$$

$$\iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^{2a} \left( \int_x^{x+a} (x^2+y^2)\,dy \right) dx,$$
$$\iint_{D_3} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{2a}^{3a} \left( \int_x^{3a} (x^2+y^2)\,dy \right) dx.$$

Rezultă $I = 14a^4$.

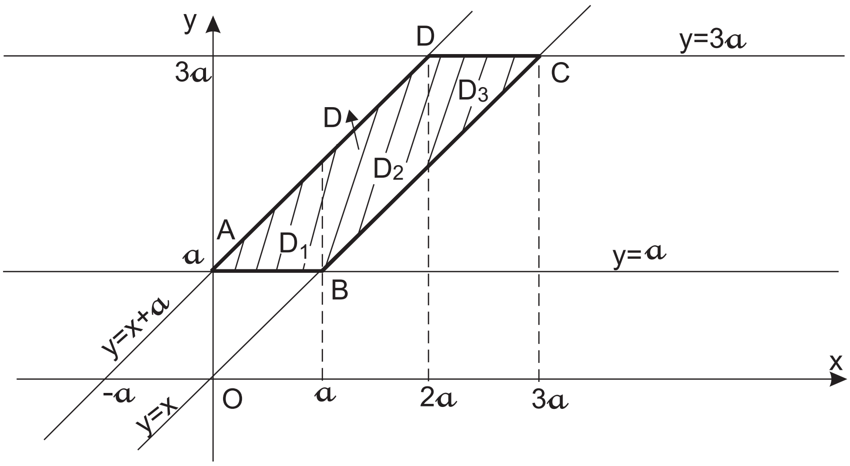


Figura 5.1.4

e) Domeniul compact $D$ după cum se vede din Figura 5.1.5 este simplu în raport cu axa $Oy$ (şi în raport cu axa $Ox$). Atunci:

$$I = \int_0^{2\pi a} \left( \int_0^{y(x)} y^2\,dy \right) dx = \int_0^{2\pi a} \left( \left. \frac{y^3}{3} \right|_{y=0}^{y=y(x)} \right) dx = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi a} y^3(x)\,dx.$$

Facem schimbarea de variabilă $x = a(t - \sin t) \Rightarrow y(x) = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $dx = a(1 - \cos t)\,dt$. Deci:

$$I = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} a^3(1-\cos t)^3 \cdot a(1-\cos t)\,dt = \frac{a^4}{3} \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^4\,dt = \frac{a^4}{3} \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t +$$
$$+ \cos^2 t)^2\,dt = \frac{a^4}{3} \int_0^{2\pi} (1 + 4\cos^2 t + \cos^4 t - 4\cos t + 2\cos^2 t - 4\cos^3 t)\,dt =$$
$$= \frac{a^4}{3} \left[ t - 4\sin t + 3\left( t + \frac{1}{2}\sin 2t \right) - 4\left( \sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right) + \frac{1}{4}\Big( t + \sin 2t + \right.$$
$$\left. \left. + \frac{1}{2}\left( t + \frac{\sin 4t}{4} \right) \Big) \right] \right|_0^{2\pi} = \frac{35\pi a^4}{12}.$$

f) Domeniul compact $D$ este desenat în Figura 5.1.6. Dreapta $(AB)$ are ecuaţia $y = -\dfrac{b}{a}(x-a)$. Rezultă $(D) : \begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le -\dfrac{b}{a}(x-a) \end{cases}$ şi:

$$I = \int_0^a \left( \int_0^{-\frac{b}{a}(x-a)} \sin\frac{\pi}{2}\left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) dy \right) dx = \int_0^a \left. \left[ -\frac{2b}{\pi} \cos\frac{\pi}{2}\left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) \right] \right|_{y=0}^{y=-\frac{b}{a}(x-a)} dx =$$
$$= \int_0^a \left( -\frac{2b}{\pi} \right) \left[ \cos\frac{\pi}{2}\left( \frac{x}{a} - \frac{1}{a}(x-a) \right) - \cos\frac{\pi x}{2a} \right] dx = \int_0^a \left( -\frac{2b}{\pi} \right) \left[ \cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi x}{2a} \right] dx =$$
$$= \frac{2b}{\pi} \int_0^a \cos\frac{\pi x}{2a}\,dx = \frac{4ab}{\pi^2}.$$

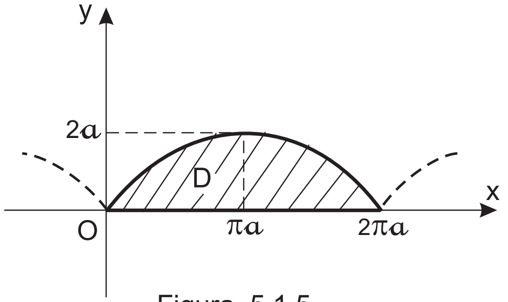


Figura 5.1.5

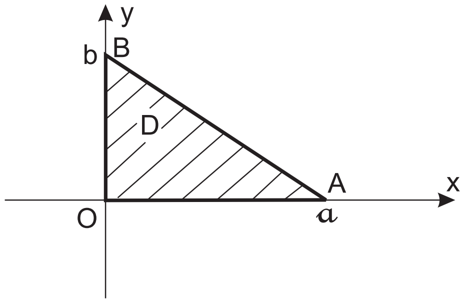


Figura 5.1.6

g) Domeniul compact $D$ desenat în Figura 5.1.7 este $(D):\begin{cases}1\le y\le\sqrt[3]{2}\\ 0\le x\le y,\end{cases}$ (simplu în raport cu axa $Ox$). Rezultă:

$$I=\int_1^{\sqrt[3]{2}}\left(\int_0^y\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\right)dy.$$

Calculăm mai întâi integrala:

$$I_y=\int_0^y\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx=x\sqrt{x^2+y^2}\Big|_0^y-\int_0^y\sqrt{x^2+y^2}\,dx=y^2\sqrt{2}-\int_0^y\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx-$$

$$-\int_0^y\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx=y^2\sqrt{2}-I_y-y^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_0^y=y^2\sqrt{2}-I_y-y^2\ln(y+y\sqrt{2})+$$

$$+y^2\ln y.$$

Deci $\quad I_y=\dfrac{1}{2}y^2\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}y^2\ln(1+\sqrt{2}),\quad$ iar:

$$I=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt[3]{2}}(y^2\sqrt{2}-y^2\ln(1+\sqrt{2}))\,dy=\frac{1}{6}(y^3\sqrt{2}-y^3\ln(1+\sqrt{2}))\Big|_1^{\sqrt[3]{2}}=$$

$$=\frac{1}{6}(\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})).$$

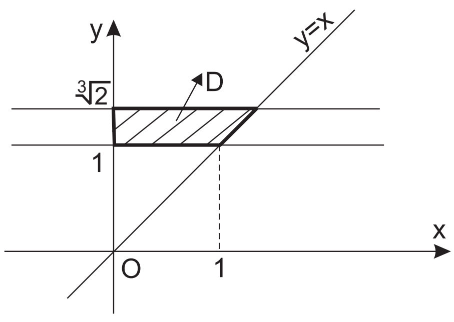


Figura 5.1.7

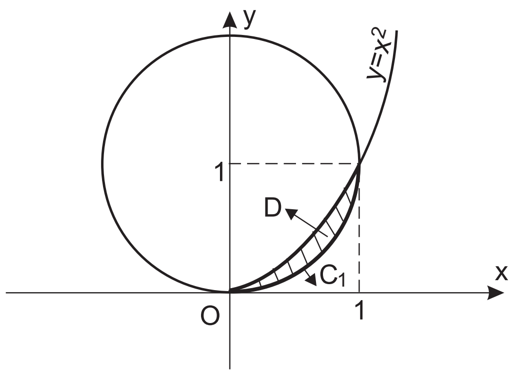


Figura 5.1.8

h) Domeniul compact $D$ este limitat de cercul de ecuaţie $(y-1)^2=1-x^2$, mai precis de arcul $C_1$ de ecuaţie $y-1=-\sqrt{1-x^2}$, $x\ge 0$ şi de parabola $y=x^2$ (vezi Figura 5.1.8). Deci $(D):\begin{cases}0\le x\le 1\\ 1-\sqrt{1-x^2}\le y\le x^2\end{cases}$ este simplu în raport cu axa $Oy$. Rezultă:

$$I=\int_0^1\left(\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x^2}(1-y)\,dy\right)dx=\int_0^1\left(y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=1-\sqrt{1-x^2}}^{y=x^2}dx=$$
$$=\int_0^1\left[x^2-\frac{x^4}{2}-1+\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-x^2})^2\right]dx=\int_0^1\left(-\frac{x^4}{2}+\frac{x^2}{2}\right)dx=\frac{1}{15}.$$

i) Domeniul compact $D$ este mărginit de trapezul curbiliniu $ABDC$, desenat în Figura 5.1.9, unde $A(2,2)$, $B(8,-4)$, $C(8,4)$, $D(18,-6)$. Descompunem pe $D$ în două subdomenii simple în raport cu axa $Oy$, $D=D_1\cup D_2$, unde:

$$(D_1):\begin{cases}2\le x\le 8\\ 4-x\le y\le\sqrt{2x},\end{cases}\qquad (D_2):\begin{cases}8\le x\le 18\\ -\sqrt{2x}\le y\le 12-x.\end{cases}$$

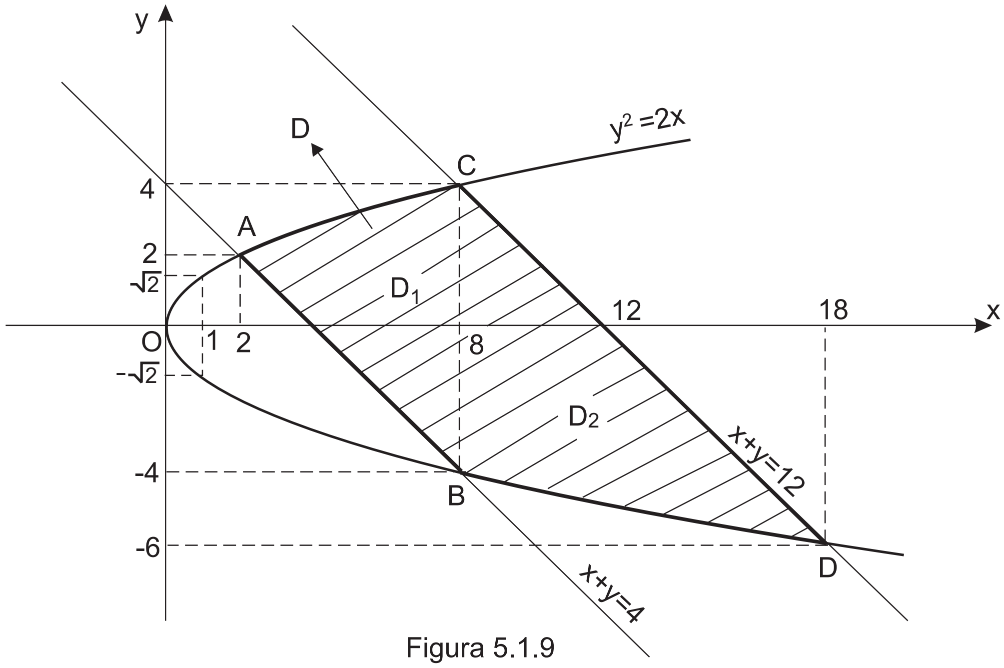


Figura 5.1.9

Rezultă:

$$I=\int_2^8\left(\int_{4-x}^{\sqrt{2x}}(x+y)\,dy\right)dx+\int_8^{18}\left(\int_{-\sqrt{2x}}^{12-x}(x+y)\,dy\right)dx=\int_2^8\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=4-x}^{y=\sqrt{2x}}dx+$$
$$+\int_8^{18}\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=-\sqrt{2x}}^{y=12-x}dx=\int_2^8\left(x\sqrt{2x}+x-x(4-x)-\frac{(4-x)^2}{2}\right)dx+$$
$$+\int_8^{18}\left[x(12-x)+\frac{(12-x)^2}{2}+x\sqrt{2x}-x\right]dx=\int_2^8\left(\frac{x^2}{2}+\sqrt{2}x^{3/2}+x-8\right)dx+$$
$$+\int_8^{18}\left(-\frac{x^2}{2}+\sqrt{2}x^{3/2}-x+72\right)dx=\left(\frac{x^3}{6}+\frac{2\sqrt{2}}{5}x^{5/2}+\frac{x^2}{2}-8x\right)\Big|_2^8+$$
$$+\left(-\frac{x^3}{6}+\frac{2\sqrt{2}}{5}x^{5/2}-\frac{x^2}{2}+72x\right)\Big|_8^{18}=543\frac{11}{15}.$$

j) Domeniul compact $D$ desenat în Figura 5.1.10 este simplu în raport cu axa $Oy$:

$$(D)\begin{cases}-1\le x\le 1\\ 0\le y\le 1.\end{cases}\quad \text{Deci: } I=\int_{-1}^1\left(\int_0^1\sqrt{|y-x^2|}\,dy\right)dx.$$

Deoarece:

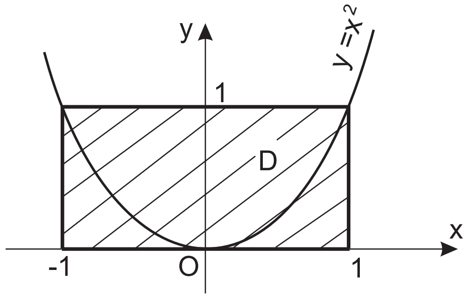


Figura 5.1.10

$|y-x^2| = \begin{cases} y-x^2, & \text{pt. } y \geq x^2 \\ -y+x^2, & \text{pt. } y \leq x^2, \end{cases}$ rezultă:

$$I = \int_{-1}^{1}\left(\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,dy + \int_{x^2}^{1}\sqrt{y-x^2}\,dy\right)dx = \int_{-1}^{1}\left[-\frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2}\Big|_{y=0}^{y=x^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3}(y-x^2)^{3/2}\Big|_{y=x^2}^{y=1}\right]dx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2}\right]dx = \frac{1}{6}x^4\Big|_{-1}^{1} + \frac{4}{3}\int_0^1 (1-x^2)^{3/2}\,dx =$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^1 (1-x^2)\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Facem schimbarea de variabilă $x = \sin t$. Obţinem:

$$I = \frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\cdot\cos^2 t\,dt = \frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + \sin 2t\Big|_0^{\pi/2} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 4t}{2}\,dt\right) = \frac{\pi}{4}.$$

**2.** Să se schimbe ordinea de integrare în următoarele integrale:

a) $\displaystyle\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)\,dy$; b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy$;

c) $\displaystyle\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$; d) $\displaystyle\int_1^e dx\int_0^{ln\,x} f(x,y)\,dy$,

unde $f$ este o funcţie definită şi continuă pe fiecare domeniu compact definit de integralele de mai sus.

**Rezolvare.** a) Domeniul compact $D$ este $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq 2x, \end{cases}$ (vezi Figura 5.1.11).

Pentru a schimba ordinea de integrare descompunem pe $D$ în două subdomenii $D = D_1 \cup D_2$, unde:

$$(D_1) : \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ y/2 \leq x \leq y \end{cases} \quad \text{şi} \quad (D_2) : \begin{cases} 2 \leq y \leq 4 \\ y/2 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Rezultă:

$$I = \int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)\,dy = \int_0^2 dy\int_{y/2}^{y} f(x,y)\,dx + \int_2^4 dy\int_{y/2}^{2} f(x,y)\,dx.$$

b) Domeniul compact $D$ este $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 1-x^2, \end{cases}$ (vezi Figura 5.1.12).

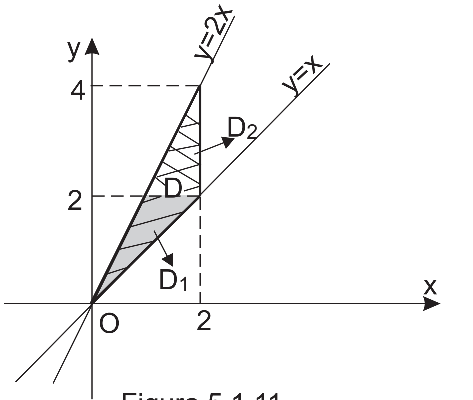


Figura 5.1.11

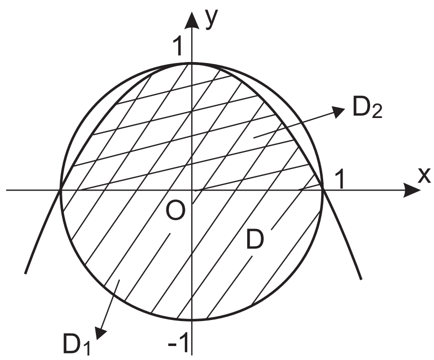


Figura 5.1.12

Descompunem pe $D$ în două subdomenii:

$$(D_1):\ \begin{cases} -1 \le y \le 0 \\ -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}, \end{cases} \qquad (D_2):\ \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ -\sqrt{1-y} \le x \le \sqrt{1-y}. \end{cases}$$

Rezultă:

$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy = \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx.$$

c) Domeniul compact $D$ este $\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 2-x \le y \le \sqrt{2x-x^2}, \end{cases}$ (vezi Figura 5.1.13).

Domeniul $D$ este cuprins între cercul $(C)$ $x^2+y^2-2x=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2-1=0$ şi dreapta $(d)$ $x+y=2$.

Rezultă:

$$I = \int_{1}^{2} dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy = \int_{0}^{1} dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

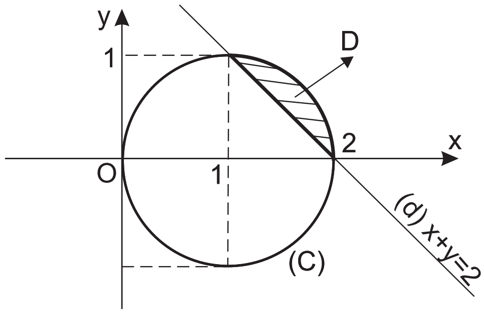


Figura 5.1.13

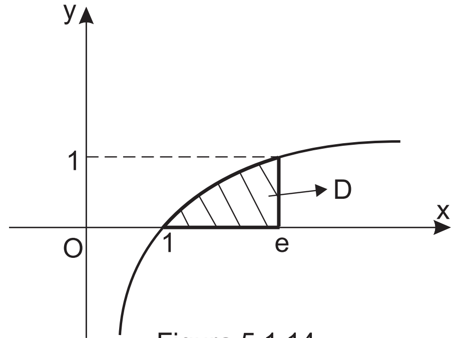


Figura 5.1.14

d) Domeniul compact $D$ este $\begin{cases} 1 \le x \le e \\ 0 \le y \le \ln x, \end{cases}$ (vezi Figura 5.1.14), care se poate scrie şi astfel $\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ e^y \le x \le e. \end{cases}$

Rezultă:

$$I=\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)\,dy=\int_0^1 dy\int_{e^y}^e f(x,y)\,dx.$$

**3.** Să se calculeze trecând la coordonate polare următoarele integrale duble:

a) $\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy,\ \ (D):\ \pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2;$

b) $\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy,\ \ (D):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1;$

c) $\iint_D f\left(\frac{y}{x}\right)\,dx\,dy,\ \ (D):\ x^2+y^2\le x,\ \ f$ este o funcţie continuă.

d) $\iint_D \frac{y^2}{x^2}\,dx\,dy,\ \ (D):\ 1\le x^2+y^2\le 2x;$

e) $\iint_D \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy,\ \ D=\{(x,y)\in I\!\!R^2,\ \ x^2+y^2\ge 1,\ \ x+y\le\sqrt{2},\ x-y\le$ $\le\sqrt{2},\ x\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\};$

f) $\iint_D f(x^2+y^2)\,dx\,dy,\ \ (D):\ \begin{cases} a^2\le x^2+y^2\le b^2,\\ x\le a,\end{cases}$ $f$ funcţie continuă, $(a,\ b>0)$.

g) $\iint_D \frac{x^2+y^2}{\sqrt{4-(x^2+y^2)^2}}\,dx\,dy,\ \ (D):\ \frac{x^2}{2}+y^2\le 1.$

**Rezolvare.** a) Facem schimbarea de variabile $x=r\cos\varphi,\ \ y=r\sin\varphi$. Domeniul compact $D$ este transformat în domeniul $\widetilde{D}:\ \begin{cases}\pi\le r\le 2\pi\\ 0\le\varphi\le 2\pi,\end{cases}$ (vezi Figura 5.1.15).

Rezultă:

$I=\iint_{\widetilde{D}} r\sin r\,dr\,d\varphi=\int_\pi^{2\pi}\int_0^{2\pi} r\sin r\,dr\,d\varphi=\left(\int_\pi^{2\pi} r\sin r\,dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)=$
$=2\pi\left(-r\cos r\Big|_\pi^{2\pi}+\sin r\Big|_\pi^{2\pi}\right)=-6\pi^2.$

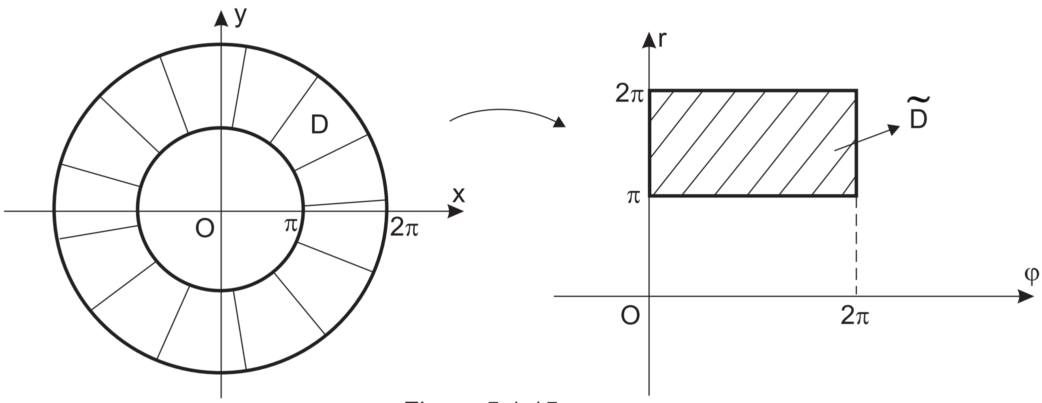


Figura 5.1.15

b) Folosim coordonatele polare generalizate $x=ar\cos\varphi,\ \ y=br\sin\varphi$. Domeniul $D$ se transformă în domeniul $\widetilde{D}:\ \begin{cases}0\le r\le 1\\ 0\le\varphi\le 2\pi,\end{cases}$ (vezi Figura 5.1.16).

Deoarece $\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=abr$, rezultă:

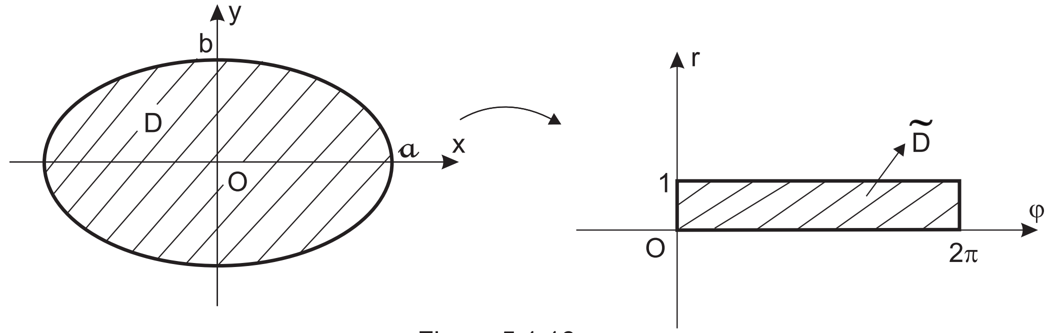


Figura 5.1.16

$$I=\iint_{\widetilde{D}}\sqrt{1-r^2}\cdot abr\,dr\,d\varphi=\int_0^1\int_0^{2\pi}\sqrt{1-r^2}\cdot abr\,dr\,d\varphi=ab\left(\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr\right)\times$$
$$\times\left(\int_0^{2\pi}d\varphi\right)\overset{r^2=u}{\equiv} ab\pi\int_0^1\sqrt{1-u}\,du=ab\pi\frac{-(1-u)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^1=\frac{2ab\pi}{3}.$$

c) Notăm $x=r\cos\varphi,\ \ y=r\sin\varphi$. Introducând pe $x$ şi $y$ în inegalitatea domeniului $D$ obţinem: $r^2\le r\cos\varphi$, deci $\cos\varphi\ge 0$ şi $r\le\cos\varphi$. Deci:

$$(\widetilde{D}):\ \begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0\le r\le\cos\varphi,\ \ \text{(vezi Figura 5.1.17).}\end{cases}$$

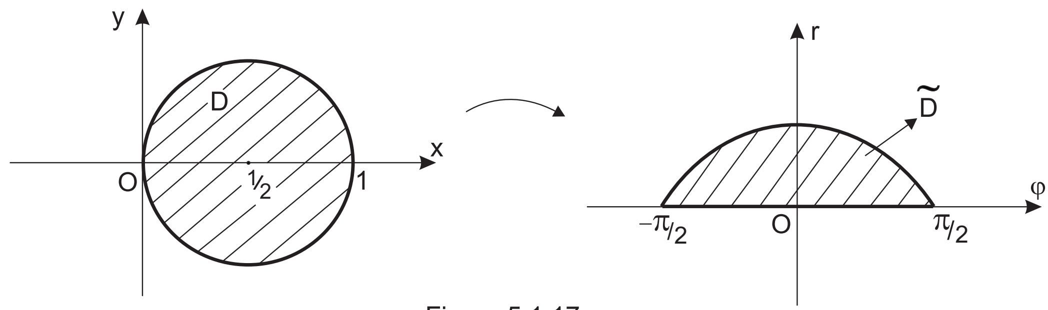


Figura 5.1.17

Rezultă:

$$I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\cos\varphi}f(\operatorname{tg}\varphi)\cdot r\,dr\,d\varphi=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}f(\operatorname{tg}\varphi)\cdot\left(\int_0^{\cos\varphi}r\,dr\right)\,d\varphi=$$
$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}f(\operatorname{tg}\varphi)\cdot\frac{\cos^2\varphi}{2}\,d\varphi\overset{tg\,\varphi=u}{=}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(u)}{(1+u^2)^2}\,du.$$

d) Introducând pe $x=r\cos\varphi,\ \ y=r\sin\varphi$ în inegalităţile care definesc domeniul $D$ obţinem $1\le r^2\le 2r\cos\varphi\Rightarrow 1\le r\le 2\cos\varphi,\ \ \cos\varphi\ge\dfrac{1}{2}\Rightarrow(\widetilde{D}):\ \begin{cases}-\dfrac{\pi}{3}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{3}\\ 1\le r\le 2\cos\varphi,\end{cases}$

(vezi Figura 5.1.18).

Rezultă:

$$I=\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\int_1^{2\cos\varphi}\operatorname{tg}^2\varphi\cdot r\,dr\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\operatorname{tg}^2\varphi\,(4\cos^2\varphi-1)\,d\varphi=2\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\sin^2\varphi\,d\varphi-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}(\operatorname{tg}^2\varphi+1-1)\,d\varphi=2\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi-\frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}(\operatorname{tg}\varphi)'\,d\varphi+\frac{\pi}{3}=$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_{-\pi/3}^{\pi/3} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\Big|_{-\pi/3}^{\pi/3} + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

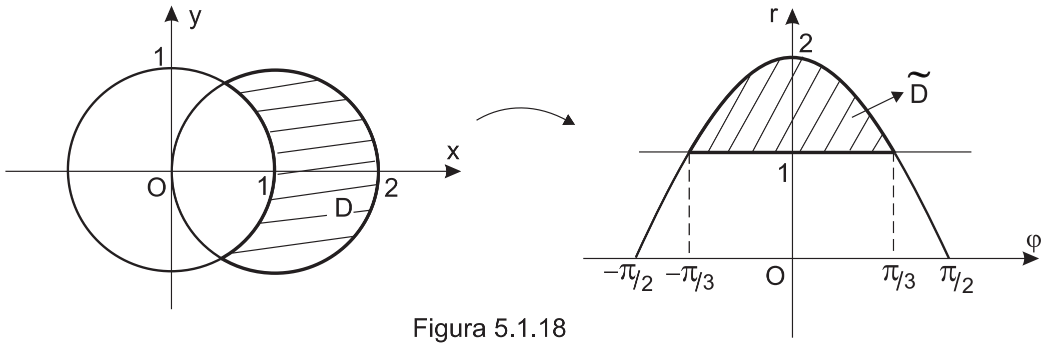


Figura 5.1.18

e) Domeniul compact $D$ este desenat în Figura 5.1.19.

Trecem la coordonate polare $x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ r \geq 0,\ \varphi \in [-\pi,\pi]$, relaţii care introduse în inegalităţile domeniului $D$ ne dau:

$$\begin{cases} r \geq 1 \\ \cos\varphi + \sin\varphi \leq \sqrt{2}/r \\ \cos\varphi - \sin\varphi \leq \sqrt{2}/r \\ r\cos\varphi \geq 1/\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r \geq 1 \\ r\cos\varphi \geq 1/\sqrt{2},\ \ \varphi \in [-\pi/2,\pi/2] \\ \cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{4}\right) \leq 1/r \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \varphi\right) \leq 1/r \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r \geq 1,\ \ \varphi \in [-\pi/2,\pi/2] \\ |\sin\varphi| \leq \cos\varphi \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \varphi\right) \leq 1/r \leq \sqrt{2}\cos\varphi \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \varphi\right) \leq 1/r \leq \sqrt{2}\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right] \\ r \geq \max\left\{1,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2\cos\varphi}\right\} \\ r \leq \min\left\{\dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)},\ \dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)}\right\}. \end{cases}$$

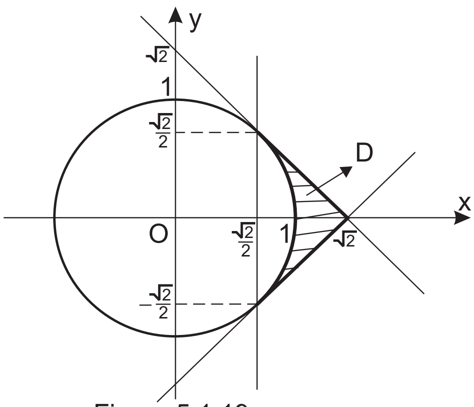


Figura 5.1.19

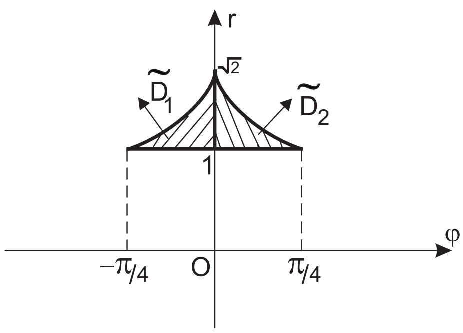


Figura 5.1.20

Deoarece pentru $\varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ avem $\max\left\{1,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2\cos\varphi}\right\} = 1$ obţinem domeniul $\widetilde{D}$:

$$(\widetilde{D}):\begin{cases}\varphi\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]\\ 1\le r\le\min\left\{\dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)},\dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)}\right\}.\end{cases}$$

Deoarece:

$$\min\left\{\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)},\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)}\right\}=\begin{cases}\dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)}, & \text{dacă } \varphi\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\\ \dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)}, & \text{dacă } \varphi\in\left[-\dfrac{\pi}{4},0\right],\end{cases}$$

rezultă că $\widetilde{D}=\widetilde{D}_1\cup\widetilde{D}_2$, unde:

$$(\widetilde{D}_1):\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4}\le\varphi\le 0\\ 1\le r\le\dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)},\end{cases}\qquad(\widetilde{D}_2):\begin{cases}0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}\\ 1\le r\le\dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)},\end{cases}$$

(vezi Figura 5.1.20).

Deducem astfel:

$$I=\iint_{\widetilde{D}}\arccos\frac{r\cos\varphi}{r}\cdot r\,dr\,d\varphi=-\iint_{\widetilde{D}_1}r\cdot\varphi\,dr\,d\varphi+\iint_{\widetilde{D}_2}r\cdot\varphi\,dr\,d\varphi=$$

$$=-\int_{-\pi/4}^{0}\varphi\,d\varphi\int_1^{1/sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)}r\,dr+\int_0^{\pi/4}\varphi\,d\varphi\int_1^{1/cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)}r\,dr=-\int_{-\pi/4}^{0}\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{d\varphi}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)}+$$

$$+\int_0^{\pi/4}\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)}+\int_{-\pi/4}^{0}\frac{\varphi}{2}\,d\varphi-\int_0^{\pi/4}\frac{\varphi}{2}\,d\varphi\overset{\frac{\pi}{4}-\varphi=u}{=}-\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\cdot\frac{1}{\sin^2 u}\,du+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\cdot\frac{1}{\cos^2 u}\,du-\frac{\pi^2}{32}=\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{4}-u\right)(\operatorname{ctg}u)'\,du+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left(\frac{\pi}{4}-u\right)(\operatorname{tg}u)'\,du-$$

$$-\frac{\pi^2}{32}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-u\right)(\operatorname{ctg}u)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}+\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos u}{\sin u}\,du+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-u\right)(\operatorname{tg}u)\Big|_0^{\pi/4}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{\sin u}{\cos u}\,du-$$

$$-\frac{\pi^2}{32}=\frac{1}{2}\ln(\sin u)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}-\frac{1}{2}\ln(\cos u)\Big|_0^{\pi/4}-\frac{\pi^2}{32}=-\frac{\pi^2}{32}+\frac{\ln 2}{2}.$$

f) Trecem la coordonate polare $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Obţinem $a^2\le r^2\le b^2$, $r\cos\varphi\le a\Rightarrow a\le r\le b$, $\cos\varphi\le\dfrac{a}{r}$. Deci:

$$(\widetilde{D}):\begin{cases}a\le r\le b\\ \arccos\dfrac{a}{r}\le\varphi\le 2\pi-\arccos\dfrac{a}{r},\end{cases}\text{ (vezi Figura 5.1.21).}$$

Rezultă:

$$I=\int_a^b\left(\int_{arccos\frac{a}{r}}^{2\pi-\arccos\frac{a}{r}}r\cdot f(r^2)\,d\varphi\right)dr=\int_a^b rf(r^2)\left(2\pi-2\arccos\frac{a}{r}\right)dr.$$

g) Facem schimbarea de variabile $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Rezultă $\dfrac{r^2}{2}\cos^2\varphi+$ $+r^2\sin^2\varphi\le 1\Rightarrow r\le\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sin^2\varphi}}$. Deci $(\widetilde{D}):\begin{cases}0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le r\le\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sin^2\varphi}},\end{cases}$

(vezi Figura 5.1.22).

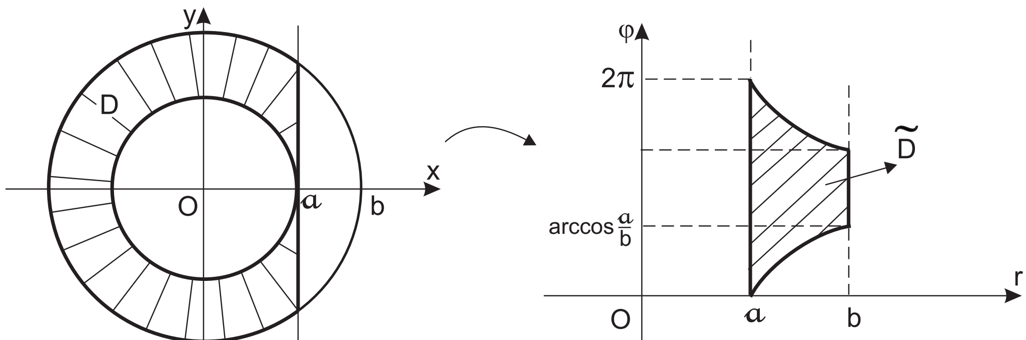


Figura 5.1.21

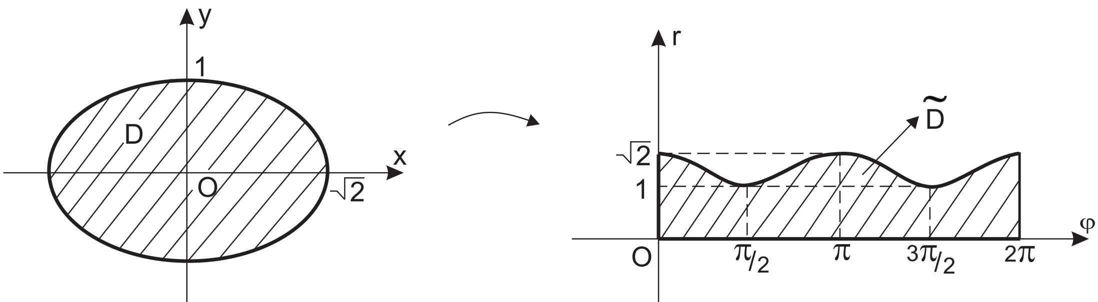


Figura 5.1.22

Rezultă:

$$I=\iint_{\widetilde{D}}\frac{r^2}{\sqrt{4-r^4}}\,r\,dr\,d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}/\sqrt{1+sin^2\varphi}}\frac{r^3}{\sqrt{4-r^4}}\,dr\overset{4-r^4=u}{=}$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left[\frac{(4-r^4)^{1/2}}{1/2}\Big|_0^{\sqrt{2}/\sqrt{1+sin^2\varphi}}\right]d\varphi=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{4-\frac{4}{(1+\sin^2\varphi)^2}}-2\right)d\varphi=$$

$$=-\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{1+2\sin^2\varphi+\sin^4\varphi-1}}{1+\sin^2\varphi}\,d\varphi+2\pi=-2\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{2\sin^2\varphi+\sin^4\varphi}}{1+\sin^2\varphi}\,d\varphi+2\pi=$$

$$=2\pi-4\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{2\sin^2\varphi+\sin^4\varphi}}{1+\sin^2\varphi}\,d\varphi\overset{cos\,\varphi=u}{=}2\pi-4\int_0^1\frac{\sqrt{3-u^2}}{2-u^2}\,du.$$

Notăm $\sqrt{\dfrac{-u+\sqrt{3}}{u+\sqrt{3}}}=t\Rightarrow\sqrt{3-u^2}=t(u+\sqrt{3}),\ u=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3}\,t^2}{t^2+1},\ du=\dfrac{-4\sqrt{3}\,t}{(t^2+1)^2}\,dt.$

Obţinem:

$$I=2\pi-4\int_1^{(\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}}t\left[\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}\,t^2}{t^2+1}+\sqrt{3}\right]\cdot\frac{1}{\left(2-\frac{3(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}\right)}\cdot\frac{-4\sqrt{3}\,t}{(t^2+1)^2}\,dt=$$

$$=2\pi+96\int_{(\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}}^1\frac{t^2}{(t^2+1)(t^4-10t^2+1)}\,dt.$$

Descompunem fracţia de sub semnul integrală de mai sus astfel:

$$\frac{t^2}{(t^2+1)(t^4-10t^2+1)}=\frac{At+B}{t^2+1}+\frac{Ct+D}{t^2-2\sqrt{2}\,t-1}+\frac{Et+F}{t^2+2\sqrt{2}\,t-1}.$$

După identificarea coeficienţilor numărătorilor de mai sus rezultă $A = 0$, $B = -\frac{1}{12}$, $C = \frac{1}{24\sqrt{2}}$, $D = -\frac{1}{24}$, $E = -\frac{1}{24\sqrt{2}}$, $F = -\frac{1}{24}$. Deci:

$$I = 2\pi + 96\left[-\frac{1}{12}\int_{(\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}}^{1}\frac{dt}{t^2+1} + \frac{1}{48\sqrt{2}}\int_{(\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}}^{1}\frac{2(t-\sqrt{2})}{t^2-2\sqrt{2}\,t-1}\,dt-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{48\sqrt{2}}\int_{(\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}}^{1}\frac{2(t+\sqrt{2})}{t^2+2\sqrt{2}\,t-1}\,dt\right] = 2\pi + \left[-8\left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)+\right.$$
$$\left.+\sqrt{2}\ln\left|\frac{t^2-2\sqrt{2}t-1}{t^2+2\sqrt{2}t-1}\right|\Bigg|_{(\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}}^{1}\right] = 2\pi + \left[-2\pi + 8\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\ln 3\right] =$$
$$= 4\operatorname{arctg}\sqrt{2} - \sqrt{2}\ln 3.$$

**4.** Efectuând schimbările de variabile indicate să se calculeze următoarele integrale duble:

a) $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, $(D):\ x^4+y^4 \le 1$; $\begin{cases} x^2 = |r\cos\varphi| \\ y^2 = |r\sin\varphi|. \end{cases}$

b) $\iint_D (x+y)\,dx\,dy$, $(D):\ x^2+y^2 \le x+y$; $\begin{cases} x = 1/2 + r\cos\varphi \\ y = 1/2 + r\sin\varphi. \end{cases}$

c) $\iint_D (|x|+|y|)\,dx\,dy$, $(D):\ |x|+|y| \le 1$; $\begin{cases} x+y = u \\ x-y = v. \end{cases}$

d) $\iint_D x^2y^2\,dx\,dy$, $D$ limitat de $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$, $x, y > 0$; $\begin{cases} xy = u \\ \dfrac{y}{x} = v. \end{cases}$

e) $\iint_D \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^2}$, $D$ limitat de $x^2+y^2-2x = 0$, $x^2+y^2-2y = 0$, $x^2+y^2-4x = 0$, $x^2+y^2-6y = 0$; $\begin{cases} x = \dfrac{u}{u^2+v^2} \\ y = \dfrac{v}{u^2+v^2}. \end{cases}$

f) $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, $D$ este limitat de curba $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$, $t \in [0, 2\pi]$, (cardioida); $\begin{cases} x = u(2\cos v - \cos 2v) \\ y = u(2\sin v - \sin 2v). \end{cases}$

**Rezolvare.** a) Vom descompune domeniul compact $D$ desenat în Figura 5.1.23 în patru subdomenii $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$. Atunci:

$$I = \iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3} + \iint_{D_4}.$$

Pentru $I_1 = \iint_{D_1}$ facem schimbarea de variabile: $\begin{cases} x = \sqrt{r\cos\varphi} \\ y = \sqrt{r\sin\varphi}, \quad (r,\varphi) \in \widetilde{D_1}, \end{cases}$

unde $(\widetilde{D}_1): \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ Determinantul funcţional este $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{\sin 2\varphi}}$.

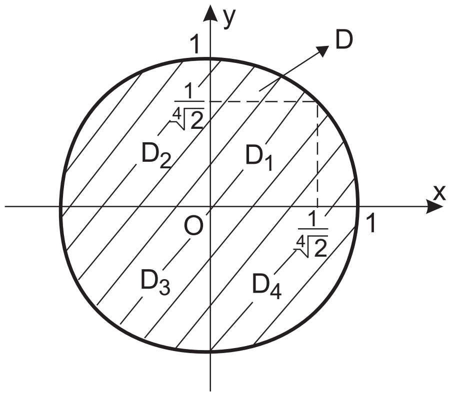


Figura 5.1.23

Rezultă:

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} r(\cos\varphi + \sin\varphi) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{\sin 2\varphi}}\, dr\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{2\sqrt{2}\sqrt{\sin 2\varphi}}\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}\, d\varphi = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}\left(\sqrt{\operatorname{tg}\varphi} + \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}\varphi}}\right) d\varphi \overset{tg\,\varphi = u}{=} \frac{1}{8}\int_0^{\infty}\left(\sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{u}}\right) \times$$

$$\times \frac{du}{1+u^2} \overset{\sqrt{u}=v}{=} \frac{1}{8}\int_0^{\infty}\left(v + \frac{1}{v}\right) \cdot \frac{2v}{1+v^4}\, dv = \frac{1}{4}\int_0^{\infty} \frac{v^2+1}{v^4+1}\, dv.$$

Descompunem fracţia de sub semnul integrală de mai sus în fracţii simple:

$$\frac{v^2+1}{(v^2+\sqrt{2}\,v+1)(v^2-\sqrt{2}\,v+1)} = \frac{Av+B}{v^2+\sqrt{2}\,v+1} + \frac{Cv+D}{v^2-\sqrt{2}\,v+1}.$$

După câteva calcule, obţinem $A = C = 0$, $B = D = \dfrac{1}{2}$. Deci:

$$I_1 = \frac{1}{8}\int_0^{\infty}\frac{dv}{v^2+\sqrt{2}\,v+1} + \frac{1}{8}\int_0^{\infty}\frac{dv}{v^2-\sqrt{2}\,v+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{v+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Bigg|_0^{\infty} +$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{v-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

Pentru $I_2 = \displaystyle\iint_{D_2}$ facem schimbarea de variabile $x = -\sqrt{-r\cos\varphi}$, $y = \sqrt{r\sin\varphi}$, $(r,\varphi) \in \widetilde{D}_2$, unde $(\widetilde{D}_2): \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ \dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi. \end{cases}$ Determinantul funcţional este $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} =$
$= \dfrac{1}{4\sqrt{-\sin\varphi\cos\varphi}}$. Rezultă:

$$I_2 = \int_0^1\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{r(-\cos\varphi + \sin\varphi)}{4\sqrt{-\cos\varphi\sin\varphi}}\, dr\, d\varphi = \frac{1}{8}\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{-\cos\varphi+\sin\varphi}{\sqrt{-\cos\varphi\sin\varphi}}\, d\varphi \overset{\varphi-\frac{\pi}{2}=u}{=}$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin u + \cos u}{\sqrt{\sin u + \cos u}}\, du = I_1 = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

Pentru $I_3 = \displaystyle\iint_{D_3}$ facem schimbarea de variabile $x = -\sqrt{-r\cos\varphi}$, $y = -\sqrt{-r\sin\varphi}$,

$(r,\varphi)\in\widetilde{D}_3$, unde $(\widetilde{D}_3):\begin{cases}0\le r\le 1\\ \pi\le\varphi\le\dfrac{3\pi}{2}.\end{cases}$ Determinantul funcţional este $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=$
$=\dfrac{1}{4\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}}$. Rezultă:

$$I_3=\int_0^1\int_\pi^{3\pi/2}\frac{-r(\cos\varphi+\sin\varphi)}{4\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}}\,dr\,d\varphi=\frac{1}{8}\int_\pi^{3\pi/2}\frac{-(\cos\varphi+\sin\varphi)}{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}\,d\varphi\stackrel{\varphi-\pi=u}{=}$$
$$=\frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin u+\cos u}{\sqrt{\sin u\cos u}}\,du=I_1=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

În sfârşit pentru $I_4=\iint_{D_4}$ facem schimbarea de variabile $x=\sqrt{r\cos\varphi}$, $y=$
$=-\sqrt{-r\sin\varphi}$, $(r,\varphi)\in\widetilde{D}_4$, unde $(\widetilde{D}_4):\begin{cases}0\le r\le 1\\ \dfrac{3\pi}{2}\le\varphi\le 2\pi.\end{cases}$ Determinantul funcţional este $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=\dfrac{1}{4\sqrt{-\cos\varphi\sin\varphi}}$. Rezultă:

$$I_4=\int_0^1\int_{3\pi/2}^{2\pi}\frac{r(\cos\varphi-\sin\varphi)}{4\sqrt{-\cos\varphi\sin\varphi}}\,dr\,d\varphi=\frac{1}{8}\int_{3\pi/2}^{2\pi}\frac{\cos\varphi-\sin\varphi}{\sqrt{-\cos\varphi\sin\varphi}}\,d\varphi\stackrel{\varphi-3\pi/2=u}{=}$$
$$=\frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin u+\cos u}{\sqrt{\sin u\cos u}}\,du=I_1=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

Deci $I=I_1+I_2+I_3+I_4=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.

b) Facem schimbarea de variabile $x=1/2+r\cos\varphi$, $y=1/2+r\sin\varphi$, relaţii care introduse în inegalitatea domeniului $D$ ne dau $(\widetilde{D}):\begin{cases}0\le r\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\le\varphi\le 2\pi,\end{cases}$ (vezi Figura 5.1.24).

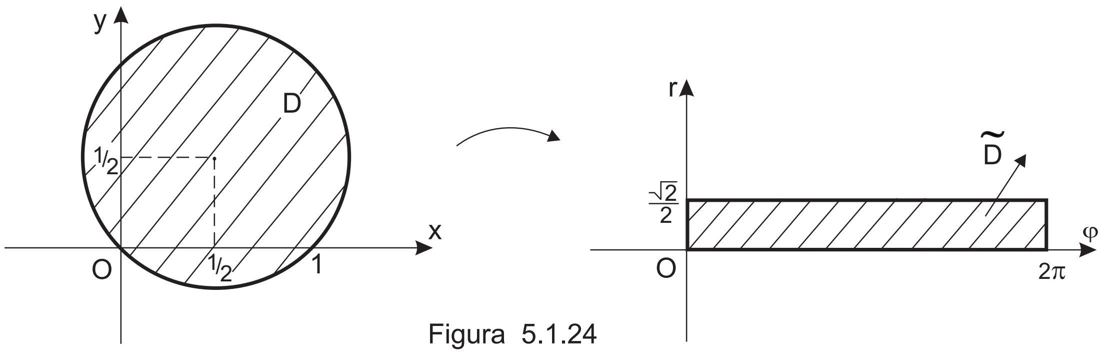


Figura 5.1.24

Determinantul funcţional $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}$ este $r$, deci:

$$I=\int_0^{\sqrt{2}/2}\int_0^{2\pi}[r(\cos\varphi+\sin\varphi)+1]\cdot r\,dr\,d\varphi=\int_0^{\sqrt{2}/2}\int_0^{2\pi}[r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)+r]\,dr\,d\varphi=$$
$$=\frac{r^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{2}/2}\cdot(\sin\varphi-\cos\varphi)\Big|_0^{2\pi}+\frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{2}/2}\cdot 2\pi=\frac{\pi}{2}.$$

c) Descompunem şi aici domeniul compact $D$ în patru subdomenii $D=D_1\cup D_2\cup$ $\cup D_3\cup D_4$ (vezi Figura 5.1.25). Rezultă:

$$I = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3} + \iint_{D_4}.$$

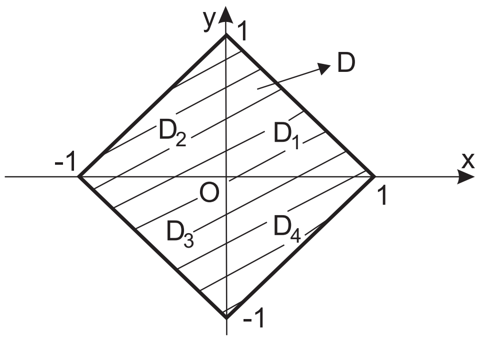

Figura 5.1.25

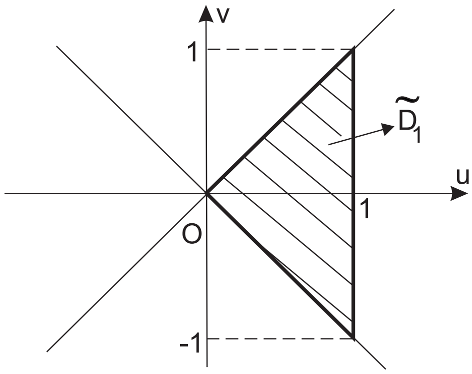

Figura 5.1.26

Pentru $I_1 = \iint_{D_1}$, în urma schimbării de variabile indicată $x + y = u,\ x - y = v$ $\Leftrightarrow x = \dfrac{u+v}{2},\ y = \dfrac{u-v}{2}$ domeniul $D_1$ se transformă în $(\widetilde{D_1}) : \begin{cases} u + v \geq 0 \\ u - v \geq 0,\ \ u \leq 1, \end{cases}$ simplu în raport cu axa $Ov$ (vezi Figura 5.1.26). Obţinem astfel $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = -\dfrac{1}{2}$, iar:

$$I_1 = \iint_{D_1} (x + y)\, dx\, dy = \iint_{\widetilde{D}_1} u \cdot \frac{1}{2}\, du\, dv = \int_0^1 \left( \int_{-u}^{u} \frac{u}{2}\, dv \right) du = \int_0^1 \frac{u}{2} \cdot 2u\, du = \frac{1}{3}.$$

Pentru $I_2 = \iint_{D_2}$ domeniul $D_2$ se transformă în $(\widetilde{D_2}) : \begin{cases} u + v \leq 0 \\ u - v \geq 0,\ \ v \geq -1, \end{cases}$ simplu în raport cu axa $Ou$ (vezi Figura 5.1.27).

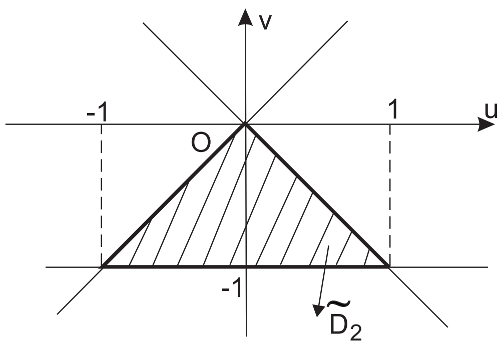

Figura 5.1.27

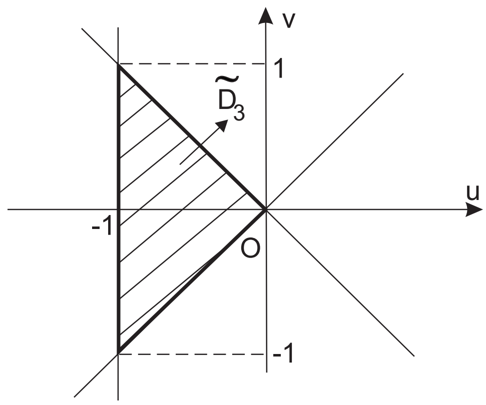

Figura 5.1.28

Rezultă:

$$I_2 = \iint_{D_2} (-x + y)\, dx\, dy = \iint_{\widetilde{D}_2} \frac{1}{2}(-v)\, du\, dv = \int_{-1}^{0} dv \left( \int_{v}^{-v} \frac{1}{2}(-v)\, du \right) =$$
$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} (-v)(-2v)\, dv = \frac{1}{3}.$$

Pentru $I_3 = \iint_{D_3}$ domeniul $D_3$ se transformă în $(\widetilde{D}_3)$ : $\begin{cases} u+v \le 0 \\ u-v \le 0, \ \ u \ge -1, \end{cases}$ simplu în raport cu axa $Ov$ (vezi Figura 5.1.28).

Rezultă:

$$I_3 = \iint_{D_3} (-x-y)\,dx\,dy = \iint_{\widetilde{D}_3} (-u)\frac{1}{2}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} du \int_{u}^{-u} (-u)\,dv =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} (-u)(-2u)\,du = \frac{1}{3}.$$

În sfârşit pentru $I_4 = \iint_{D_4}$ domeniul $D_4$ se transformă în $(\widetilde{D}_4)$ : $\begin{cases} u+v \ge 0 \\ u-v \le 0, \ \ v \le 1, \end{cases}$ simplu în raport cu axa $Ou$ (vezi Figura 5.1.29). Obţinem:

$$I_4 = \iint_{D_4} (x-y)\,dx\,dy = \iint_{\widetilde{D}_4} \frac{v}{2}\,du\,dv = \int_{0}^{1} dv \int_{-v}^{v} \frac{v}{2}\,du = \int_{0}^{1} \frac{v}{2}\cdot 2v\,dv = \frac{1}{3}.$$

Deci $\ I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \dfrac{4}{3}.$

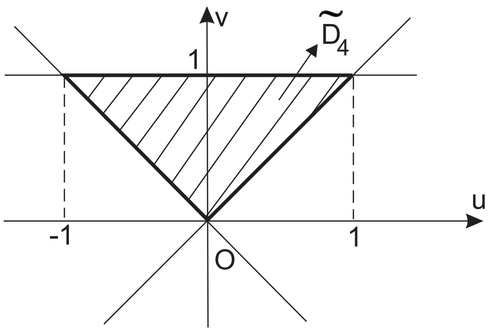

Figura 5.1.29

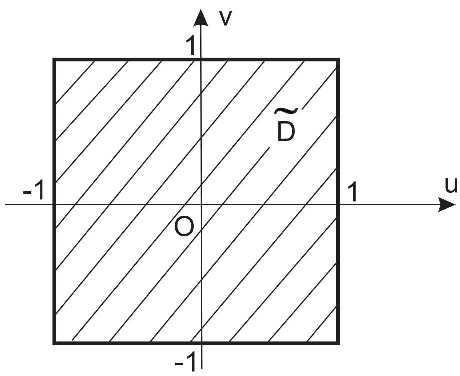

Figura 5.1.30

*Observaţie.* În urma schimbării de variabile $x+y=u, \ x-y=v$ domeniul $(D)$ : $|x|+|y| \le 1$ se transformă în domeniul $(\widetilde{D})$ : $\begin{cases} |u| \le 1 \\ |v| \le 1, \ \ \text{(vezi Figura 5.1.30).} \end{cases}$

d) Domeniul $D$ se transformă în urma schimbării de variabile $xy = u, \ \dfrac{y}{x} = v$ în domeniul $(\widetilde{D})$ : $\begin{cases} 1 \le u \le 2 \\ 1 \le v \le 4, \ \ \text{(vezi Figura 5.1.31).} \end{cases}$

Determinantul funcţional $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \dfrac{1}{2v}$, $\left(x = \sqrt{\dfrac{u}{v}}, \ \ y = \sqrt{uv}\right)$. Rezultă:

$$I = \iint_{\widetilde{D}} u^2 \cdot \frac{1}{2v}\,du\,dv = \int_{1}^{2} du \int_{1}^{4} \frac{u^2}{2v}\,dv = \frac{u^3}{6}\bigg|_1^2 \cdot \ln v\bigg|_1^4 = \frac{7}{3}\ln 2.$$

e) Domeniul $D$ este desenat în Figura 5.1.32. În urma schimbării de variabile $x = \dfrac{u}{u^2+v^2}$, $y = \dfrac{v}{u^2+v^2}$ inegalităţile din definiţia domeniului $D$ ne dau:

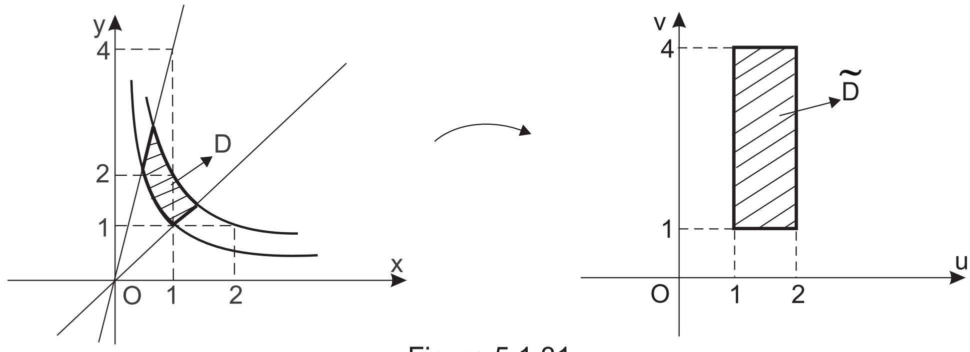


Figura 5.1.31

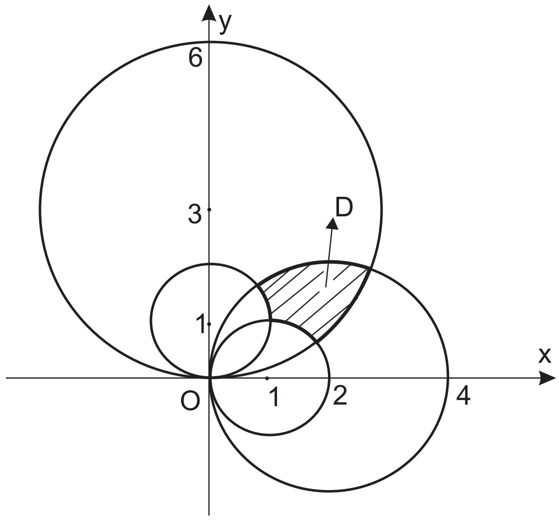


Figura 5.1.32

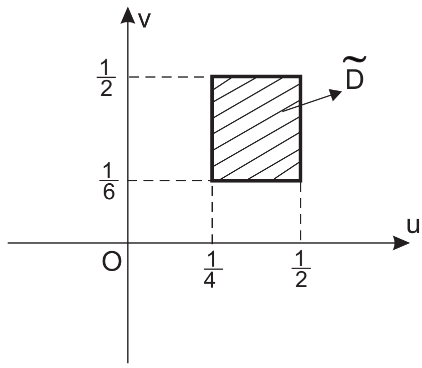


Figura 5.1.33

$$\frac{1}{u^2+v^2}-\frac{2u}{u^2+v^2}\geq 0,\quad \frac{1}{u^2+v^2}-\frac{2v}{u^2+v^2}\geq 0,\quad \frac{1}{u^2+v^2}-\frac{4u}{u^2+v^2}\leq 0,$$
$$\frac{1}{u^2+v^2}-\frac{6v}{u^2+v^2}\leq 0.$$

Obţinem $(\widetilde{D}) : \begin{cases} \dfrac{1}{4}\leq u\leq\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{6}\leq v\leq\dfrac{1}{2}, \end{cases}$ (vezi Figura 5.1.33). Deoarece $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = -\dfrac{1}{(u^2+v^2)^2}$, rezultă:

$$I=\int_{\widetilde{D}}(u^2+v^2)^2\cdot\frac{1}{(u^2+v^2)^2}\,du\,dv=\int_{1/4}^{1/2}\int_{1/6}^{1/2}du\,dv=\frac{1}{12}.$$

f) În urma schimbării de variabile $x=u(2\cos v-\cos 2v)$, $y=u(2\sin v-\sin 2v)$ domeniul $D$ mărginit de cardioidă se transformă în domeniul $(\widetilde{D}) : \begin{cases} 0\leq u\leq 1 \\ 0\leq v\leq 2\pi, \end{cases}$ (vezi Figura 5.1.34). Jacobianul transformării este $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = 6u(1-\cos v)$. Rezultă astfel:

$$I=\iint_{\widetilde{D}} u^2(4\cos^2 v+\cos^2 2v-4\cos v\cos 2v+4\sin^2 v+\sin^2 2v-4\sin v\sin 2v)\times$$

$\times 6u(1-\cos v)\,du\,dv = \iint_{\widetilde{D}} 6u^3(5-4\cos v)(1-\cos v)\,du\,dv = \left(\int_0^1 6u^3\,du\right)\cdot\int_0^{2\pi}(5-$
$-4\cos v)(1-\cos v)\,dv = \dfrac{6}{4}\int_0^{2\pi}[5-9\cos v+2(1+\cos 2v)]\,dv = 21\pi.$

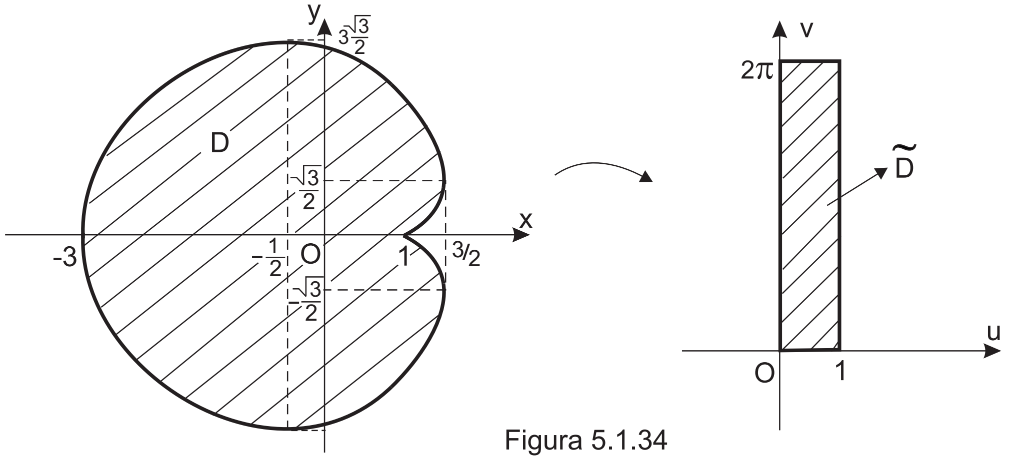

Figura 5.1.34

**5.** Să se calculeze ariile domeniilor compacte limitate de curbele:

a) $y^2 = 2px + p^2,\ y^2 = -2qx + q^2,\ 0 < p < q.$

b) $y^2 = px,\ y^2 = qx,\ x^2 = ay,\ x^2 = by,\ 0 < p < q,\ 0 < a < b.$

c) $(x^2+y^2)^2 = 8a^2xy,\ (x-a)^2+(y-a)^2 = a^2,\ a > 0,\ ((x^2+y^2)^2 \le 8a^2xy,$ $(x-a)^2+(y-a)^2 \le a^2).$

d) $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^4 = \dfrac{x^2}{h^2}+\dfrac{y^2}{k^2},\ x,\ y > 0.$

**Rezolvare.** a) Domeniul $D$ este desenat în Figura 5.1.35.

Avem:

$$A(D) = \iint_D dx\,dy = 2\iint_{D_1} dx\,dy,$$

($D_1$ este simplu în raport cu axa $Ox$). Deci:

$A(D) = 2\int_0^{\sqrt{pq}} dy \int_{(y^2-p^2)/(2p)}^{(-y^2+q^2)/(2q)} dx = 2\int_0^{\sqrt{pq}} \left(\dfrac{-y^2+q^2}{2q} - \dfrac{y^2-p^2}{2p}\right) dy = \left[\dfrac{1}{q}\left(-\dfrac{y^3}{3}+\right.\right.$
$\left.\left.+q^2y\right) - \dfrac{1}{p}\left(\dfrac{y^3}{3}-p^2y\right)\right]\Big|_0^{\sqrt{pq}} = \dfrac{1}{q}\left(\dfrac{-pq\sqrt{pq}}{3}+q^2\sqrt{pq}\right) - \dfrac{1}{p}\left(\dfrac{pq\sqrt{pq}}{3}-p^2\sqrt{pq}\right) =$
$= \dfrac{2}{3}\sqrt{pq}(p+q).$

b) Domeniul $D$ este mărginit de patru parabole (vezi Figura 5.1.36). Facem schimbarea de variabile: $\begin{cases} u = \dfrac{y^2}{x} \\ v = \dfrac{x^2}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{uv^2} \\ y = \sqrt[3]{u^2v}. \end{cases}$

Domeniul $D$ se transformă în domeniul $(\widetilde{D})$ : $\begin{cases} p \le u \le q \\ a \le v \le b. \end{cases}$ Iacobianul transformării

este $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = -\dfrac{1}{3}$. Deci:

$$A(D) = \iint_D dx\,dy = \iint_{\widetilde{D}} \frac{1}{3}\,du\,dv = \int_p^q \int_a^b \frac{1}{3}\,du\,dv = \frac{1}{3}(q-p)(b-a).$$

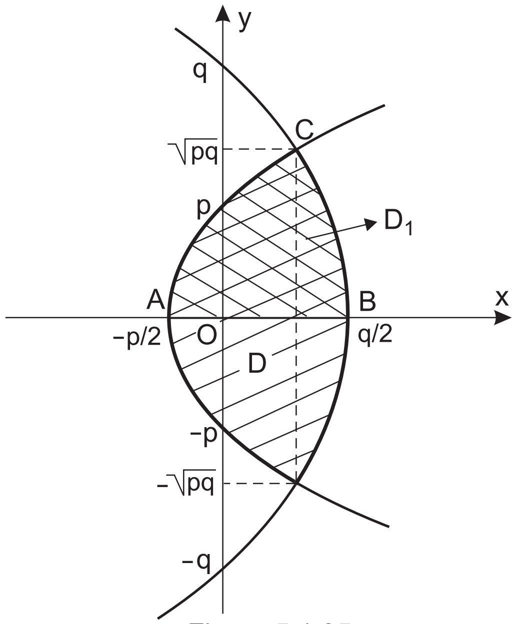

Figura 5.1.35

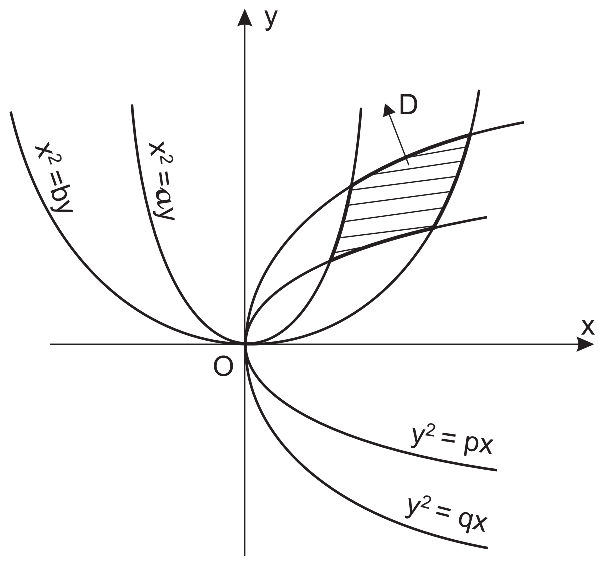

Figura 5.1.36

c) Curba $(x^2+y^2)^2 = 8a^2xy$ este lemniscata cu vârfurile pe bisectoarea întâi (vezi Figura 5.1.37).

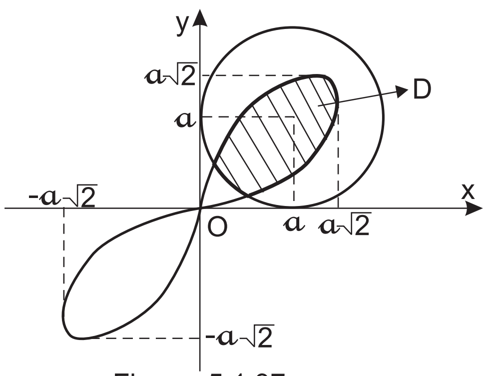

Figura 5.1.37

Pentru a calcula $A(D) = \iint_D dx\,dy$, facem schimbarea de coordonate:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, \quad \varphi \in [0,\pi/2]. \end{cases} \quad \text{Obţinem:} \quad \begin{cases} r^4 \leq 8a^2r^2\cos\varphi\sin\varphi \\ r^2 - 2ar(\cos\varphi + \sin\varphi) + a^2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r \leq 2a\sqrt{\sin 2\varphi} \\ r \geq a(\cos\varphi + \sin\varphi - \sqrt{\sin 2\varphi}) \\ r \leq a(\cos\varphi + \sin\varphi + \sqrt{\sin 2\varphi}). \end{cases}$$

Deoarece $2a\sqrt{\sin 2\varphi} \le a(\cos\varphi + \sin\varphi) + a\sqrt{\sin 2\varphi}$, $\forall\, \varphi \in [0, \pi/2]$, iar $a(\cos\varphi + \sin\varphi - \sqrt{\sin 2\varphi}) \ge 0$, $\forall\, \varphi \in [0, \pi/2]$, rezultă:

$$(\widetilde{D}): \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ r_1(\varphi) = a(\cos\varphi + \sin\varphi - \sqrt{\sin 2\varphi}) \le r \le 2a\sqrt{\sin 2\varphi} = r_2(\varphi). \end{cases}$$

Deci:

$$A(D) = \iint_{\widetilde{D}} r\,dr\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r\,dr = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} [4a^2 \sin 2\varphi - a^2(1 + \sin 2\varphi +$$
$$+ \sin 2\varphi - 2\sqrt{\sin 2\varphi}\,(\cos\varphi + \sin\varphi)]\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} [(4a^2 \sin 2\varphi - a^2(1 + 2\sin 2\varphi)]\,d\varphi +$$
$$+a^2 \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin 2\varphi}\,(\sin\varphi + \cos\varphi)\,d\varphi}_{\sin\varphi = u} = 2a^2 \frac{-\cos 2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/2} - \frac{a^2}{2}(\varphi - \cos 2\varphi)\Big|_0^{\pi/2} +$$
$$+a^2 \int_0^1 \sqrt{2u\sqrt{1-u^2}} \cdot u \cdot \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} + a^2 \int_0^1 \sqrt{2u\sqrt{1-u^2}} \cdot \sqrt{1-u^2} \cdot \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = a^2 - \frac{a^2\pi}{4} +$$
$$+a^2\sqrt{2}\int_0^1 u^{3/2}(1-u^2)^{-1/4}\,du + a^2\sqrt{2}\int_0^1 u^{1/2}(1-u^2)^{1/4}\,du \overset{u^2=v}{=} a^2 - \frac{a^2\pi}{4} +$$
$$+a^2\sqrt{2}\int_0^1 v^{3/4}(1-v)^{-1/4} \frac{dv}{2\sqrt{v}} + a^2\sqrt{2}\int_0^1 v^{1/4}(1-v)^{1/4} \frac{dv}{2\sqrt{v}} = a^2 - \frac{a^2\pi}{4} +$$
$$+\frac{a^2\sqrt{2}}{2}\int_0^1 v^{1/4}(1-v)^{-1/4}\,dv + \frac{a^2\sqrt{2}}{2}\int_0^1 v^{-1/4}(1-v)^{1/4}\,dv = a^2 - \frac{a^2\pi}{4} + \frac{a^2}{\sqrt{2}} B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) +$$
$$+\frac{a^2}{\sqrt{2}} B\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) = a^2 - \frac{a^2\pi}{4} + a^2\sqrt{2} B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) = a^2 - \frac{a^2\pi}{4} + a^2\sqrt{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)} =$$
$$= a^2 - \frac{a^2\pi}{4} + a^2\sqrt{2} \cdot \frac{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{1} = a^2 - \frac{a^2\pi}{4} + \frac{a^2\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = a^2\left(1 + \frac{\pi}{4}\right).$$

d) Pentru a calcula aria lui $D$, $A(D) = \iint_D dx\,dy$ facem schimbarea de variabile: $\begin{cases} x = ar\cos^2\varphi \\ y = br\sin^2\varphi. \end{cases}$ Aceste relaţii introduse în inegalitatea care defineşte domeniul $D$ ne dau $r^4 \le \dfrac{a^2r^2}{h^2}\cos^4\varphi + \dfrac{b^2r^2}{k^2}\sin^4\varphi \Rightarrow r^2 \le \dfrac{a^2}{h^2}\cos^4\varphi + \dfrac{b^2}{k^2}\sin^4\varphi$. Obţinem noul domeniu

$$(\widetilde{D}): \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ 0 \le r \le \sqrt{\dfrac{a^2}{h^2}\cos^4\varphi + \dfrac{b^2}{k^2}\sin^4\varphi} = r_1(\varphi). \end{cases}$$

Deoarece $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = 2abr\cos\varphi\sin\varphi$, rezultă:

$$A(D) = \iint_{\widetilde{D}} 2abr\cos\varphi\sin\varphi\,dr\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{r_1(\varphi)} 2abr\cos\varphi\sin\varphi\,dr =$$
$$= \int_0^{\pi/2} 2ab\cos\varphi\sin\varphi \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{h^2}\cos^4\varphi + \frac{b^2}{k^2}\sin^4\varphi\right)d\varphi = \frac{a^3b}{h^2}\left(-\frac{\cos^6\varphi}{6}\right)\Big|_0^{\pi/2} +$$
$$+\frac{ab^3}{k^2}\left(\frac{\sin^6\varphi}{6}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right).$$

**6.** Folosind integrala dublă să se calculeze volumele corpurilor limitate de următoarele suprafeţe:

a) $z = 1 + x + y,\ \ z = 0,\ \ x + y = 1,\ \ x = 0,\ \ y = 0.$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 4a^2 = 0,\ \ x^2 + y^2 - 2ax = 0.$

c) $z = \cos x \cdot \cos y,\ \ z = 0,\ \ |x + y| \le \dfrac{\pi}{2},\ \ |x - y| \le \dfrac{\pi}{2}.$

d) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1,\ \ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2},\ \ z > 0,\ \ \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le \dfrac{z^2}{c^2}\right).$

e) $z = x^2 + y^2,\ \ xy = a^2,\ \ xy = 2a^2,\ \ y = \dfrac{x}{2},\ \ y = 2x.$

**Rezolvare.** a) Corpul limitat de suprafeţele indicate în enunţ este desenat în Figura 5.1.38. Avem:

$$V = \iint_D (1 + x + y)\,dx\,dy, \text{ unde } (D) : \begin{cases} x + y \le 1 \\ x,\ y \ge 0 \ \text{(vezi Figura 5.1.39).} \end{cases}$$

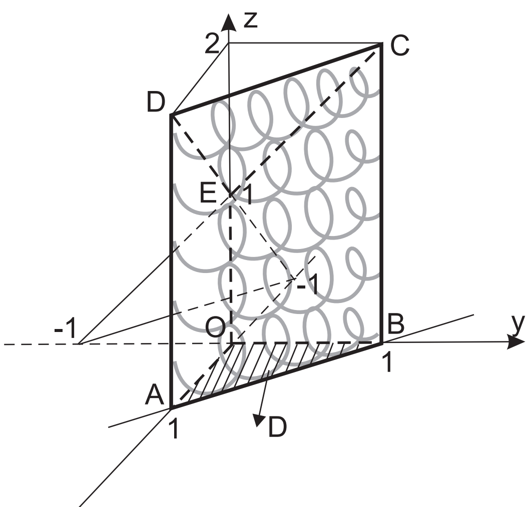

Figura 5.1.38

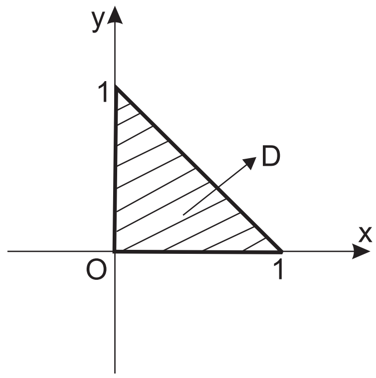

Figura 5.1.39

Rezultă astfel:

$$V = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1 + x + y)\,dy\right) dx = \int_0^1 \left(y + xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 [1 - x +$$
$$+ x - x^2 + \frac{(1-x)^2}{2}\Big]\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{6}(x-1)^3\right]\Big|_0^1 = \frac{5}{6}.$$

b) Corpul limitat de suprafeţele date este $OABCDE$, desenat în Figura 5.1.40. Avem:

$$V = 2\iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy,$$

deci $V$ este de două ori volumul corpului limitat de planul $Oxy$, sferă şi cilindru. Domeniul $D$ este $x^2 + y^2 - 2ax \le 0$, (vezi Figura 5.1.41).

Pentru a calcula integrala dublă de mai sus facem schimbarea de variabile $x = 2ar\cos\varphi$, $y = 2ar\sin\varphi$. Introducând pe $x$ şi $y$ în inegalitatea domeniului $D$ obţinem:

$$4a^2r^2\cos^2\varphi + 4a^2r^2\sin^2\varphi - 4a^2r\cos\varphi \le 0 \Rightarrow 4a^2r^2 \le 4a^2\cos\varphi \Rightarrow r \le \cos\varphi,$$

cu condiţia $\cos\varphi \geq 0 \Rightarrow \varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. Astfel în urma schimbării de variabile de mai sus, domeniul $D$ se transformă în domeniul $(D')$ : $\begin{cases} 0 \leq r \leq \cos\varphi \\ \varphi \in [0, \pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi]. \end{cases}$

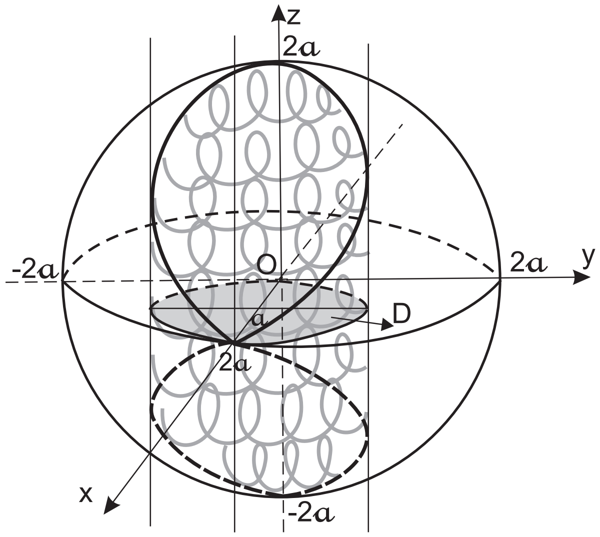

Figura 5.1.40

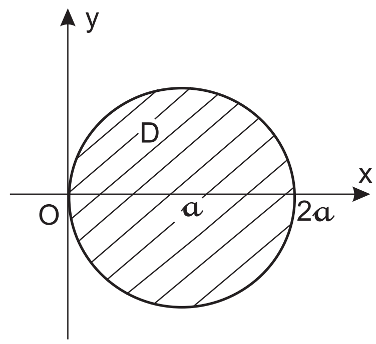

Figura 5.1.41

Obţinem astfel:

$$V = 2\iint_{D'} \sqrt{4a^2 - 4a^2r^2} \cdot 4a^2 r\, dr\, d\varphi = 16a^3 \left(\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\varphi} r\sqrt{1-r^2}\, dr\, d\varphi + \right.$$
$$\left. + \int_{3\pi/2}^{2\pi}\int_0^{\cos\varphi} r\sqrt{1-r^2}\, dr\, d\varphi\right) = 32a^3 \int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\varphi} r\sqrt{1-r^2}\, dr\, d\varphi =$$
$$= 32a^3 \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-r^2)^{3/2}}{3/2}\Big|_{r=0}^{r=\cos\varphi}\right] d\varphi = \frac{32}{3}a^3 \int_0^{\pi/2} (1-\sin^3\varphi)\, d\varphi = \frac{32}{3}a^3 \left(\varphi + \cos\varphi - \right.$$
$$\left. - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{16a^3}{9}(3\pi - 4).$$

c) Avem $V = \iint_D z(x,y)\, dx\, dy$, unde $z(x,y) = \cos x \cdot \cos y$, iar $(D)$ : $\begin{cases} |x+y| \leq \pi/2 \\ |x-y| \leq \pi/2, \end{cases}$ (vezi Figura 5.1.42). Pentru a calcula integrala dublă de mai sus facem schimbarea de variabile $\begin{cases} x+y = u \\ x-y = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2}. \end{cases}$ Obţinem domeniul $(\widetilde{D})$ : $\begin{cases} -\pi/2 \leq u \leq \pi/2 \\ -\pi/2 \leq v \leq \pi/2. \end{cases}$

Deoarece $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = -\dfrac{1}{2}$, rezultă că: $V = \iint_{\widetilde{D}} \left(\cos\dfrac{u+v}{2} \cdot \cos\dfrac{u-v}{2}\right) \dfrac{1}{2}\, du\, dv =$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos u + \cos v}{2}\, du\, dv = \frac{1}{4}\left(\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos u\, du + \pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos v\, dv\right) = \pi.$$

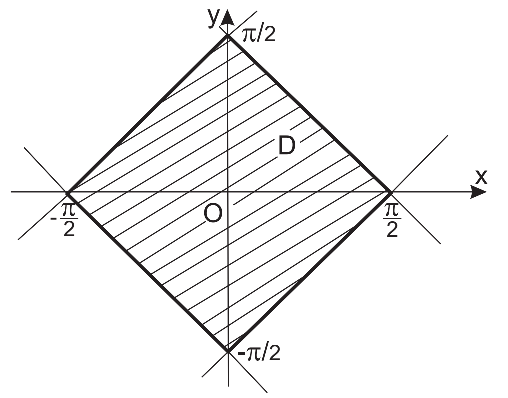


Figura 5.1.42

d) Corpul limitat de suprafeţele din enunţ (elipsoid şi con) este desenat în Figura 5.1.43. Avem $V = V_1 - V_2$, unde $V_1$ este volumul corpului limitat de elipsoid şi care se proiectează pe planul $Oxy$ în $D$, iar $V_2$ este volumul corpului limitat de con şi care se proiectează pe planul $Oxy$ în $D$, unde $(D):\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le \dfrac{1}{2}$. Rezultă astfel:

$$V = \iint_D \left( c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \right) dx\, dy.$$

Facem schimbarea de variabile $\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi, \quad (r,\varphi) \in \widetilde{D}, \end{cases}$ unde $(\widetilde{D}):\ \begin{cases} 0 \le r \le \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$

Obţinem:

$$V = \iint_{\widetilde{D}} (c\sqrt{1-r^2} - cr)abr\, dr\, d\varphi = abc\int_0^{1/\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} (\sqrt{1-r^2} - r)r\, dr\, d\varphi =$$

$$= 2\pi abc\int_0^{1/\sqrt{2}} (r\sqrt{1-r^2} - r^2)\, dr = 2\pi abc\left(-\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2} - \frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{\pi abc}{3}(2 - \sqrt{2}).$$

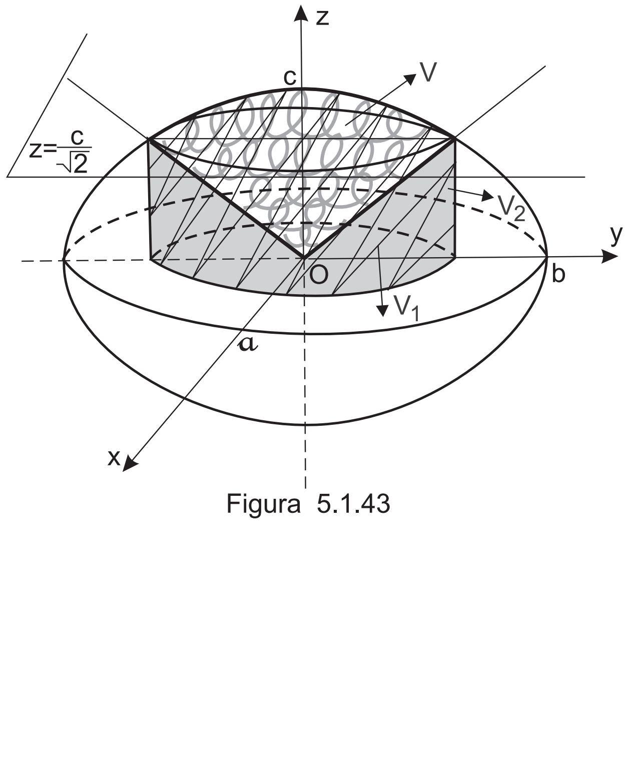


Figura 5.1.43

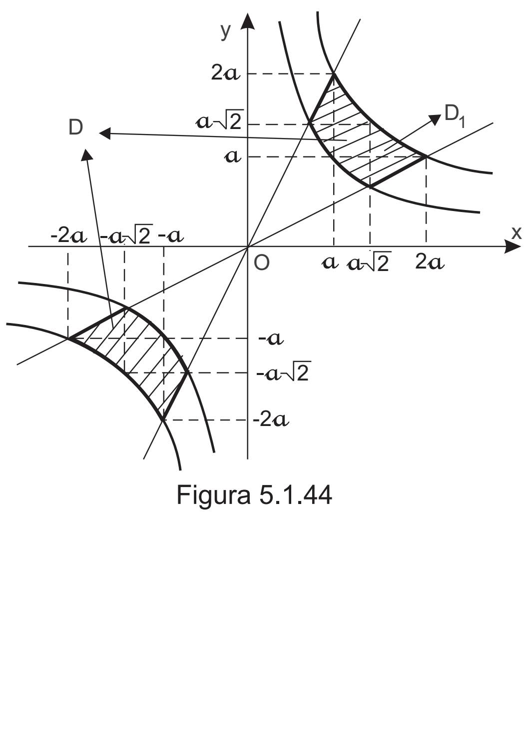


Figura 5.1.44

e) Suprafaţa de sus a corpului este $z = x^2 + y^2$ (paraboloidul eliptic), iar domeniul $D$ din planul $Oxy$ este limitat de curbele $xy = a^2,\ xy = 2a^2,\ y = \dfrac{x}{2},\ y = 2x$ (vezi Figura 5.1.44). Avem:

$$V = 2\iint_{D_1} (x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

Facem schimbarea de variabile $\begin{cases} xy = u \\ \dfrac{y}{x} = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{u/v} \\ y = \sqrt{uv}. \end{cases}$ Obţinem domeniul

$$(\widetilde{D}) : \begin{cases} a^2 \le u \le 2a^2 \\ 1/2 \le v \le 2. \end{cases}$$

Determinantul funcţional fiind $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \dfrac{1}{2v}$, rezultă:

$$V = 2\int_{a^2}^{2a^2} du \int_{1/2}^{2} \left(\frac{u}{v} + uv\right) \cdot \frac{1}{2v}\, dv = \int_{a^2}^{2a^2} du \int_{1/2}^{2} \left(\frac{u}{v^2} + u\right) dv = \int_{a^2}^{2a^2} \Big(-\frac{u}{v}+$$
$$+uv)\Big|_{v=\frac{1}{2}}^{v=2} du = \int_{a^2}^{2a^2} \left(-\frac{u}{2} + 2u + 2u - \frac{u}{2}\right) du = \frac{9a^4}{2}.$$

**7.** Să se calculeze masa şi coordonatele centrelor de greutate ale plăcilor omogene ($\varrho \equiv \varrho_0$) limitate de următoarele curbe:

a) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},\ x > 0,\ y > 0$; b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},\ x = 0,\ y = 0$;

c) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi,\ y = 0$.

**Rezolvare.** a) Avem $M = \varrho_0 \iint_D dx\, dy = \varrho_0 \cdot A(D)$, unde $D$ este domeniul din primul cadran mărginit de astroidă (vezi Figura 5.1.45). Pentru a calcula integrala dublă de mai sus facem schimbarea de variabile $\begin{cases} x = r\cos^3\varphi \\ y = r\sin^3\varphi,\ (r,\varphi) \in \widetilde{D}, \end{cases}$ unde

$$(\widetilde{D}) : \begin{cases} 0 \le r \le a \\ 0 \le \varphi \le \pi/2. \end{cases}$$

Deoarece $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = 3r\sin^2\varphi\cos^2\varphi$, rezultă:

$$M = \varrho_0 \iint_{\widetilde{D}} \frac{3r}{4}\sin^2 2\varphi\, dr\, d\varphi = \varrho_0 \int_0^a \int_0^{\pi/2} \frac{3r}{4}\sin^2 2\varphi\, dr\, d\varphi = \varrho_0 \frac{3r^2}{8}\Big|_0^a \times$$
$$\times \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2}\, d\varphi = \varrho_0 \frac{3a^2}{16}\left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3a^2\pi\varrho_0}{32}.$$

De aici deducem că aria domeniului mărginit de astroidă este $\dfrac{3a^2\pi}{8}$.

Coordonatele centrului de greutate sunt:

$$x_0 = \frac{1}{M}\iint_D x\varrho_0\, dx\, dy = \frac{1}{M}\iint_{\widetilde{D}} \varrho_0 r\cos^3\varphi \cdot 3r\sin^2\varphi\cos^2\varphi\, dr\, d\varphi = \frac{3}{M}\int_0^a \varrho_0 r^2\, dr \times$$
$$\times \int_0^{\pi/2} (\sin\varphi)' \sin^2\varphi(1 - 2\sin^2\varphi + \sin^4\varphi)\, d\varphi = \frac{3a^3\varrho_0}{3M}\left(\frac{\sin^3\varphi}{3} - \frac{2}{5}\sin^5\varphi + \frac{\sin^7\varphi}{7}\right)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$= \dfrac{8a^3\varrho_0}{105\,M} = \dfrac{256\,a}{315\,\pi}$, iar:

$$y_0 = \frac{1}{M}\iint_D y\varrho_0\,dx\,dy = \frac{1}{M}\iint_{\widetilde{D}} \varrho r\sin^3\varphi\cdot 3r\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,dr\,d\varphi = \frac{1}{M}\varrho_0\frac{3r^3}{3}\Big|_0^a\times$$
$$\times\int_0^{\pi/2}(-\cos\varphi)'\cos^2\varphi(1-2\cos^2\varphi+\cos^4\varphi)\,d\varphi = \frac{256\,a}{315\,\pi}.$$

Deci $x_0 = y_0 = \dfrac{256\,a}{315\,\pi}$.

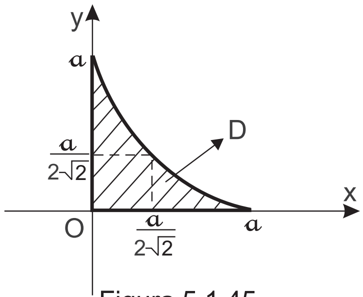

Figura 5.1.45

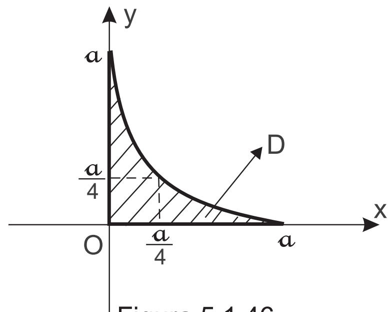

Figura 5.1.46

b) Avem $M = \varrho_0\displaystyle\iint_D dx\,dy$, unde $D$ este desenat în Figura 5.1.46. Facem schimbarea de variabile $\begin{cases} x = r\cos^4\varphi \\ y = r\sin^4\varphi, \quad (r,\varphi)\in\widetilde{D}, \end{cases}$ unde $(\widetilde{D}) : \begin{cases} 0\le r\le a \\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Deoarece $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = 4r\sin^3\varphi\cos^3\varphi$, rezultă:

$$M = \varrho_0\int_0^a 4r\,dr\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi = \varrho_0\,2r^2\Big|_0^a\cdot\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^3 2\varphi}{8}\,d\varphi = \varrho_0\cdot\frac{a^2}{4}\int_0^{\pi/2}\sin 2\varphi(1-$$
$$-\cos^2 2\varphi)\,d\varphi = -\frac{\varrho_0 a^2}{8}\int_0^{\pi/2}(\cos 2\varphi)'(1-\cos^2 2\varphi)\,d\varphi = -\frac{a^2\varrho_0}{8}\left(\cos 2\varphi - \frac{\cos^3 2\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2} =$$
$$= \frac{a^2\varrho_0}{6}.$$

Coordonatele centrului de greutate sunt:

$$x_0 = \frac{1}{M}\varrho_0\iint_D x\,dx\,dy = \frac{\varrho_0}{M}\iint_{\widetilde{D}} r\cos^4\varphi\cdot 4r\sin^3\varphi\cos^3\varphi\,dr\,d\varphi = \frac{\varrho_0}{M}\int_0^a 4r^2\,dr\times$$
$$\times\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\cos^7\varphi\,d\varphi = -\frac{4a^3\varrho_0}{3M}\int_0^{\pi/2}(\cos\varphi)'(1-\cos^2\varphi)\cos^7\varphi\,d\varphi = -\frac{4a^3\varrho_0}{3M}\left(\frac{\cos^8\varphi}{8}-\right.$$
$$\left.-\frac{\cos^{10}\varphi}{10}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{a^3\varrho}{30M} = \frac{a}{5},\ \text{iar:}$$

$$y_0 = \frac{1}{M}\varrho_0\iint_D y\,dx\,dy = \frac{\varrho_0}{M}\iint_{\widetilde{D}} r\sin^4\varphi\cdot 4r\sin^3\varphi\cos^3\varphi\,dr\,d\varphi = \frac{\varrho_0}{M}\int_0^a 4r^2\,dr\times$$
$$\times\int_0^{\pi/2}\sin^7\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi = \frac{a}{5}.$$

Deci $x_0 = y_0 = \dfrac{a}{5}$.

c) Domeniul $D$ este limitat de prima buclă a cicloidei (vezi Figura 5.1.47). Considerând pe $D$ simplu în raport cu axa $Oy$ avem:

$$M = \varrho_0 \iint_D dx\,dy = \varrho_0 \int_0^{2\pi a}\int_0^{y(x)} dx\,dy = \varrho_0 \int_0^{2\pi a} y(x)\,dx.$$

Facem schimbarea de variabilă $x = a(t - \sin t) \Rightarrow y = a(1 - \cos t),\ \ dx = a(1 - \cos t)\,dt$. Deci:

$$M = \varrho_0 \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t)\,dt = \varrho_0 a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt = \varrho_0 a^2 \Big(t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\Big)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi \varrho_0 a^2.$$

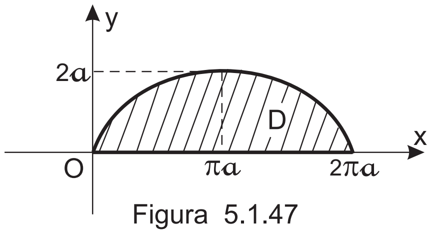


Figura 5.1.47

De aici deducem că aria domeniului mărginit de cicloidă şi de axa $Ox$ este $3\pi a^2$.

Apoi coordonatele centrului de greutate sunt:

$$x_0 = \frac{1}{M}\varrho_0 \iint_D x\,dx\,dy = \frac{\varrho_0}{M}\int_0^{2\pi a} x \int_0^{y(x)} dy = \frac{\varrho_0}{M}\int_0^{2\pi a} x \cdot y(x)\,dx =$$

$$= \frac{\varrho_0}{M}\int_0^{2\pi} a(t - \sin t) \cdot a^2(1 - \cos t)^2\,dt = \frac{\varrho_0 a^3}{M}\int_0^{2\pi}(t - \sin t)(1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt =$$

$$= \frac{\varrho_0 a^3}{M}\left(\frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} t\cos t\,dt + \int_0^{2\pi} t\cos^2 t\,dt + \left(\cos t - \cos^2 t + \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Big|_0^{2\pi}\right) =$$

$$= \frac{\varrho_0 a^3}{M}\left(2\pi^2 - 2t\sin t\Big|_0^{2\pi} - 2\cos t\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} t \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt\right) = \frac{3\varrho_0 a^3 \pi^2}{M} = a\pi,\ \text{ iar:}$$

$$y_0 = \frac{1}{M}\varrho_0 \iint_D y\,dx\,dy = \frac{\varrho_0}{M}\int_0^{2\pi a} dx \int_0^{y(x)} y\,dy = \frac{\varrho_0}{M}\int_0^{2\pi a}\frac{y^2(x)}{2}\,dx =$$

$$= \frac{\varrho_0}{2M}\int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 \cdot a(1 - \cos t)\,dt = \frac{\varrho_0 a^3}{2M}\int_0^{2\pi}(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\,dt =$$

$$= \frac{\varrho_0 a^3}{2M}\left[t - 3\sin t + \frac{3}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) - \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right)\right]\Big|_0^{2\pi} = \frac{5\pi\varrho_0 a^3}{2M} = \frac{5a}{6}.$$

Deci $x_0 = a\pi,\ \ y_0 = \dfrac{5a}{6}$.

**8.** Să se calculeze momentele de inerţie $I_x$ şi $I_y$ în raport cu axele de coordonate $Ox$ şi $Oy$ ale plăcii omogene ($\varrho_0 = 1$) limitată de curbele:

$$xy = a^2,\ \ xy = 2a^2,\ \ x = 2y,\ \ 2x = y,\ \ x > 0,\ \ y > 0.$$

**Rezolvare.** Avem:

$$I_x = \iint_{D_1} \varrho_0 y^2\,dx\,dy = \iint_{D_1} y^2\,dx\,dy, \quad I_y = \iint_{D_1} \varrho_0 x^2\,dx\,dy = \iint_{D_1} x^2\,dx\,dy,$$

unde $D_1$ este domeniul desenat în Figura 5.1.44. Pentru a calcula integralele de mai sus facem schimbarea de variabile $\begin{cases} xy = u \\ y/x = v,\ \ (u,v) \in \widetilde{D}, \end{cases}$ unde $(\widetilde{D}) : \begin{cases} a^2 \le u \le 2a^2 \\ 1/2 \le v \le 2. \end{cases}$

Determinantul funcţional fiind $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \dfrac{1}{2v}$, rezultă:

$$I_x = \iint_{\widetilde{D}} uv \cdot \frac{1}{2v}\, du\, dv = \int_{a^2}^{2a^2} \frac{u}{2}\, du \int_{1/2}^{2} dv = \left.\frac{u^2}{4}\right|_{a^2}^{2a^2} \cdot \left. v\right|_{1/2}^{2} = \frac{9a^4}{8},$$

$$I_y = \iint_{\widetilde{D}} \frac{u}{v} \cdot \frac{1}{2v}\, du\, dv = \int_{a^2}^{2a^2} \frac{u}{2}\, du \cdot \int_{1/2}^{2} \frac{1}{v^2}\, dv = \left.\frac{u^2}{4}\right|_{a^2}^{2a^2} \cdot \left.\left(-\frac{1}{v}\right)\right|_{1/2}^{2} = \frac{9a^4}{8}.$$

Deci $I_x = I_y = \dfrac{9a^4}{8}$.

**9.** Aplicând formula lui Green să se calculeze următoarele integrale curbilinii:

a) $I = \displaystyle\int_\Gamma -y^3\, dx + x^3\, dy$, unde $\Gamma$ este cercul $x^2 + y^2 = 1$ parcurs în sens direct trigonometric.

b) $I = \displaystyle\int_\Gamma e^x[(1 - \cos y)\, dx - (y - \sin y)\, dy]$, unde $\Gamma$ este conturul parcurs în sens direct trigonometric, care mărgineşte domeniul compact $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \sin x$.

**Rezolvare.** a) Funcţiile $P(x,y) = -y^3$, $Q(x,y) = x^3$ sunt continue cu derivate parţiale continue pe $D$ şi $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -3y^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2$, unde $(D):\ x^2 + y^2 \le 1$, (vezi Figura 5.1.48).

Domeniul $D$ este simplu în raport cu axa $Ox$ şi cu axa $Oy$. Rezultă astfel conform formulei lui Green că:

$$I = \int_\Gamma P\, dx + Q\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_D (3x^2 + 3y^2)\, dx\, dy = 3 \iint_{\widetilde{D}} r^3\, dr\, d\varphi,$$

$\left(\text{am făcut schimbarea de variabile } \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi,\ (r,\varphi) \in \widetilde{D}, \end{cases} \text{ unde } (\widetilde{D}) : \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}\right)$

Obţinem:

$$I = 3\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3\, dr\, d\varphi = 3\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1 \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}.$$

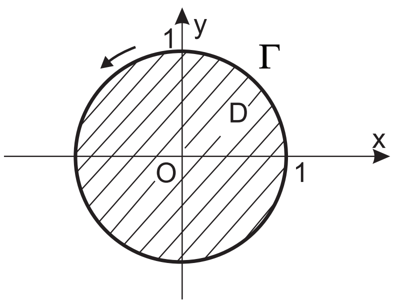

Figura 5.1.48

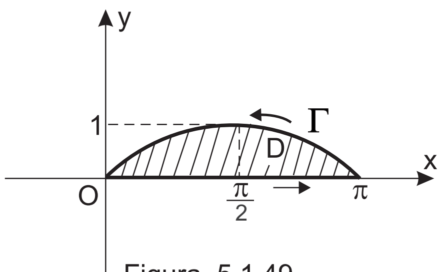

Figura 5.1.49

b) Funcţiile $P(x,y) = e^x(1 - \cos y)$, $Q(x,y) = e^x(\sin y - y)$ sunt continue cu derivatele parţiale $\dfrac{\partial P}{\partial y} = e^x \sin y$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = e^x(\sin y - y)$ continue pe $D$ (vezi Figura 5.1.49), unde $(D)$ : $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \sin x$.

Conform formulei lui Green obţinem:

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_D e^x(\sin y - y - \sin y)\, dx\, dy = \iint_D (-e^x y)\, dx\, dy =$$

$= \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} (-e^x y)\, dy = \int_0^\pi (-e^x) \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sin x} dx = -\int_0^\pi \frac{e^x}{2} \cdot \sin^2 x\, dx = -\frac{1}{4}\int_0^\pi e^x(1-$
$-\cos 2x)\, dx = -\frac{1}{4}e^x\Big|_0^\pi + \frac{1}{4}\int_0^\pi e^x \cos 2x\, dx.$

Calculăm integrala $I_1 = \int_0^\pi e^x \cos 2x\, dx = e^x \cos 2x\Big|_0^\pi + 2\int_0^\pi e^x \sin 2x\, dx = e^\pi - 1 +$
$+ 2e^x \sin 2x\Big|_0^\pi - 4\int_0^\pi e^x \cos 2x\, dx = e^\pi - 1 - 4I_1$. Deci:

$$I_1 = \frac{e^\pi - 1}{5}, \quad \text{iar} \quad I = -\frac{e^\pi}{4} + \frac{1}{4} + \frac{e^\pi - 1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1 - e^\pi}{5}.$$

**10.** Să se calculeze integrala:

$$I = \iint_D (4x - 3 - x^2 - y^2)\, dx\, dy,$$

unde $(D):\ x^2 + y^2 - 4x + 3 \leq 0$. Să se indice apoi o posibilitate de a calcula integrala dublă cu formula lui Green.

**Rezolvare.** Domeniul compact $D$ este desenat în Figura 5.1.50. Pentru a calcula integrala dublă facem schimbarea de variabile $x = 2 + r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ (r, \varphi) \in \widetilde{D}$, unde $(\widetilde{D}):\ 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Deoarece $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$, rezultă $I = \iint_{\widetilde{D}} (1 - r^2) \cdot r\, dr\, d\varphi = 2\pi \int_0^1 (r - r^3)\, dr = \dfrac{\pi}{2}$.

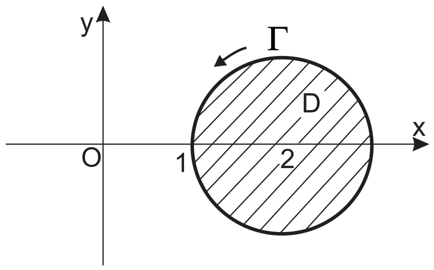

Figura 5.1.50

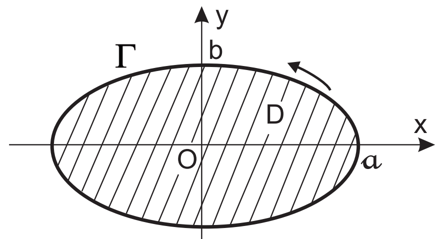

Figura 5.1.51

Folosind formula lui Green avem: $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 4x - 3 - x^2 - y^2$.

Vom identifica $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 4x - 3,\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2$. Atunci $Q(x, y) = 2x^2 - 3x + \varphi_1(y)$, $P(x, y) = x^2 y + \dfrac{y^3}{3} + \varphi_2(x)$. Funcţiile $\varphi_1$ şi $\varphi_2$ le putem lua egale cu zero deoarece $\varphi_2(x)\, dx + \varphi_1(y)\, dy$ este o diferenţială totală şi atunci integrala ei pe un contur închis (cercul $\Gamma$ care mărgineşte pe $D$) este zero. Atunci:

$$I = \int_\Gamma \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right) dx + (2x^2 - 3x)\, dy,$$

$\Gamma$ fiind cercul de ecuaţie $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$, parcurs în sens direct trigonometric. Avem $(\Gamma):\ x = 2 + \cos t,\ y = \sin t,\ t \in [0, 2\pi]$ şi:

$$I = \int_0^{2\pi} \left\{ \left[(2 + \cos t)^2 \sin t + \frac{\sin^3 t}{3}\right] \cdot (-\sin t) + [2(2 + \cos t)^2 - 3(2 + \cos t)] \cos t \right\} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ -4\sin^2 t - 4\sin^2 t\cos t - \frac{\sin^2 2t}{4} - \frac{(1-\cos 2t)^2}{12} + 8\cos t + 8\cos^2 t + 2\cos^3 t - \right.$$
$$\left. -6\cos t - 3\cos^2 t \right] dt = \int_0^{2\pi} \left( -4 + 9\cos^2 t + 2\cos t - 4\sin^2 t\cos t + 2\cos t(1-\sin^2 t) - \right.$$
$$\left. -\frac{1-\cos 4t}{8} - \frac{1-2\cos 2t+\cos^2 2t}{12} \right) dt = -8\pi + 9\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} + 2\sin t\Big|_0^{2\pi} - 4\,\frac{\sin^3 t}{3}\Big|_0^{2\pi} +$$
$$+2\left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right)\Big|_0^{2\pi} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{32}\sin 4t\Big|_0^{2\pi} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{12}\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

**11.** Să se calculeze cu ajutorul integralelor curbilinii, folosind formula lui Green, ariile domeniilor compacte mărginite de următoarele curbe:

a) $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t,\ \ 0 \le t \le 2\pi;$ b) $(x+y)^2 = ax,\ \ a > 0$ şi axa $Ox$;

c) $x^3 + y^3 = 3axy,\ \ x > 0,\ \ y > 0,\ \ a > 0.$

**Rezolvare.** a) Avem $A(D) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Gamma x\,dy - y\,dx,$ unde $\Gamma$ este elipsa

$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t,\ \ t \in [0, 2\pi], \end{cases}$ (vezi Figura 5.1.51).

Obţinem $A(D) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} [a\cos t \cdot b\cos t + b\sin t \cdot a\sin t]\ dt = \pi ab.$

b) Pentru a desena domeniul compact mărginit de curba $(\Gamma):\ x^2+2xy+y^2-ax = 0$ trebuie mai întâi să o studiem. Avem:

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -a/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -a/2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{a^2}{4} \neq 0.$$

Deducem că avem o parabolă. Valorile proprii $\lambda_1,\ \lambda_2$ sunt soluţiile ecuaţiei:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \ \lambda_2 = 2.$$

Pentru $\lambda_1 = 0$ coordonatele vectorilor proprii corespunzători satisfac sistemul $\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow y = -x.$ O bază în subspaţiul propriu corespunzător lui $\lambda_1 = 0$ este formată din $\vec{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}.$ Pentru $\lambda_2 = 2$ coordonatele vectorilor proprii satisfac sistemul $\begin{cases} -x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow x = y.$ O bază în subspaţiul propriu corespunzător lui $\lambda_2 = 2$ este formată din $\vec{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}.$

Matricea schimbării de bază de la baza canonică la baza $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ este $S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$ La schimbarea bazei coordonatele unui punct se schimbă în felul următor:

$$X = SX' \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/\sqrt{2}\,x' + 1/\sqrt{2}\,y' \\ y = -1/\sqrt{2}\,x' + 1/\sqrt{2}\,y'. \end{cases}$$

Înlocuind aceste relaţii în ecuaţia curbei $\Gamma$ obţinem:

$$2y'^2 = \frac{a}{\sqrt{2}}x' + \frac{a}{\sqrt{2}}y' \Leftrightarrow 2\left(y' - \frac{a}{4\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(x' + \frac{a}{8\sqrt{2}}\right).$$

Facem în continuare translaţia $\begin{cases} y' - \dfrac{a}{4\sqrt{2}} = y'' \\ x' + \dfrac{a}{8\sqrt{2}} = x'' \end{cases}$ şi găsim astfel ecuaţia redusă a parabolei $2(y'')^2 = \dfrac{a}{\sqrt{2}}x''$.

Legătura între coordonatele $(x, y)$ şi $(x'', y'')$ este $\begin{cases} x = \dfrac{a}{16} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x'' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y'' \\ y = \dfrac{3a}{16} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}x'' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y''. \end{cases}$

Vârful parabolei este $V(x'' = 0,\ y'' = 0)$, deci $V\left(x = \dfrac{a}{16}, y = \dfrac{3a}{16}\right)$. Obţinem astfel parabola desenată în Figura 5.1.52.

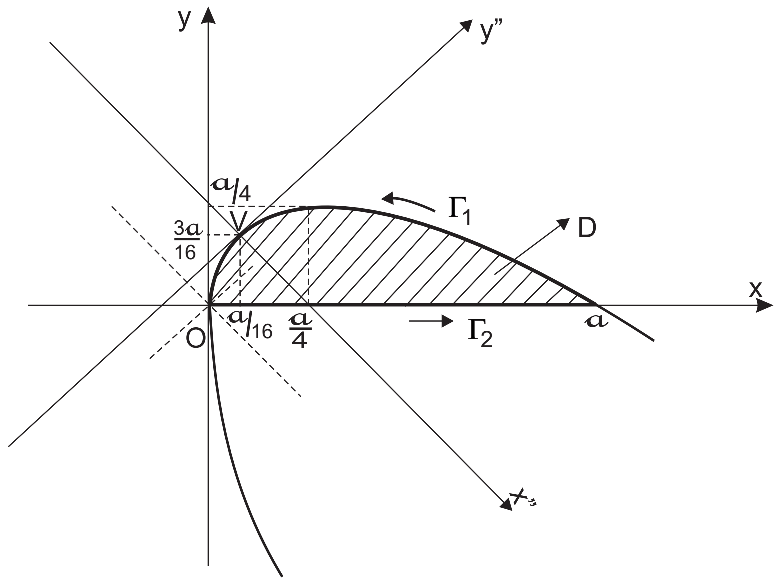


Figura 5.1.52

Conform formulei $A(D) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Gamma x\,dy - y\,dx$, unde $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, cu:

$$(\Gamma_1) : \begin{cases} x = t \\ y = -t + \sqrt{at},\ t \in [a, 0], \end{cases} \qquad (\Gamma_2) : \begin{cases} x = t \\ y = 0,\ t \in [0, a], \end{cases}$$

rezultă:

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_a^0 \left[t \cdot \left(-1 + \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{t}}\right) - (-t + \sqrt{at})\right] dt + \frac{1}{2}\int_0^a 0\,dt = \frac{1}{4}\int_0^a \sqrt{at}\,dt = \frac{a^2}{6}.$$

c) Pentru a obţine o parametrizare a buclei foliului lui Descartes, notăm $t = \dfrac{y}{x}$ şi

atunci obţinem $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}, \ t \in [0, \infty). \end{cases}$ Foliul lui Descartes este desenat în Figura 5.1.53 (pentru construcţia sa vezi cursul de algebră [11]). Rezultă:

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[\frac{3at}{1+t^3}\cdot\frac{3a(2t-t^4)}{(1+t^3)^2} - \frac{3at^2}{1+t^3}\cdot\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}\right]dt =$$

$$= \frac{9a^2}{2}\int_0^{\infty}\frac{t(2t-t^4)-t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}\,dt = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\infty}\frac{t^2+t^5}{(1+t^3)^3}\,dt = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}\,dt \overset{t^3=u}{=}$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{\infty}\frac{du}{(1+u)^2} = \frac{3a^2}{2}.$$

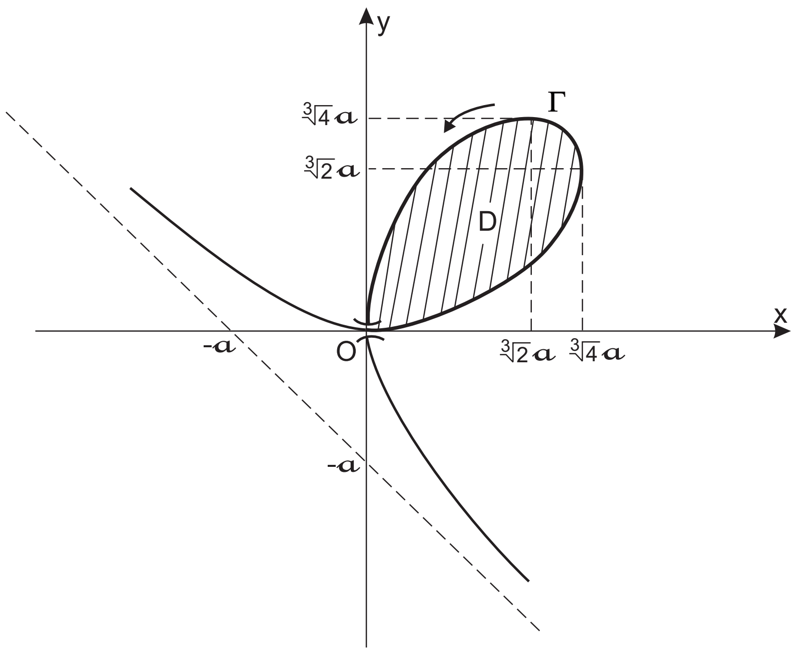


Figura 5.1.53

## PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

**12.** Să se calculeze următoarele integrale duble:

a) $\displaystyle\iint_D \sin(mx+ny)\,dx\,dy$, unde $D = [0,a]\times[0,b]$.

b) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\,dx\,dy$, unde $D = [1,2]\times[0,1]$.

c) $\displaystyle\iint_D \frac{2x}{\sqrt{1+y^4-x^4}}\,dx\,dy$, unde $D$ este limitat de $y = x$, $x = 0$, $y = 1$.

d) $\displaystyle\iint_D \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^{-n}\,dx\,dy$, unde $D$ este domeniul compact mărginit de triunghiul cu vârfurile $O(0,0)$, $A(a,0)$, $B(0,b)$, $n \neq 2$.

e) $\iint_D x^{p-1} \cdot y^{q-1}\, dx\, dy,\quad p \geq 1,\ q \geq 1,$ unde $D$ este domeniul limitat de $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

f) $\iint_D |xy|\, dx\, dy,$ unde $D$ este domeniul mărginit de cercul de rază $a$ şi cu centrul în originea coordonatelor.

g) $\iint_D xy\, dx\, dy,$ unde $D$ este limitat de $y = x^2$, $y = 2x + 3$.

h) $\iint_D (xy+y^2)\, dx\, dy,$ unde $D$ este limitat de parabolele $y^2 = 2px$ şi $x^2 = 2py,\ p > 0$.

i) $\iint_D \arcsin \sqrt{x+y}\, dx\, dy,$ unde $D$ este limitat de $x + y = 0$, $x + y = 1$, $y = -1$, $y = 1$.

j) $\iint_D xy\, dx\, dy,$ unde $D$ este limitat de $xy = 1$, $x + y = \dfrac{5}{2}$.

k) $\iint_D \dfrac{dx\, dy}{(x^2+y+1)^2},$ unde $D$ este domeniul mărginit de triunghiul $OAB$, $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$.

**13.** Să se calculeze trecând la coordonate polare următoarele integrale duble:

a) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy,$ unde $(D):\ x^2 + y^2 \leq a^2$.

b) $\iint_D \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right) dx\, dy,$ unde $(D):\ x^2 + y^2 \leq R^2$.

c) $\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})\, dx\, dy,$ unde $(D):\ x^2 + y^2 \leq 1$, $f$ funcţie continuă.

d) $\iint_D (x^2+y^2)\, dx\, dy,$ unde $(D):\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$.

e) $\iint_D x^2y^2\, dx\, dy,$ unde $(D):\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0$.

f) $\iint_D \arcsin\left(\dfrac{1}{2\pi}(x^2+y^2)^{1/2}\right) dx\, dy,$ unde $(D):\ \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$.

g) $\iint_D f(x,y)\, dx\, dy,$ unde $(D):\ a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2,\ y \geq x$, $f$ funcţie continuă.

h) $\iint_D \dfrac{2ay - x^2 - y^2}{y}\, dx\, dy,$ unde $D:\ x^2 + y^2 - 2ay \leq 0,\ y \leq a$.

**14.** Efectuând schimbările de variabile să se calculeze următoarele integrale duble:

a) $\iint_D |\cos(x+y)|\, dx\, dy,$ unde $(D):\ 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq \pi;$ $\begin{cases} x + y = u \\ x - y = v. \end{cases}$

b) $\iint_D e^{(x^3+y^3)/(xy)}\, dx\, dy,$ unde $D$ este limitat de $y^2 - 2px = 0$, $x^2 - 2py = 0$; $\begin{cases} x = u^2v \\ y = uv^2. \end{cases}$

c) $\iint_D \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy,$ unde $(D):\ -\dfrac{4b}{5a}x \leq y \leq \dfrac{3b}{5a}x,\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1;\ a,¿0;$

$$\begin{cases} x = au\,\mathrm{ch}\,v \\ y = bu\,\mathrm{sh}\,v. \end{cases}$$

d) $\displaystyle\iint_D |\sin\sqrt{x^2+y^2}|\,dx\,dy$, unde $D$ este limitat de curbele $(\Gamma_1): \ x = t\cos t, \ y = t\sin t, \ t \in [0, 2\pi]$ (spirala lui Arhimede) şi $(\Gamma_2): \ x = t, \ y = 0, \ t \in [0, 2\pi]$;

$$\begin{cases} x = uv\cos v \\ y = uv\sin v. \end{cases}$$

**15.** Să se calculeze ariile domeniilor limitate de curbele:

a) $(x-y)^2 + x^2 = a^2, \ a > 0$. b) $(x^2+y^2)^2 = 8a^2xy, \ x > 0$.

c) $x + y = a, \ x + y = b, \ y = \alpha x, \ y = \beta x, \ 0 < a < b, \ 0 < \alpha < \beta$.

**16.** Folosind integrala dublă să se calculeze volumele corpurilor limitate de următoarele suprafeţe:

a) $x^2 + y^2 - 2ax = 0, \ x^2 + y^2 = 2pz, \ z = 0$.

b) $z = x^2 + y^2, \ y = x^2, \ y = 1, \ z = 0$.

c) $z = x^2 + y^2, \ x^2 + y^2 = x, \ x^2 + y^2 = 2x, \ z = 0$.

d) $z = e^{-(x^2+y^2)}, \ z = 0, \ x^2 + y^2 = R^2$.

e) $z = x^{3/2} + y^{3/2}, \ z = 0, \ x + y = 1, \ x = 0, \ y = 0$.

**17.** Să se calculeze masa şi coordonatele centrelor de greutate ale plăcilor omogene limitate de următoarele curbe:

a) $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy, \ x > 0, \ y > 0$. b) $ay = x^2, \ x + y = 2a, \ a > 0$.

**18.** Să se calculeze momentele de inerţie $I_x$ şi $I_y$ în raport cu axele de coordonate $Ox$ şi $Oy$ ale plăcii omogene ($\varrho_0 = 1$) limitată de curba $x^4 + y^4 = a^2(x^2+y^2)$.

**19.** Să se determine aria cuprinsă între parabolele $y^2 = 2px$ şi $x^2 = 2py$, ($p > 0$) precum şi momentul ei de inerţie în raport cu originea, $\varrho \equiv \varrho_0$.

**20.** Să se calculeze integrala:

$$I = \int_\Gamma (x+y)\,dx - (x-y)\,dy,$$

unde $\Gamma$ este elipsa $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ parcursă în sens direct trigonometric. Să se verifice apoi rezultatul cu formula lui Green.

**21.** Să se calculeze cu ajutorul integralelor curbilinii ariile domeniilor mărginite de următoarele curbe:

a) $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$, (lemniscata). b) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, (astroida).

c) $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\sin t - \sin 2t), \quad t \in [0, 2\pi], \end{cases}$ (cardioida).

## §2. INTEGRALE TRIPLE

Fie $G \subset I\!R^3$ o mulţime *cubabilă* sau *măsurabilă Jordan*, adică o mulţime mărginită cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există figurile poliedrale $P_\varepsilon$, $Q_\varepsilon$ astfel încât $P_\varepsilon \subset G \subset Q_\varepsilon$ şi $V(Q_\varepsilon) - V(P_\varepsilon) < \varepsilon$. Numărul $V(G) = \sup\limits_{P \subset G} V(P) = \inf\limits_{G \subset Q} V(Q)$ se numeşte *volumul figurii spaţiale* $G$. Prin *figură poliedrală* înţelegem figura spaţială compusă din unul sau mai multe poliedre (corpuri poliedrale). Un domeniu compact $G \subset I\!R^3$ (o mulţime compactă cu $\overset{\circ}{G}$ domeniu) este cubabil, adică are volum.

Funcţia $f : G \to I\!R$ este *integrabilă* pe $G$ ($G$ mulţime cubabilă), notat $f \in \mathcal{R}(G)$, dacă $\exists\, I \in I\!R$ a.î. $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ cu proprietatea că pentru orice $\Delta \in \mathcal{D}$ (mulţimea diviziunilor lui $G$) cu $\|\Delta\| < \delta$, $\Delta = (G_i)_{i=\overline{1,n}}$ şi $\forall\, z_i \in G_i$, $i = \overline{1,n}$ rezultă:

$$|\sigma_\Delta(f, z_i) - I| < \varepsilon, \quad \text{unde} \quad \sigma_\Delta(f, z_i) = \sum_{i=1}^{n} f(z_i) \cdot V(G_i).$$

Numărul $I$ se numeşte *integrala triplă* a funcţiei $f$ pe mulţimea cubabilă $G$ şi se notează $I = \iiint_G f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$.

*Proprietăţi.* a) Fie $f, g : G \subset I\!R^3 \to I\!R$, $G$ mulţime cubabilă. Dacă $f \in \mathcal{R}(G)$, $g \in \mathcal{R}(G)$, $\lambda, \mu \in I\!R$ atunci $\lambda f + \mu g \in \mathcal{R}(G)$ şi:

$$\iiint_G (\lambda f(x,y,z) + \mu g(x,y,z))\, dx\, dy\, dz = \lambda \iiint_G f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz + \mu \iiint_G g(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

b) Fie $G = G_1 \cup G_2$, $G_1$, $G_2$ mulţimi cubabile cu $\overset{\circ}{G}_1 \cap \overset{\circ}{G}_2 = \emptyset$, iar $f : G \to I\!R$. Dacă $f \in \mathcal{R}(G)$ atunci $f \in \mathcal{R}(G_1)$ şi $f \in \mathcal{R}(G_2)$ şi:

$$\iiint_G f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{G_1} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz + \iiint_{G_2} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

Si invers dacă $f \in \mathcal{R}(G_1)$ şi $f \in \mathcal{R}(G_2)$ atunci $f \in \mathcal{R}(G)$ şi are loc egalitatea de mai sus.

c) Fie $f, g : G \to I\!R$, $G$ mulţime cubabilă, $f, g \in \mathcal{R}(G)$ şi $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$, $\forall\, (x,y,z) \in G$. Atunci:

$$\iiint_G f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \le \iiint_G g(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

d) Fie $f : G \to I\!R$ mărginită, $f \in \mathcal{R}(G)$, $M = \sup\limits_{(x,y,z)\in G} f(x,y,z)$, $m = \inf\limits_{(x,y,z)\in G} f(x,y,z)$. Atunci:

$$m \cdot V(G) \le \iiint_G f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \le M \cdot V(G).$$

e) Dacă $f \in \mathcal{R}(G)$ atunci $|f| \in \mathcal{R}(G)$ şi:

$$\left|\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\right| \leq \iiint_G |f(x,y,z)|\,dx\,dy\,dz.$$

**Teorema 5.2.1.** Dacă $G \subset I\!\!R^3$ este un domeniu compact, cu $V(G) \neq 0$, iar $f : G \to$ $\to I\!\!R$ este o funcţie continuă pe $G$ atunci $f \in \mathcal{R}(G)$.

**Teorema 5.2.2 (Fubini).** Fie $G$ un domeniu compact din $I\!\!R^3$ simplu în raport cu axa $Oz$, dat prin inegalităţile:

$$\begin{cases} z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y), \ \forall\,(x,y) \in D \subset I\!\!R^2, \ D \text{ domeniu compact,} \\ z_1(x,y) \leq z_2(x,y), \ \forall\,(x,y) \in D, \ z_1,\ z_2 \text{ funcţii continue.} \end{cases}$$

Dacă $f : G \to I\!\!R$, $f \in \mathcal{R}(G)$ şi pentru $\forall\,(x,y) \in D\ \exists\ I(x,y) = \displaystyle\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$ atunci $I \in \mathcal{R}(D)$ şi:

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

**Consecinţa 5.2.1.** Dacă $G$ este un domeniu compact simplu în raport cu axa $Oz$, iar $f : G \to I\!\!R$ este o funcţie continuă atunci sunt îndeplinite toate ipotezele din Teorema 5.2.1, deci are loc egalitatea de mai sus.

**Consecinţă 5.2.2.** Dacă $G$ este un domeniu compact simplu în raport cu toate cele trei axe de coordonate, iar $f : G \to I\!\!R$ este o funcţie continuă, atunci ordinea de integrare nu este esenţială în calculul integralei $\displaystyle\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.

**Teorema 5.2.3** (schimbarea de variabile în integrala triplă). Fie $T : I\!\!R^3 \to I\!\!R^3$ o transformare regulată $\left(T = (f_1, f_2, f_3),\ \exists\,\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j},\ \ i,j = \overline{1,3} \text{ continue şi } J = \dfrac{D(f_1,f_2,f_3)}{D(x_1,x_2,x_3)} \neq 0\right)$ de ecuaţii $x = \varphi(u,v,w)$, $y = \psi(u,v,w)$, $z = \chi(u,v,w)$, în care $\varphi$, $\psi$, $\chi$ admit derivate parţiale mixte de ordinul al doilea continue, iar $G$ şi $\widetilde{G}$ sunt domenii compacte mărginite de suprafeţele $\Sigma$, $\widetilde{\Sigma}$ simple, închise şi netede (sau netede pe porţiuni) astfel încât $\Sigma = T(\widetilde{\Sigma})$, $G = T(\widetilde{G})$. Fie $f : G \to I\!\!R$ o funcţie continuă pe $G$. Atunci are loc formula:

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\widetilde{G}} f(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \chi(u,v,w)) \left|\frac{D(\varphi,\psi,\chi)}{D(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw.$$

*Cazuri particulare.* a) În coordonatele cilindrice $r$, $\varphi$, $z$, unde $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in I\!\!R$ avem $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = r$ şi:

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\widetilde{G}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \cdot r\,dr\,d\varphi\,dz.$$

b) În coordonatele polare (sferice) $r$, $\varphi$, $\psi$, unde $x = r\cos\varphi\cos\psi$, $y = r\sin\varphi\cos\psi$, $z = r\sin\psi$, $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$ avem $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)} = r^2\cos\psi$ şi:

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\widetilde{G}} f(r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\psi) \cdot r^2\cos\psi\,dr\,d\varphi\,d\psi.$$

Dacă considerăm coordonatele polare $r$, $\varphi, \theta$, unde $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \pi]$ avem $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$, iar:

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\widetilde{G}} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta.$$

**Calculul volumelor.** Pentru un domeniu compact $G$ simplu în raport cu axa $Oz$ sau cu orice altă axă sau un domeniu care se descompune într-o reuniune finită de astfel de subdomenii, volumul său se calculează cu formula:

$$V(G) = \iiint_G dx\,dy\,dz.$$

**Aplicaţiile integralelor triple în mecanică**

1°. *Masa unui corp.* Dacă un corp ocupă volumul $G$ şi $\varrho = \varrho(x,y,z)$ este densitatea lui în punctul $(x,y,z)$ atunci masa acestui corp este egală cu:

$$M = \iiint_G \varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

2°. *Centrul de greutate al unui corp.* Coordonatele centrului de greutate $(x_0, y_0, z_0)$ al unui corp $G$ se calculează după formulele:

$$x_0 = \frac{1}{M}\iiint_G x\cdot\varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \quad y_0 = \frac{1}{M}\iiint_G y\cdot\varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$
$$z_0 = \frac{1}{M}\iiint_G z\cdot\varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Dacă corpul este omogen se ia $\varrho \equiv \varrho_0$.

3°. *Momente de inerţie.* Momentul de inerţie al unui corp în raport cu un plan $\alpha$, o axă $d$ sau un punct $P$, este integrala:

$$I = \iiint_G \varrho\, r^2\,dx\,dy\,dz,$$

unde $r$ este distanţa punctului curent al corpului $(x,y,z)$ la planul $\alpha$, axa $d$, respectiv punctul $P$.

Momentele de inerţie ale unui corp în raport cu planele de coordonate sunt:

$$I_{xy} = \iiint_G \varrho z^2\,dx\,dy\,dz, \quad I_{yz} = \iiint_G \varrho x^2\,dx\,dy\,dz, \quad I_{xz} = \iiint_G \varrho y^2\,dx\,dy\,dz.$$

Momentele de inerţie ale unui corp în raport cu axele de coordonate $Ox$, $Oy$, $Oz$ sunt

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, \quad I_y = I_{xy} + I_{yz}, \quad I_z = I_{xz} + I_{yz}.$$

Momentul de inerţie al unui corp în raport cu originea coordonatelor este:

$$I_0 = \iiint_G \varrho\,(x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz, \quad \text{adică} \quad I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{xz}.$$

4°. *Potenţialul câmpului gravitic.* Potenţialul newtonian al unui corp $G$ în punctul $P(x,y,z)$ este integrala:

$$u(x,y,z) = \iiint_G \varrho(\xi,\eta,\zeta)\,\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r},$$

unde $\varrho = \varrho(\xi,\eta,\zeta)$ este densitatea corpului şi $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$.

Un punct material de masă $m$ este atras de un corp cu o forţă ale cărei proiecţii $X$, $Y$, $Z$ pe axele de coordonate $Ox$, $Oy$, $Oz$ sunt:

$$X = km\,\frac{\partial u}{\partial x} = km \iiint_G \varrho\,\frac{\xi - x}{r^3}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \quad Y = km\,\frac{\partial u}{\partial y} = km \iiint_G \varrho\,\frac{\eta - y}{r^3}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

$$Z = km\,\frac{\partial u}{\partial z} = km \iiint_G \varrho\,\frac{\zeta - z}{r^3}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

unde $k$ este constanta atracţiei gravitaţionale.

## PROBLEME REZOLVATE

**1.** Să se calculeze următoarele integrale triple:

a) $\displaystyle\iiint_G \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$, unde $G$ este domeniul compact limitat de suprafeţele $x+$ $+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

b) $\displaystyle\iiint_G z\,dx\,dy\,dz$, unde $G$ este domeniul compact limitat de suprafeţele $z^2 = \dfrac{h^2}{R^2}(x^2+$ $+y^2)$, $z=0$, $z=h$.

c) $\displaystyle\iiint_G xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, unde $G$ este domeniul compact limitat de suprafeţele $z=$ $=xy$, $y=x$, $x=1$, $z=0$.

d) $\displaystyle\iiint_G xy\,dx\,dy\,dz$, unde $G$ este domeniul compact limitat de suprafeţele $x^2+y^2=$ $=1$, $z=0$, $z=1$, $x=0$, $y=0$.

e) $\displaystyle\iiint_G (x^2+y^2)z\,dx\,dy\,dz$, unde $G$ este limitat de suprafeţele $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2+$ $+z^2=6$.

**Rezolvare.** Funcţiile de mai sus sunt continue pe domeniile respective.

a) Domeniul $G$ este simplu în raport cu axa $Oz$ (vezi Figura 5.2.1),

$$(G): \begin{cases} 0 \le z \le 1-x-y \\ (x,y) \in D, \end{cases} \quad \text{unde } (D): \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x, \end{cases} \text{(vezi Figura 5.2.2).}$$

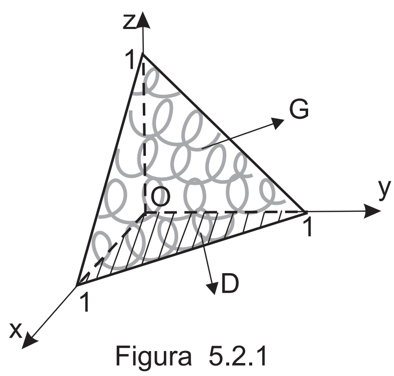

Figura 5.2.1

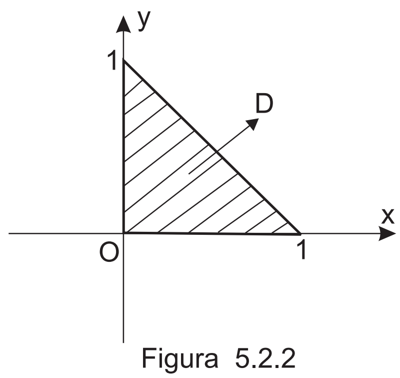

Figura 5.2.2

Rezultă:

$$I=\iiint_G \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}=\iint_D dx\,dy\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}=\iint_D\left(-\frac{1}{2}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{(1+x+y+z)^2}\Big|_{z=0}^{z=1-x-y}\right)dx\,dy=\frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right]dx\,dy\overset{D\,s/Oy}{=}$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2}--\frac{1}{4}\right]dy=\frac{1}{2}\int_0^1\left(-\frac{1}{1+x+y}-\frac{1}{4}y\right)\Big|_{y=0}^{y=1-x}dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(1-x)+\frac{1}{1+x}\right]dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}x+\frac{x^2}{8}+\ln(1+x)\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right).$$

b) Domeniul $G$ este simplu în raport cu axa $Oz$ (vezi Figura 5.2.3). Avem

$$(G):\begin{cases}\dfrac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}\le z\le h\\ (x,y)\in D,\end{cases}\quad \text{unde } (D):\ x^2+y^2\le R^2, \text{ (vezi Figura 5.2.4).}$$

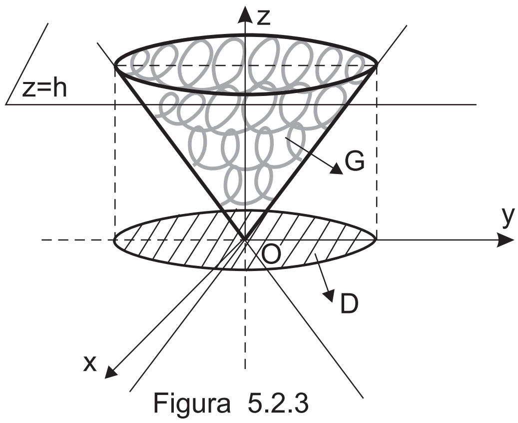

Figura 5.2.3

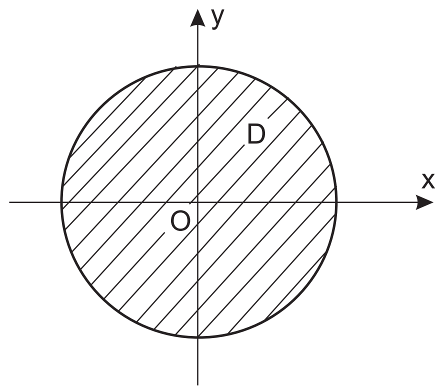

Figura 5.2.4

Rezultă astfel:

$$I=\iiint_G z\,dx\,dy\,dz=\iint_D dx\,dy\int_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} z\,dz=\iint_D\left(\frac{z^2}{2}\Big|_{z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{z=h}\right)dx\,dy=$$
$$=\frac{1}{2}\iint_D\left[h^2-\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)\right]dx\,dy=\frac{h^2}{2R^2}\iint_D(R^2-x^2-y^2)\,dx\,dy.$$

Facem schimbarea de variabile $x=r\cos\varphi,\ \ y=r\sin\varphi,\ \ (r,\varphi)\in D'$, unde $(D')$ : $\begin{cases}0\le r\le R\\ 0\le\varphi\le 2\pi.\end{cases}$ Obţinem:

$$I=\frac{h^2}{2R^2}\int_0^R\int_0^{2\pi}(R^2-r^2)\,r\,dr\,d\varphi=\frac{h^2}{2R^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int_0^R(R^2r-r^3)\,dr=\frac{h^2\pi}{R^2}\left(\frac{R^2r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^R=$$
$$=\frac{\pi R^2h^2}{4}.$$

c) Domeniul $G$ desenat în Figura 5.2.5 este simplu în raport cu axa $Oz$,

$$(G):\begin{cases}0\le z\le xy\\ (x,y)\in D,\end{cases}\quad \text{unde } (D):\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le x,\ \text{(vezi Figura 5.2.6)}\end{cases}\ \text{este simplu în}$$

raport cu $Oy$.

Rezultă:

$$I=\iiint_G xy^2z^3\,dx\,dy\,dz=\iint_D dx\,dy\int_0^{xy} xy^2z^3\,dz=\iint_D xy^2\frac{z^4}{4}\Big|_{z=0}^{z=xy}dx\,dy=$$
$$=\iint_D \frac{x^5y^6}{4}\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_0^x \frac{x^5y^6}{4}\,dy=\frac{1}{4}\int_0^1 x^5\cdot\frac{y^7}{7}\Big|_{y=0}^{y=x}dx=\frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}\,dx=\frac{1}{364}.$$

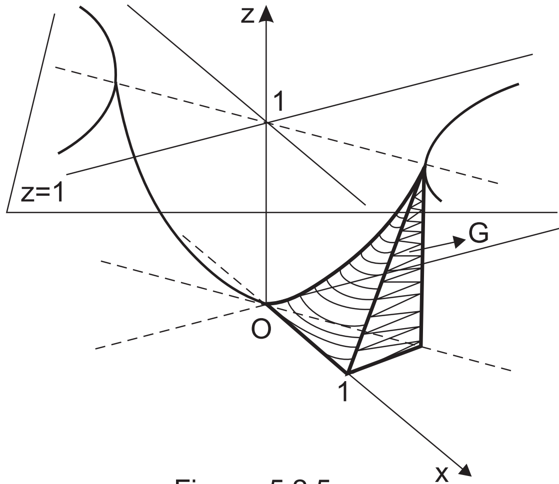


Figura 5.2.5

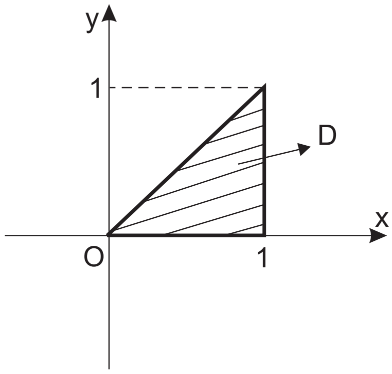


Figura 5.2.6

d) Domeniul $G$ desenat în Figura 5.2.7 este simplu în raport cu axa $Oz$,
$(G):\begin{cases}0\le z\le 1\\(x,y)\in D,\end{cases}$ unde $(D):\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\x,\,y\ge 0,\end{cases}$ (vezi Figura 5.2.8).

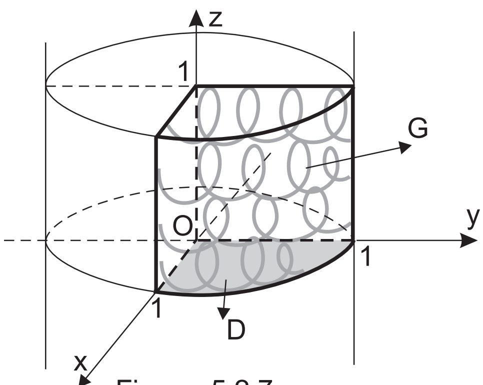


Figura 5.2.7

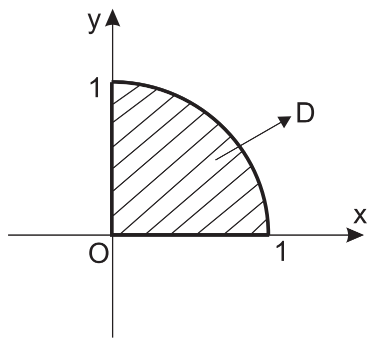


Figura 5.2.8

Rezultă:
$$I=\iiint_G xy\,dx\,dy\,dz=\iint_D dx\,dy\int_0^1 xy\,dz=\iint_D xy\cdot z\Big|_{z=0}^{z=1}dx\,dy=\iint_D xy\,dx\,dy.$$

Pentru a calcula integrala dublă obţinută mai sus facem schimbarea de variabile $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $(r,\varphi)\in\widetilde{D}$, $(\widetilde{D}):\ 0\le r\le 1,\ 0\le\varphi\le\pi/2$. Deducem astfel că:
$$I=\iint_{\widetilde{D}} r^2\cos\varphi\sin\varphi\cdot r\,dr\,d\varphi=\int_0^1 r^3\,dr\cdot\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2\varphi}{2}\,d\varphi=\frac{r^4}{4}\Big|_0^1\cdot\left(-\frac{1}{4}\cos 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{1}{8}.$$

*Observaţie.* Integrala triplă de mai sus o mai putem calcula folosind coordonatele cilindrice $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$, $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)}=r$, $(r,\varphi,z)\in\widetilde{G}$, unde $(\widetilde{G}):\ 0\le$ $\le r\le 1,\ 0\le\varphi\le\pi/2,\ 0\le z\le 1$. Rezultă:

$$I=\iiint_{\widetilde{G}} r^2\cos\varphi\sin\varphi\cdot r\,dr\,d\varphi\,dz=\int_0^1 r^3\,dr\cdot\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2\varphi}{2}\,d\varphi\cdot\int_0^1 dz=\frac{1}{8}.$$

e) Domeniul $G$ desenat în Figura 5.2.9 este simplu în raport cu axa $Oz$,

$(G):\ \begin{cases} x^2+y^2\le z\le\sqrt{6-x^2-y^2}\\ (x,y)\in D,\end{cases}$ unde $D$ este proiecţia lui $G$ pe planul $Oxy$.

Făcând intersecţia dintre paraboloid şi sferă rezultă cercul $x^2+y^2=2,\ \ z=2$, de unde deducem că $D$ este domeniul: $x^2+y^2\le 2$ (vezi Figura 5.2.10). Obţinem astfel:

$$I=\iiint_G (x^2+y^2)z\,dx\,dy\,dz=\iint_D dx\,dy\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}}(x^2+y^2)z\,dz=\frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)\times$$
$$\times(6-x^2-y^2-(x^2+y^2)^2)\,dx\,dy.$$

Facem schimbarea de variabile $x=r\cos\varphi,\ \ y=r\sin\varphi,\ \ (r,\varphi)\in\widetilde{D}$, unde $(\widetilde{D})$ : $\begin{cases}0\le r\le\sqrt{2}\\ 0\le\varphi\le 2\pi.\end{cases}$ Rezultă:

$$I=\frac{1}{2}\iint_{\widetilde{D}} r^2(6-r^2-r^4)r\,dr\,d\varphi=\pi\int_0^{\sqrt{2}}(6r^3-r^5-r^7)\,dr=\pi\left(\frac{6r^4}{4}-\frac{r^6}{6}-\frac{r^8}{8}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{8\pi}{3}.$$

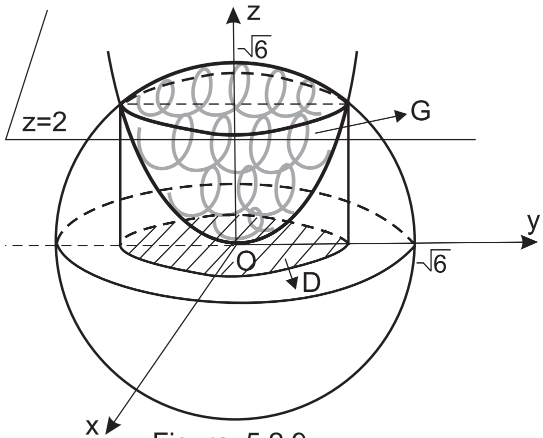

Figura 5.2.9

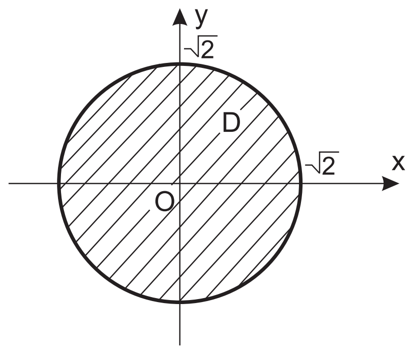

Figura 5.2.10

**2.** Să se calculeze trecând la coordonate polare următoarele integrale triple:

a) $\displaystyle\iiint_G xyz\,dx\,dy\,dz$, unde domeniul compact $G$ este limitat de suprafeţele $x^2+y^2+z^2=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

b) $\displaystyle\iiint_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, unde $G$ este limitat de suprafaţa $x^2+y^2+z^2-z=0$.

c) $\displaystyle\iiint_G (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, unde $G$ este domeniul limitat de suprafeţele $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

d) $\displaystyle\iiint_G (x^2+y^2+xy)\,dx\,dy\,dz$, unde $G$ este domeniul limitat de suprafeţele $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $x^2+y^2+z^2=c^2$, $a>b>c>0$.

**Rezolvare.** Funcţiile de mai sus sunt continue pe domeniile indicate.

a) Domeniul $G$ este desenat în Figura 5.2.11. Folosim coordonatele polare:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta, \quad (r,\varphi,\theta)\in\widetilde{G}, \end{cases} \quad \text{unde } (\widetilde{G}) : \begin{cases} 0\le r\le 1 \\ 0\le\varphi\le\pi/2 \\ 0\le\theta\le\pi/2. \end{cases}$$

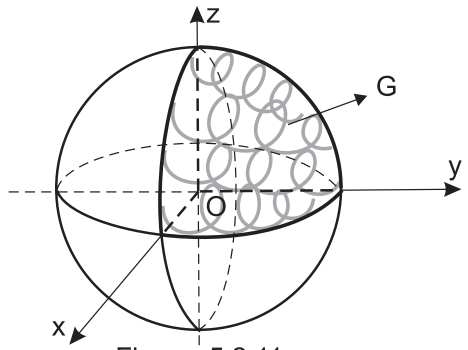

Figura 5.2.11

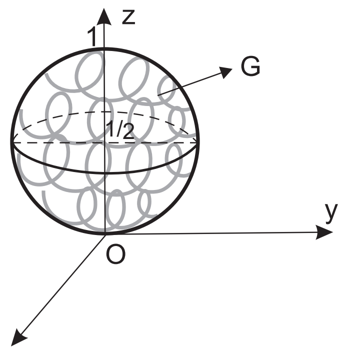

Figura 5.2.12

Determinantul funcţional fiind $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$, rezultă:

$$I = \iiint_{\widetilde{G}} r^3\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta = \int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} r^5\,\frac{\sin 2\varphi}{2}\,\sin^3\theta\times$$
$$\times\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^1 r^5\,dr\cdot\int_0^{\pi/2}\sin 2\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cdot(\sin\theta)'\,d\theta = \frac{1}{12}\cdot\left.\frac{-\cos 2\varphi}{2}\right|_0^{\pi/2}\times$$
$$\times\left.\frac{\sin^4\theta}{4}\right|_0^{\pi/2} = \frac{1}{48}.$$

b) Domeniul $G:\ x^2+y^2+\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2\le\dfrac{1}{4}$ este desenat în Figura 5.2.12. Trecând la coordonate polare: $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, obţinem pentru $G:\ r^2\le r\cos\theta \Rightarrow r\le\cos\theta$ $(\cos\theta\ge 0,\ \theta\in[0,\pi/2])$. Deci $(\widetilde{G}):\ 0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\theta\le\pi/2$, $0\le r\le\cos\theta$. Rezultă:

$$I = \iiint_{\widetilde{G}} r\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\cos\theta} r^3\sin\theta\,dr = \left(\int_0^{2\pi}d\varphi\right)\times$$
$$\times\left(\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cdot\frac{\cos^4\theta}{4}\,d\theta\right) = \frac{\pi}{10}.$$

c) Domeniul $G$ este desenat în Figura 5.2.13. Folosim coordonatele polare generalizate:

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi\sin\theta \\ y = br\sin\varphi\sin\theta \\ z = cr\cos\theta, \quad (r,\varphi,\theta)\in\widetilde{G}, \end{cases} \quad \text{unde } (\widetilde{G}) : \begin{cases} 0\le r\le 1 \\ 0\le\varphi\le\pi/2 \\ 0\le\theta\le\pi/2. \end{cases}$$

Determinantul funcţional fiind $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = abcr^2\sin\theta$, rezultă:

$$\iiint_{\widetilde{G}}(a^2r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + b^2r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + c^2r^2\cos^2\theta)\cdot abcr^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta =$$
$$= abc\iiint_{\widetilde{G}} r^4[(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)\sin^3\theta + c^2\cos^2\theta\sin\theta]\,dr\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= abc\left[\int_0^1 r^4\,dr\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\,d\theta\cdot\int_0^{\pi/2}(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)\,d\varphi+\frac{c^2}{5}\left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2}\cdot\frac{\pi}{2}\right]=$$
$$= abc\left[\frac{1}{5}\left(-\cos\theta+\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2}\cdot\int_0^{\pi/2}(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)\,d\varphi+\frac{c^2\pi}{30}\right]=$$
$$= abc\left[\frac{2}{15}\int_0^{\pi/2}(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)\,d\varphi+\frac{\pi c^2}{30}\right]=abc\left[\frac{2}{15}\int_0^{\pi/2}\left(a^2\,\frac{1+\cos 2\varphi}{2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+b^2\,\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)\,d\varphi+\frac{\pi c^2}{30}\right]=abc\left[\frac{a^2}{15}\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2}+\frac{b^2}{2}\left(\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\pi c^2}{30}\right]=\frac{\pi(a^2+b^2+c^2)abc}{30}.$$

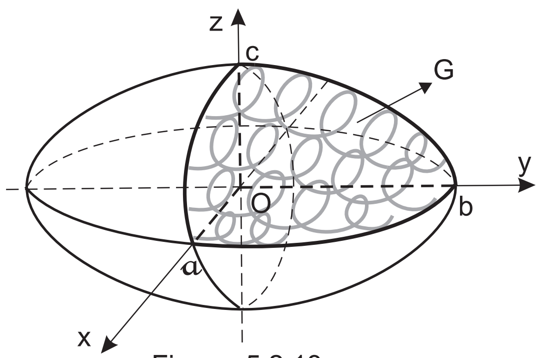

Figura 5.2.13

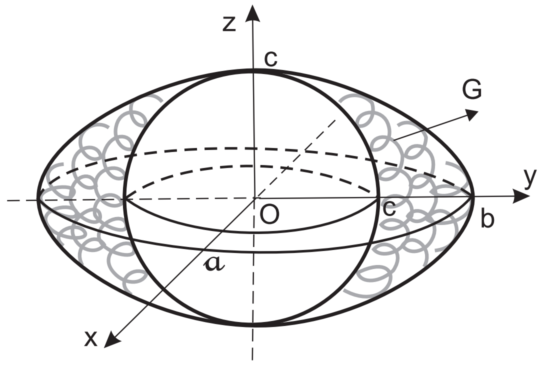

Figura 5.2.14

d) Domeniul $G = G_1 - G_2$, unde $G_1$ este domeniul limitat de elipsoid, iar $G_2$ este domeniul limitat de sferă (vezi Figura 5.2.14). Rezultă:

$$I = \iiint_{G_1}(x^2+y^2+xy)\,dx\,dy\,dz-\iiint_{G_2}(x^2+y^2+xy)\,dx\,dy\,dz.$$

Pentru prima integrală de mai sus facem schimbarea de variabile $x = ar\cos\varphi\sin\theta$, $y = br\sin\varphi\sin\theta$, $z = cr\cos\theta$, $(r,\varphi,\theta)\in\widetilde{G}_1$, unde $(\widetilde{G}_1)$: $0\le r\le 1$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\theta\le\pi$. Rezultă:

$$I_1 = \iiint_{\widetilde{G}_1}[(a^2r^2\cos^2\varphi+b^2r^2\sin^2\varphi+abr^2\cos\varphi\sin\varphi)\sin^2\theta\cdot abcr^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta=$$
$$= abc\int_0^1 r^4\,dr\cdot\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi+ab\cos\varphi\sin\varphi)\,d\varphi\cdot\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta=$$
$$= \frac{abc}{5}\left(-\cos\theta+\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\left(a^2\,\frac{1+\cos 2\varphi}{2}+b^2\,\frac{1-\cos 2\varphi}{2}+\frac{ab}{2}\sin 2\varphi\right)\,d\varphi=$$
$$= \frac{4abc}{15}\left[\frac{a^2}{2}\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}+\frac{b^2}{2}\left(\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}-\frac{ab}{4}\cos 2\varphi\Big|_0^{2\pi}\right]=\frac{4\pi abc(a^2+b^2)}{15}.$$

Pentru a doua integrală pe domeniul $G_2$ facem schimbarea de variabile $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $(r,\varphi,\theta)\in\widetilde{G}_2$, unde $(\widetilde{G}_2)$: $0\le r\le c$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\theta\le\pi$. Obţinem:

$$I_2 = \iiint_{G_2}(x^2+y^2+xy)\,dx\,dy\,dz=\iiint_{\widetilde{G}_2}[r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\sin^2\theta+r^2\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta]\times$$
$$\times r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta=\int_0^c r^4\,dr\cdot\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\,d\varphi\cdot\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta=\frac{8\pi c^5}{15}.$$

Deci $I = I_1 - I_2 = \dfrac{4\pi c}{15}[(a^2+b^2)ab - 2c^4]$.

**3.** Să se calculeze următoarea integrală triplă:
$$\iiint_G x^2\,dx\,dy\,dz,$$
unde domeniul $G$ este limitat de suprafeţele $z = ay^2$, $z = by^2$, $y > 0$ $(0 < a < b)$, $z = \alpha x$, $z = \beta x$ $(0 < \alpha < \beta)$, $z = h$ $(h > 0)$, efectuând schimbarea de variabile $u = \dfrac{z}{y^2}$, $v = \dfrac{z}{x}$, $w = z$.

**Rezolvare.** Domeniul $G$ este desenat în Figura 5.2.15. Coordonatele punctelor $A$, $B$, $C$ şi $D$ sunt: $A\left(\dfrac{h}{\beta}, \sqrt{\dfrac{h}{b}}, h\right)$, $B\left(\dfrac{h}{\alpha}, \sqrt{\dfrac{h}{b}}, h\right)$, $C\left(\dfrac{h}{\beta}, \sqrt{\dfrac{h}{a}}, h\right)$, $D\left(\dfrac{h}{\alpha}, \sqrt{\dfrac{h}{a}}, h\right)$, (triunghiul curbiliniu $OAB$ aparţine cilindrului $z = by^2$, iar triunghiul curbiliniu $OCD$ aparţine cilindrului $z = ay^2$).

Făcând schimbările de variabile indicate în enunţ, rezultă domeniul $(\widetilde{G})$: $a \le u \le b$, $\alpha \le v \le \beta$, $0 \le w \le h$. Deoarece $x = \dfrac{w}{v}$, $y = \sqrt{\dfrac{w}{u}}$, $z = w$, determinantul funcţional este $\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{w\sqrt{w}}{v^2u\sqrt{u}}$.

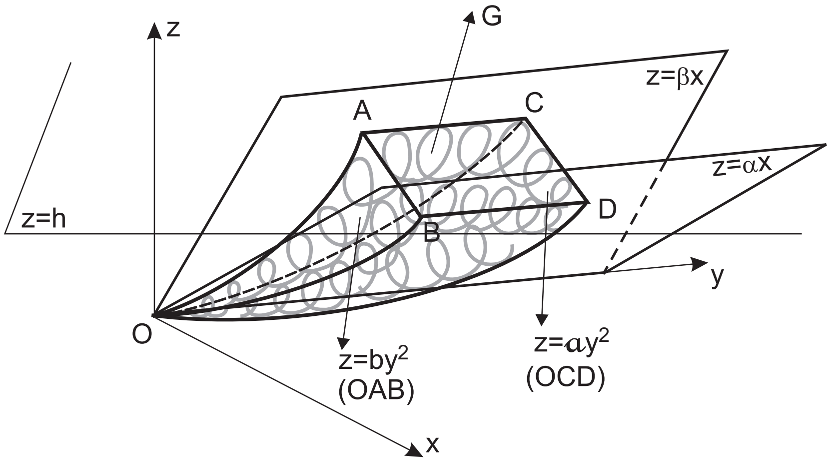

Figura 5.2.15

Rezultă că:
$$I = \iiint_{\widetilde{G}} \frac{w^2}{v^2}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{w\sqrt{w}}{v^2u\sqrt{u}}\,du\,dv\,dw = \frac{1}{2}\int_a^b u^{-3/2}\,du\int_\alpha^\beta v^{-4}\,dv\int_0^h w^{7/2}\,dw = \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{u^{-1/2}}{-1/2}\right|_a^b\times$$
$$\times\left.\frac{v^{-3}}{-3}\right|_\alpha^\beta\cdot\left.\frac{w^{9/2}}{9/2}\right|_0^h = \frac{2h^{9/2}}{27}\left(\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\beta^3} - \frac{1}{\alpha^3}\right).$$

**4.** Să se determine domeniul de integrare şi apoi să se modifice în diverse moduri ordinea de integrare:

a) $I = \displaystyle\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz$; b) $I = \displaystyle\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)\,dz$,

unde $f$ este o funcţie continuă.

**Rezolvare.** a) Domeniul $G$ este:

$$(G):\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1-x\\ 0\le z\le x+y\end{cases}\Rightarrow (G):\begin{cases}0\le z\le x+y\\ (x,y)\in D,\\ \text{(Figura 5.2.16)},\end{cases}\quad \text{unde } (D):\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1-x,\\ \text{(Figura 5.2.17)}.\end{cases}$$

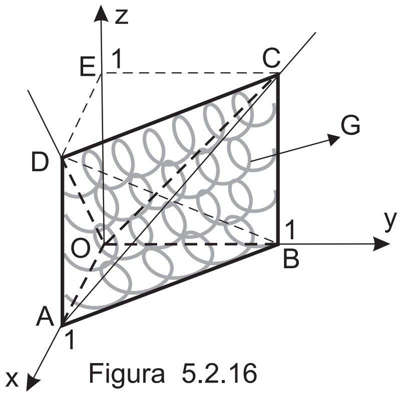

Figura 5.2.16

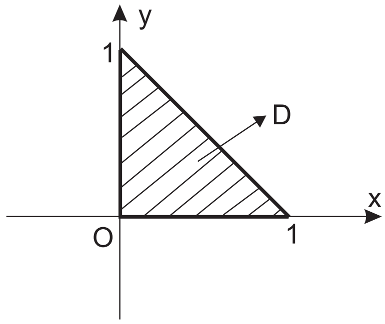

Figura 5.2.17

$G$ a fost considerat simplu în raport cu axa $Oz$, iar $D$ simplu în raport cu axa $Oy$. Considerând pe $D$ simplu în raport cu axa $Ox$, obţinem:

$$I=\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iint_D dx\,dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz=\int_0^1 dy\int_0^{1-y}dx\int_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz.$$

Dacă dorim să integrăm mai întâi în raport cu $x$, descompunem pe $G$ în $G=G_1\cup G_2$, unde $G_1=AOCD$ şi $G_2=ABCO$ sunt simple faţă de $Ox$. Proiecţia lui $G_1$ pe planul $Oyz$ este domeniul $D_1'=OCE$, iar proiecţia lui $G_2$ pe planul $Oyz$ este domeniul $D_2'=OBC$ (vezi Figura 5.2.18). Deci:

$$(G_1):\begin{cases}z-y\le x\le 1-y\\ (y,z)\in D_1',\end{cases}\ \text{cu } (D_1'):\begin{cases}0\le y\le 1\\ y\le z\le 1,\\ (\text{simplu } /Oz)\end{cases}\ \text{sau } (D_1'):\begin{cases}0\le z\le 1\\ 0\le y\le z,\\ (\text{simplu } /Oy),\end{cases}$$

$$\text{iar } (G_2):\begin{cases}0\le x\le 1-y\\ (y,z)\in D_2'\end{cases}\ \text{cu } (D_2'):\begin{cases}0\le y\le 1\\ 0\le z\le y,\\ (\text{simplu } /Oz)\end{cases}\ \text{sau } (D_2'):\begin{cases}0\le z\le 1\\ z\le y\le 1,\\ (\text{simplu } /Oy).\end{cases}$$

(Ecuaţia feţei $OCD$ este $x+y=z$, iar ecuaţia feţei $ABCD$ este $x+y-1=0$, obţinută din ecuaţia planului prin 3 puncte).

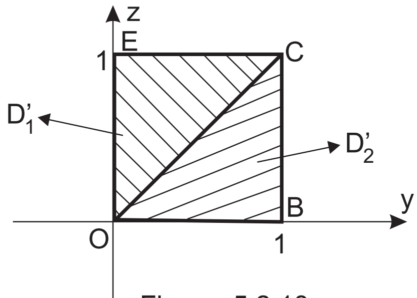

Figura 5.2.18

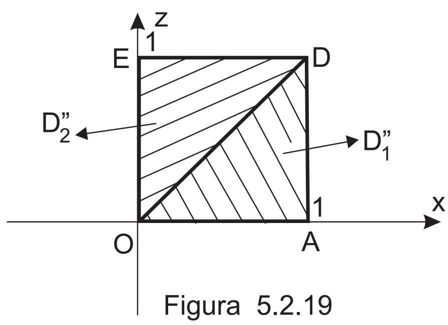

Figura 5.2.19

Rezultă astfel:

$$I = \iiint_{G_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \iiint_{G_2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \quad \text{unde:}$$

$$\iiint_{G_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{D_1'} dy\,dz \int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\,dx = \int_0^1 dy \int_y^1 dz \int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\,dx =$$
$$= \int_0^1 dz \int_0^z dy \int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\,dx,$$

iar:

$$\iiint_{G_2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{D_2'} dy\,dz \int_0^{1-y} f(x,y,z)\,dx = \int_0^1 dy \int_0^y dz \int_0^{1-y} f(x,y,z)\,dx =$$
$$= \int_0^1 dz \int_z^1 dy \int_0^{1-y} f(x,y,z)\,dx.$$

Dacă dorim să integrăm mai întâi în raport cu $y$, descompunem pe $G$ în $G = G_1' \cup G_2'$, unde $G_1' = ABOD$ şi $G_2' = DOBC$ sunt simple în raport cu axa $Oy$. Proiecţia lui $G_1'$ pe planul $Oxz$ este domeniul $D_1'' = AOD$, iar proiecţia lui $G_2'$ pe planul $Oxz$ este domeniul $D_2'' = DOE$ (vezi Figura 5.2.19). Deci:

$$(G_1') : \begin{cases} 0 \le y \le 1-x \\ (x,z) \in D_1'', \end{cases} \text{cu } (D_1'') : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le z \le x, \\ (\text{simplu } /Oz) \end{cases} \text{sau } (D_1'') : \begin{cases} 0 \le z \le 1 \\ z \le x \le 1, \\ (\text{simplu } /Ox), \end{cases} \text{iar:}$$

$$(G_2') : \begin{cases} z-x \le y \le 1-x \\ (x,z) \in D_2'' \end{cases} \text{cu } (D_2'') : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le z \le 1, \\ (\text{simplu } /Oz) \end{cases} \text{sau } (D_2'') : \begin{cases} 0 \le z \le 1 \\ 0 \le x \le z, \\ (\text{simplu } /Ox). \end{cases}$$

Rezultă:

$$I = \iiint_{G_1'} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \iiint_{G_2'} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \quad \text{unde:}$$

$$\iiint_{G_1'} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{D_1''} dx\,dz \int_0^{1-x} f(x,y,z)\,dy = \int_0^1 dx \int_0^x dz \int_0^{1-x} f(x,y,z,dy =$$
$$= \int_0^1 dz \int_z^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y,z)\,dy, \quad \text{iar:}$$

$$\iiint_{G_2'} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{D_2''} dx\,dz \int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)\,dy = \int_0^1 dx \int_x^1 dz \int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)\,dy =$$
$$= \int_0^1 dz \int_0^z dx \int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)\,dy.$$

b) Domeniul $G$ este:

$$(G) : \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1 \end{cases} \Rightarrow (G) : \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1 \\ (x,y) \in D, \ \text{(vezi Figura 5.2.20)}, \end{cases} \text{unde}$$

$$(D) : \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \ \text{(vezi Figura 5.2.21)}. \end{cases}$$

Domeniul $G$ a fost considerat simplu în raport cu axa $Oz$, iar $D$ simplu în raport cu axa $Oy$. Considerându-l pe $D$ simplu în raport cu axa $Ox$, obţinem:

$$I=\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iint_D dx\,dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)\,dz=$$
$$=\int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)\,dz.$$

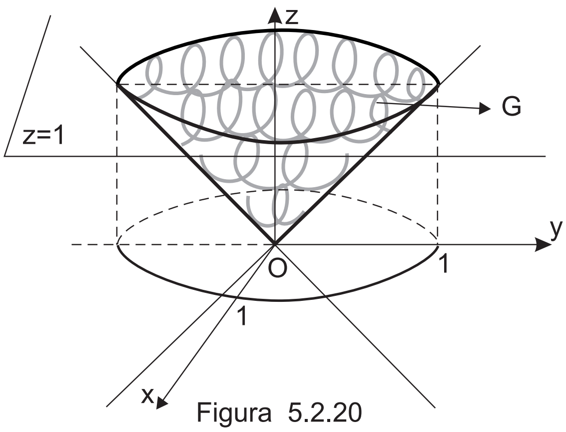

Figura 5.2.20

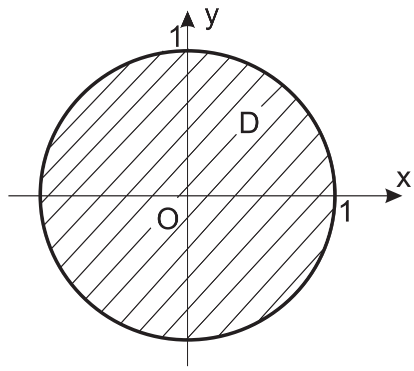

Figura 5.2.21

Domeniul $G$ este simplu şi în raport cu axa $Ox$, proiecţia sa pe planul $Oyz$ fiind domeniul $D_1$ (vezi Figura 5.2.22). Deci:

$(G):\begin{cases} -\sqrt{z^2-y^2}\le x\le\sqrt{z^2-y^2} \\ (y,z)\in D_1, \end{cases}$ unde $(D_1):\begin{cases} 0\le z\le 1 \\ -z\le y\le z, \text{ (simplu } /Oy) \end{cases}$

sau $D_1=D_1'\cup D_1''$ cu $D_1'=AOC$, $D_1''=OCB$, $(D_1'):\begin{cases} -1\le y\le 0 \\ -y\le z\le 1, \text{ (simplu } /Oz) \end{cases}$ şi

$(D_1''):\begin{cases} 0\le y\le 1 \\ y\le z\le 1, \text{ (simplu } /Oz). \end{cases}$

Rezultă astfel:

$$I=\iint_{D_1} dy\,dz\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx=\int_0^1 dz\int_{-z}^{z} dy\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx=$$
$$=\int_{-1}^0 dy\int_{-y}^1 dz\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx+\int_0^1 dy\int_y^1 dz\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx.$$

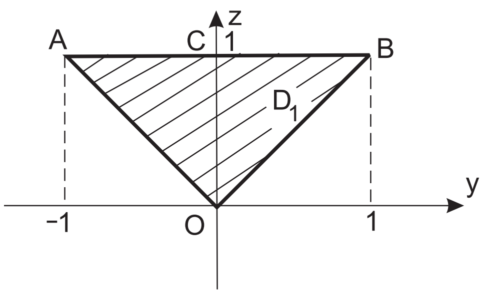

Figura 5.2.22

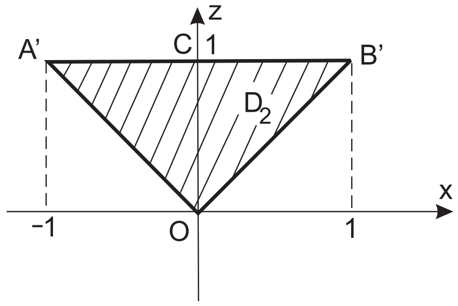

Figura 5.2.23

În mod asemănător $G$ este simplu şi faţă de axa $Oy$, proiecţia sa pe planul $Oxz$ fiind domeniul $D_2$ (vezi Figura 5.2.23). Deci:

$$(G): \begin{cases} -\sqrt{z^2-x^2} \le y \le \sqrt{z^2-x^2} \\ (x,z) \in D_2, \end{cases} \quad \text{unde } (D_2): \begin{cases} 0 \le z \le 1 \\ -z \le x \le z, \text{ (simplu } /Ox) \end{cases}$$

sau $D_2 = D_2' \cup D_2''$ cu $D_2' = A'OC$, $D_2'' = OB'C$, $(D_2'): \begin{cases} -1 \le x \le 0 \\ -x \le z \le 1, \text{ (simplu } /Oz) \end{cases}$ şi

$$(D_2''): \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le z \le 1, \text{ (simplu } /Oz). \end{cases}$$

Rezultă:

$$I = \iint_{D_2} dx\, dz \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)\, dy = \int_0^1 dz \int_{-z}^{z} dx \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)\, dy =$$

$$= \int_{-1}^{0} dx \int_{-x}^{1} dz \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)\, dy + \int_0^1 dx \int_x^1 dz \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)\, dy.$$

**5.** Să se calculeze volumele corpurilor limitate de următoarele suprafeţe:

a) $z^2 = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$, $2z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$; b) $\dfrac{x^2}{p^2} + \dfrac{y^2}{q^2} = 2z$, $z = ax + by + c$;

c) $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = x^2$;

d) $x^2 + z^2 = a^2$, $x + y = \pm a$, $x - y = \pm a$; e) $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$;

f) $z = x^2 + y^2$, $z = 2(x^2 + y^2)$, $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $x = 2y$, $2x = y$, $x > 0$, $y > 0$;

g) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{1/2} + \left(\dfrac{y}{b}\right)^{1/2} + \left(\dfrac{z}{c}\right)^{1/2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

h) $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$.

**Rezolvare.** a) Domeniul $G$ limitat de suprafeţele din enunţ este desenat în Figura 5.2.24, proiecţia sa pe planul $Oxy$ fiind domeniul $D$ desenat în Figura 5.2.25.

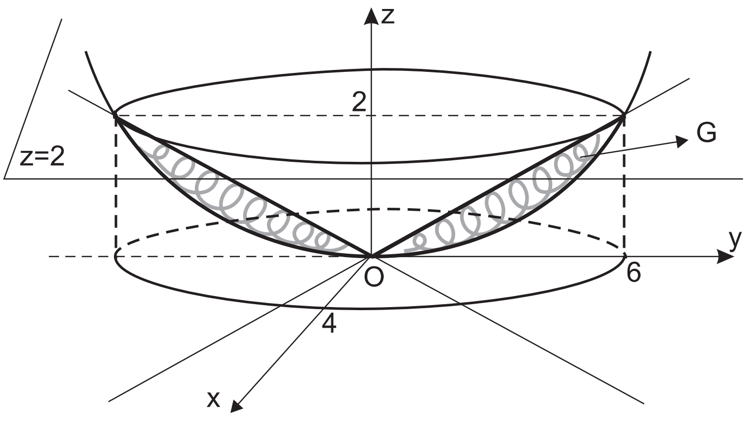


Figura 5.2.24

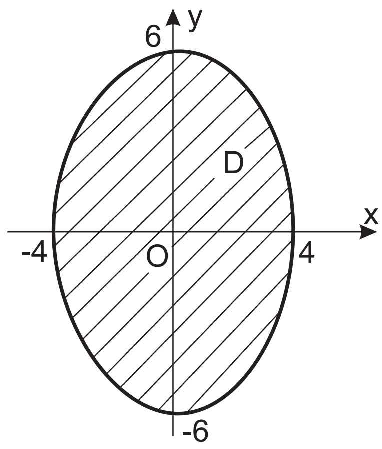


Figura 5.2.25

Intersecţia dintre paraboloid şi con este elipsa din planul $z = 2$ de ecuaţie $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 4$.

Deci $(D)$: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{36} - 1 \le 0$, iar $(G): \begin{cases} z_1(x,y) = \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{18} \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}} = z_2(x,y) \\ (x,y) \in D. \end{cases}$

Rezultă:

$$V(G)=\iiint_G dx\,dy\,dz=\iint_D dx\,dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}dz=\iint_D\left[\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)\right]dx\,dy.$$

Pentru a calcula integrala dublă de mai sus facem schimbarea de variabile $x=$ $=4r\cos\varphi$, $y=6r\sin\varphi$, $(r,\varphi)\in\widetilde{D}$, unde $(\widetilde{D}):\begin{cases}0\le r\le 1\\ 0\le\varphi\le 2\pi.\end{cases}$ Deci:

$$V(G)=\iint_{\widetilde{D}}(2r-2r^2)24r\,dr\,d\varphi=48\int_0^1 dr\int_0^{2\pi}(r^2-r^3)\,d\varphi=96\pi\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1=8\pi.$$

b) Domeniul $G$ este desenat în Figura 5.2.26. Intersecţia dintre paraboloid şi plan este o curbă (parabolă) care se proiectează în planul $Oxy$ într-o curbă $\Gamma$ a cărei ecuaţie o determinăm prin eliminarea lui $z$ din ecuaţiile paraboloidului şi planului: $\dfrac{x^2}{p^2}+\dfrac{y^2}{q^2}=$ $=2(ax+by+c)$. Rezultă:

$$(G):\begin{cases}z_1(x,y)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{p^2}+\dfrac{y^2}{q^2}\right)\le z\le ax+by+c=z_2(x,y)\\ (x,y)\in D,\end{cases}$$

unde $(D):\ \dfrac{x^2}{p^2}+\dfrac{y^2}{q^2}\le 2(ax+by+c)$. Obţinem astfel:

$$V(G)=\iiint_G dx\,dy\,dz=\iint_D dx\,dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}dz=\iint_D\left[ax+by+c-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}\right)\right]dx\,dy.$$

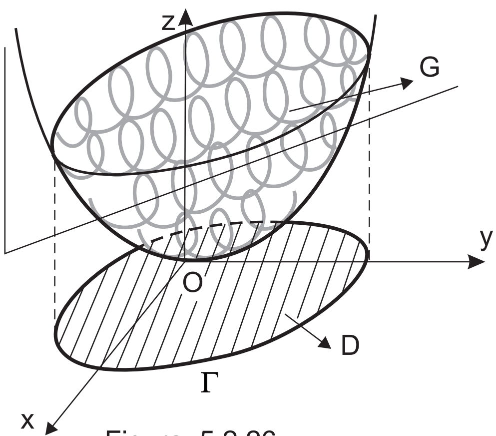

Figura 5.2.26

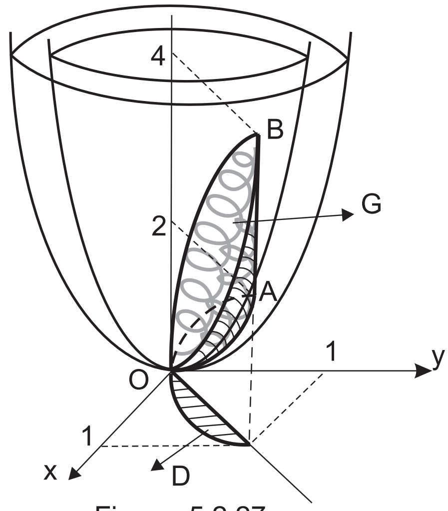

Figura 5.2.27

Pentru a calcula integrala dublă de mai sus scriem inegalitatea din definiţia domeniului $D$ în felul următor:

$$\frac{x^2}{p^2}-2ax+a^2p^2+\frac{y^2}{q^2}-2bq+b^2q^2-a^2p^2-b^2q^2-2c\le 0\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{x}{p}-ap\right)^2+\left(\frac{y}{q}-bq\right)^2\le a^2p^2+b^2q^2+2c.$$

Astfel facem schimbarea de variabile $\frac{x}{p} - ap = r\cos\varphi$, $\frac{y}{q} - bq = r\sin\varphi$, $(r,\varphi) \in D'$, unde $(D') : \begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{a^2p^2 + b^2q^2 + 2c} = r_0 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$ sau $x = p(ap + r\cos\varphi) = ap^2 + pr\cos\varphi$, $y = q(bq + r\sin\varphi) = bq^2 + qr\sin\varphi$. Avem $\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = pqr$, iar:

$$V(G) = \iint_D \left(-\frac{a^2p^2}{2} + ax - \frac{1}{2}\frac{x^2}{p^2} - \frac{b^2q^2}{2} + by - \frac{1}{2}\frac{y^2}{q^2} + \frac{a^2p^2}{2} + \frac{b^2q^2}{2} + c\right) dx\,dy =$$

$$= \iint_D \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{p} - ap\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{q} - bq\right)^2 + \frac{a^2p^2}{2} + \frac{b^2q^2}{2} + c\right] dx\,dy =$$

$$= \iint_{D'} \left(-\frac{r^2}{2} + \frac{a^2p^2}{2} + \frac{b^2q^2}{2} + c\right) pqr\,dr\,d\varphi = pq\pi \int_0^{r_0} (a^2p^2 + b^2q^2 + 2c - r^2)\,r\,dr =$$

$$= \frac{pq\pi}{4}(a^2p^2 + b^2q^2 + 2c)^2.$$

c) Domeniul $G$ este desenat în Figura 5.2.27, iar proiecţia sa pe planul $Oxy$ este domeniul $D$ (vezi Figura 5.2.28). Deci $(G) : \begin{cases} z_1(x,y) = x^2 + y^2 \le z \le 2(x^2 + y^2) = z_2(x,y) \\ (x,y) \in D, \end{cases}$

unde $(D) : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le x. \end{cases}$

Domeniul $G$ văzut dinspre partea pozitivă a axei $Oy$ arată ca în Figura 5.2.29.

Rezultă:

$$V(G) = \iiint_G dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz = \iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x^2 + y^2)\,dy = \int_0^1 \left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3}\right) dx = \frac{3}{35}.$$

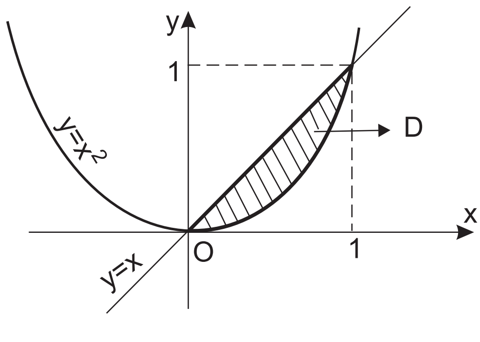

Figura 5.2.28

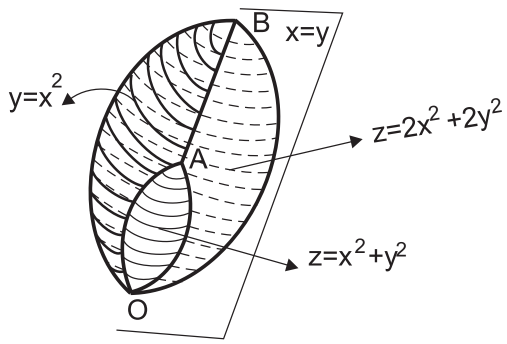

Figura 5.2.29

d) Domeniul $G$ este desenat în Figura 5.2.30. şi el este cuprins între cele 4 "petale" (vezi de asemenea Figura 5.2.31).

Avem $V(G) = 4V(G_1)$, unde $G_1$ este corpul cuprins între triunghiul curbiliniu $ABE$ şi petala $AED$ $(y > 0,\ z > 0)$. Mai precis $V(G) = 8V(G_2)$, unde $G_2$ este corpul cuprins

între triunghiul curbiliniu $ABO$ şi jumătatea de petală $ADO$ ($DO$ - segment de dreaptă, $x,\ y,\ z > 0$).

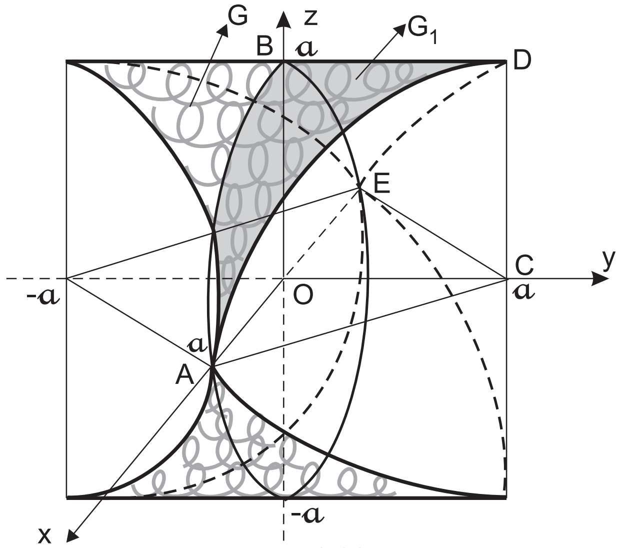


Figura 5.2.30

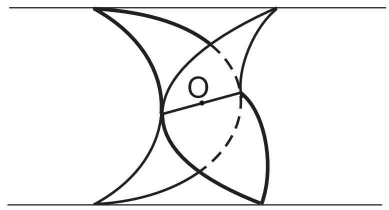


Figura 5.2.31

Proiectăm pe $G_2$ pe planul $Oxz$ (el este simplu în raport cu axa $Oy$) şi obţinem:

$(G_2) : \begin{cases} 0 \le y \le a - x \\ (x,z) \in D, \end{cases}$ unde $(D) : \begin{cases} x^2 + z^2 \le a^2 \\ x,\ z \ge 0, \text{ (Figura 5.2.32).} \end{cases}$

Rezultă:

$$V(G) = 8 \iint_D dx\,dz \int_0^{a-x} dy = 8 \iint_D (a-x)\,dx\,dz = 8 \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (a-x)\,dz =$$

$$= 8 \int_0^a (a-x)\sqrt{a^2-x^2}\,dx \overset{x=a\sin t}{=} 8a^3 \int_0^{\pi/2} (1-\sin t)\,\cos^2 t\,dt = 8a^3 \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt +$$

$$+ 8a^3 \left.\frac{\cos^3 t}{3}\right|_0^{\pi/2} = \frac{2a^3}{3}(3\pi - 4).$$

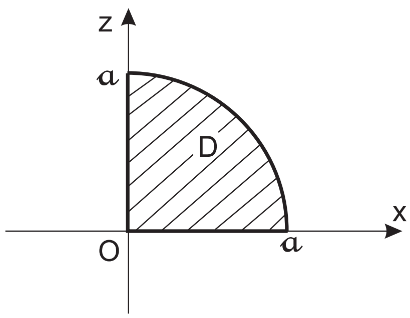


Figura 5.2.32

e) Domeniul $G$ este $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 \le \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, iar $V(G) = \iiint_G dx\,dy\,dz$. Pentru a calcula integrala triplă de mai sus facem schimbarea de variabile $x = ar\cos\varphi\sin\theta$, $y = br\sin\varphi\sin\theta$, $z = cr\cos\theta$. Introducând aceste relaţii în inegalitatea care defineşte domeniul $G$ obţinem:

$$r^4 \le r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta \Rightarrow r^2 \le \sin^2\theta \Rightarrow r \le \sin\theta.$$

Deci $(r,\varphi,\theta) \in \widetilde{G}$, unde $(\widetilde{G}) : \ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le \sin\theta,\ 0 \le \theta \le \pi$. Deoarece $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = abcr^2\sin\theta$, rezultă că:

$$V(G) = \iiint_{\widetilde{G}} abcr^2\sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta = abc\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\int_0^{sin\,\theta} r^2\, dr =$$

$$= 2abc\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin^4\theta}{3}\, d\theta = \frac{\pi abc}{6}\int_0^{\pi}(1-\cos 2\theta)^2\, d\theta = \frac{\pi abc}{6}\int_0^{\pi}(1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{\pi^2 abc}{4}.$$

f) Domeniul $G$ este desenat în Figura 5.2.33, unde $\overset{\frown}{AB},\ \overset{\frown}{EF} \in (P_1)$, $(P_1) : \ z = x^2+y^2$, iar $\overset{\frown}{CD},\ \overset{\frown}{GH} \in (P_2)$, $(P_2) : \ z = 2(x^2+y^2)$. Făcând intersecţia dintre diferite suprafeţe care mărginesc domeniul $G$ obţinem punctele:

$A\left(a\sqrt{2}, \dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{5a^2}{2}\right)$, $B\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, a\sqrt{2}, \dfrac{5a^2}{2}\right)$, $C\left(a\sqrt{2}, \dfrac{a}{\sqrt{2}}, 5a^2\right)$, $D\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, a\sqrt{2}, 5a^2\right)$,
$E(2a, a, 5a^2)$, $F(a, 2a, 5a^2)$, $G(2a, a, 10a^2)$, $H(a, 2a, 10a^2)$.

Obţinem $(G) : \begin{cases} z_1(x,y) = x^2+y^2 \le z \le 2(x^2+y^2) = z_2(x,y) \\ (x,y) \in D, \end{cases}$ unde domeniul $D$ este mărginit de $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $x = 2y$, $2x = y$, (vezi Figura 5.2.34).

Rezultă: $V(G) = \iiint_G dx\, dy\, dz = \iint_D dx\, dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz = \iint_D (x^2+y^2)\, dx\, dy.$

Pentru a calcula integrala dublă de mai sus facem schimbarea de variabile $xy = u$, $\dfrac{y}{x} = v \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{u}{v}}$, $y = \sqrt{uv}$, $(u,v) \in \widetilde{D}$, unde $(\widetilde{D}) : \begin{cases} a^2 \le u \le 2a^2 \\ \frac{1}{2} \le v \le 2. \end{cases}$

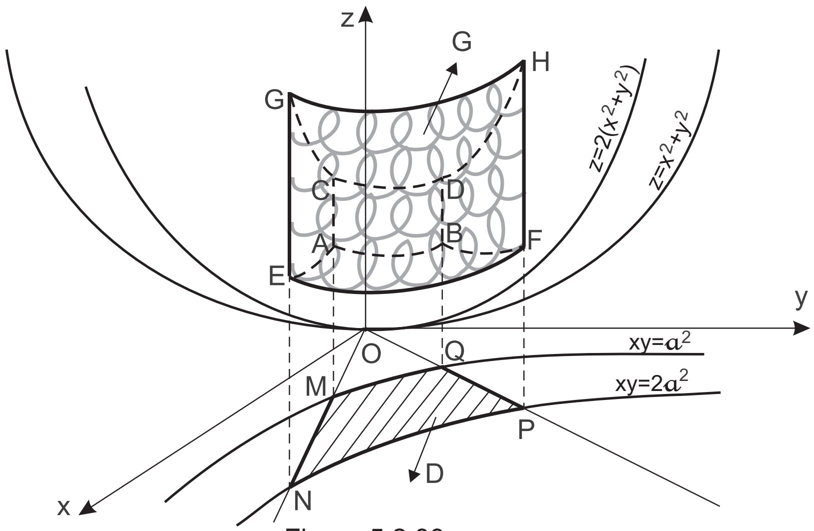

Figura 5.2.33

Deoarece $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \dfrac{1}{2v}$, rezultă:

$$V(G)=\int_{a^2}^{2a^2}du\int_{1/2}^{2}\frac{1}{2v}\left(\frac{u}{v}+uv\right)dv=\frac{1}{2}\int_{a^2}^{2a^2}du\int_{1/2}^{2}\left(\frac{u}{v^2}+u\right)dv=$$
$$=\frac{1}{2}\int_{a^2}^{2a^2}\left(-\frac{u}{v}+uv\right)\Big|_{v=1/2}^{v=2}du=\frac{1}{2}\int_{a^2}^{2a^2}3u\,du=\frac{9a^4}{4}.$$

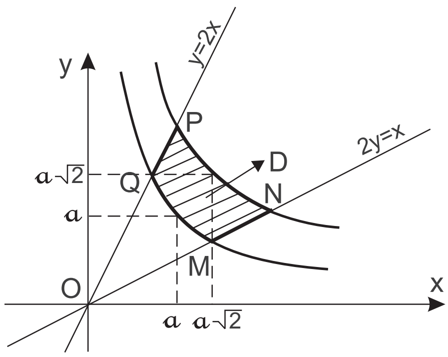


Figura 5.2.34

*Observaţie.* Integrala triplă de mai sus o mai putem calcula făcând schimbarea de variabile: $\begin{cases} xy=u\\ \dfrac{y}{x}=v\\ \dfrac{x^2+y^2}{z}=w\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{u}{v}}\\ y=\sqrt{uv}\\ z=\dfrac{u+uv^2}{vw},\ (u,v,w)\in\widetilde{G},\end{cases}$ unde $(\widetilde{G}):\begin{cases} a^2\le u\le 2a^2\\ \frac{1}{2}\le v\le 2\\ \frac{1}{2}\le w\le 1.\end{cases}$

Deoarece $\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\dfrac{-u(1+v^2)}{2v^2w^2}$, rezultă că:

$$V(G)=\iiint_{\widetilde{G}}\frac{u(1+v^2)}{2v^2w^2}\,du\,dv\,dw=\frac{1}{2}\left(\int_{a^2}^{2a^2}u\,du\right)\left(\int_{1/2}^{2}\frac{1+v^2}{v^2}\,dv\right)\left(\int_{1/2}^{1}\frac{1}{w^2}\,dw\right)=$$
$$=\frac{3a^4}{4}\left(-\frac{1}{v}+v\right)\Big|_{1/2}^{2}\left(-\frac{1}{w}\right)\Big|_{1/2}^{1}=\frac{9a^4}{4}.$$

g) Domeniul $G$ este desenat în Figura 5.2.35. Facem schimbarea de variabile:

$$\begin{cases} x=ar^4\cos^4\varphi\sin^4\theta\\ y=br^4\sin^4\varphi\sin^4\theta\\ z=cr^4\cos^4\theta,\ \ (r,\varphi,\theta)\in\widetilde{G},\end{cases}\quad \text{unde } (\widetilde{G}):\begin{cases} 0\le r\le 1\\ 0\le\varphi\le\pi/2\\ 0\le\theta\le\pi/2.\end{cases}$$

Avem: $V(G)=\iiint_G dx\,dy\,dz=\iiint_{\widetilde{G}}\left|\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}\right|dr\,d\varphi\,d\theta.$

Calculăm determinantul funcţional; obţinem $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}=64abcr^{11}\sin^3\varphi\cos^3\varphi\sin^7\theta\cos^3\theta.$
Deci:

$$V(G)=\iiint_{\widetilde{G}}64abcr^{11}\sin^3\varphi\cos^3\varphi\sin^7\theta\cos^3\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta=64abc\cdot\frac{1}{12}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^3 2\varphi}{8}d\varphi\times$$
$$\times\int_0^{\pi/2}\sin^7\theta\cdot\cos^3\theta\,d\theta=\frac{16abc}{3}\int_0^{\pi/2}\frac{(1-\cos^2 2\varphi)(-\cos 2\varphi)'}{16}d\varphi\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^7\theta(1-\sin^2\theta)\times$$
$$\times(\sin\theta)'d\theta=\frac{abc}{3}\left(-\cos 2\varphi+\frac{\cos^3 2\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2}\cdot\left(\frac{\sin^8\theta}{8}-\frac{\sin^{10}\theta}{10}\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{abc}{90}.$$

h) Din cauza simetriilor faţă de axele $Ox$, $Oy$, $Oz$, $V = 8V_1$, unde $V_1$ este volumul lui $G_1$, desenat în Figura 5.2.36. Suprafaţa $MAS$ este a cilindrului $y^2+z^2 = a^2$, iar suprafaţa $APM$ este a cilindrului $x^2+z^2 = a^2$. Descompunem pe $G_1$ în $MOSA$ şi $MOAP$. Rezultă:

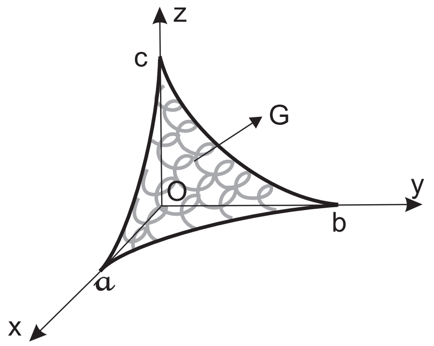


Figura 5.2.35

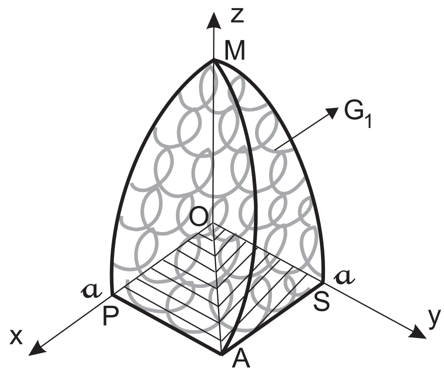


Figura 5.2.36

$$V = 8\iiint_{G_1} dx\,dy\,dz = 8\left[\iiint_{MOSA} dx\,dy\,dz + \iiint_{MOAP} dx\,dy\,dz\right] =$$

$$=8\left[\iint_{(AOS)} dx\,dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} dz+\iint_{(AOP)} dx\,dy\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dz\right] = 8\left[\iint_{(AOS)}\sqrt{a^2-y^2}\,dx\,dy+\right.$$

$$\left.+\iint_{(AOP)}\sqrt{a^2-x^2}\,dx\,dy\right] = 8\left[\int_0^a \sqrt{a^2-y^2}\,dy\int_0^y dx + \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx\int_0^x dy\right] =$$

$$= 8\left[\int_0^a y\sqrt{a^2-y^2}\,dy + \int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx\right] = 16\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -8\left.\frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{3/2}\right|_0^a =$$

$$= \frac{16a^3}{3}.$$

**6.** Să se calculeze masa şi coordonatele centrelor de greutate ale corpurilor omogene ($\varrho = \varrho_0$) mărginite de următoarele suprafeţe:

a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$, $z = c$; b) $z = x^2 + y^2$, $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

**Rezolvare.** a) Avem $M(G) = \iiint_G \varrho_0\,dx\,dy\,dz = \varrho_0\iiint_G dx\,dy\,dz = \varrho_0 V(G)$. Domeniul $G$ este desenat în Figura 5.2.37. Deci $(G):\begin{cases} z_0(x,y) = c\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}} \le z \le c \\ (x,y)\in D,\end{cases}$

unde $(D):\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$, (vezi Figura 5.2.38).

Obţinem:

$$M(G) = \varrho_0\iint_D dx\,dy\int_{z_0(x,y)}^c dz = \varrho_0\iint_D\left(c - c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right)dx\,dy.$$

Pentru a calcula integrala dublă de mai sus facem schimbarea de variabile $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$, $(r,\varphi)\in\widetilde{D}$, unde $(\widetilde{D}):\ 0\le r\le 1,\ 0\le\varphi\le 2\pi$. Rezultă astfel că:

$$M(G) = \varrho_0 c \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} (1-r)abr\, dr\, d\varphi = 2abc\pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{abc\varrho_0\pi}{3}.$$

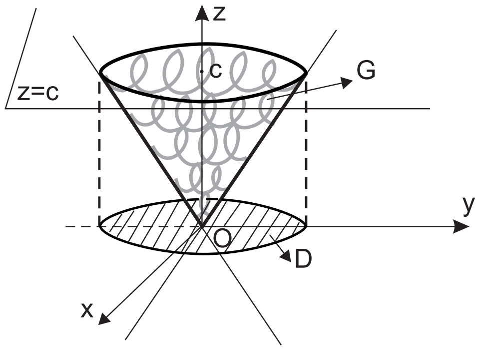

Figura 5.2.37

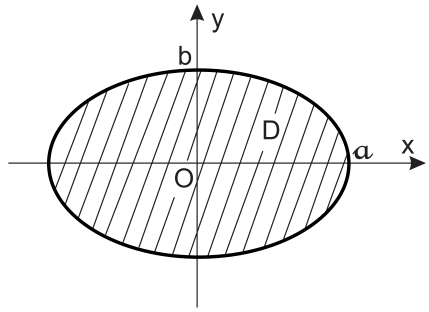

Figura 5.2.38

Coordonatele centrului de greutate al corpului $G$ sunt:

$$x_0 = \frac{1}{M}\iiint_G x\varrho_0\, dx\, dy\, dz = \frac{\varrho_0}{M}\iiint_G x\, dx\, dy\, dz = \frac{\varrho_0}{M}\iint_D x\, dx\, dy \int_{z_0(x,y)}^{c} dz =$$

$$= \frac{\varrho_0 c}{M}\iint_D x\left(1 - \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right) dx\, dy = \frac{\varrho_0 c}{M}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 ar\cos\varphi(1-r)abr\, dr =$$

$$= \frac{a^2bc\varrho_0}{M}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi \cdot \int_0^1 r^2(1-r)\, dr = 0,$$

$$y_0 = \frac{1}{M}\iiint_G y\varrho_0\, dx\, dy\, dz = \frac{\varrho_0}{M}\iiint_G y\, dx\, dy\, dz = \frac{\varrho_0}{M}\iint_D y\, dx\, dy \int_{z_0(x,y)}^{c} dz =$$

$$= \frac{\varrho_0 c}{M}\iint_D y\left(1 - \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right) dx\, dy = \frac{\varrho_0 c}{M}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 br\sin\varphi(1-r)abr\, dr = 0,$$

$$z_0 = \frac{1}{M}\iiint_G z\varrho_0\, dx\, dy\, dz = \frac{\varrho_0}{M}\iiint_G z\, dx\, dy\, dz = \frac{\varrho_0}{M}\iint_D dx\, dy \int_{z_0(x,y)}^{c} z\, dz =$$

$$= \frac{\varrho_0}{2M}\iint_D \left[c^2 - c^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\right] dx\, dy = \frac{\varrho_0 c^2}{2M}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1-r^2)abr\, dr = \frac{\varrho_0 c^2 ab\pi}{4M} = \frac{3c}{4}.$$

Deci $x_0 = y_0 = 0, \quad z_0 = \dfrac{3c}{4}.$

b) Domeniul $G$ este desenat în Figura 5.2.39. Avem:

$$(G): \begin{cases} 0 \le z \le x^2 + y^2 = z_0(x,y) \\ (x,y) \in D, \end{cases} \quad \text{unde } (D): \begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le a - x, \ \text{(Figura 5.2.40).} \end{cases}$$

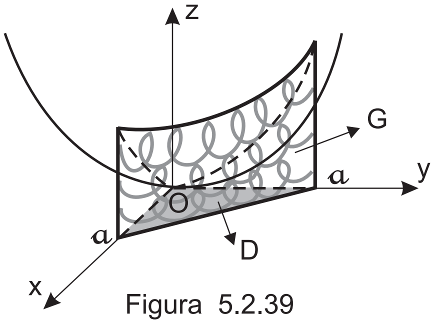

Figura 5.2.39

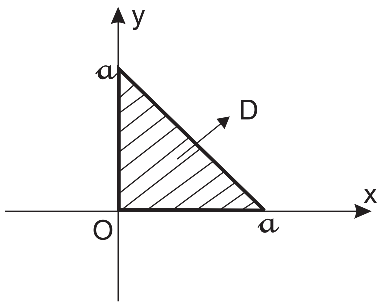

Figura 5.2.40

Rezultă:

$$M = \iiint_G \varrho_0\, dx\, dy\, dz = \varrho_0 \iint_D dx\, dy \int_0^{z_0(x,y)} dz = \varrho_0 \iint_D (x^2+y^2)\, dx\, dy =$$
$$= \varrho_0 \int_0^a dx \int_0^{a-x} (x^2+y^2)\, dy = \varrho_0 \int_0^a \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=0}^{y=a-x} dx = \varrho_0 \int_0^a \Big[x^2(a-x)+$$
$$+\frac{1}{3}(a-x)^3\Big]\, dx = \varrho_0 \left[a\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{12}(a-x)^4\right]\Big|_0^a = \frac{\varrho_0 a^4}{6}.$$

Coordonatele centrului de greutate al corpului $G$ sunt:

$$x_0 = \frac{1}{M}\iiint_G x\varrho_0\, dx\, dy\, dz = \frac{\varrho_0}{M}\iiint_G x\, dx\, dy\, dz = \frac{\varrho_0}{M}\iint_D x\, dx\, dy \int_0^{z_0(x,y)} dz =$$
$$= \frac{\varrho_0}{M}\iint_D x(x^2+y^2)\, dx\, dy = \frac{\varrho_0}{M}\int_0^a dx \int_0^{a-x} (x^3+xy^2)\, dy = \frac{\varrho_0}{M}\int_0^a \left(x^3 y + \frac{xy^3}{3}\right)\Big|_{y=0}^{y=a-x} dx =$$
$$= \frac{\varrho_0}{M}\int_0^a \left[x^3(a-x) + \frac{x(a-x)^3}{3}\right] dx = \frac{\varrho_0 a^5}{15M} = \frac{2a}{5},$$

$$y_0 = \frac{1}{M}\iiint_G y\varrho_0\, dx\, dy\, dz = \frac{\varrho_0}{M}\iiint_G y\, dx\, dy\, dz = \frac{\varrho_0}{M}\iint_D y\, dx\, dy \int_0^{z_0(x,y)} dz =$$
$$= \frac{\varrho_0}{M}\iint_D y(x^2+y^2)\, dx\, dy = \frac{\varrho_0}{M}\int_0^a dx \int_0^{a-x} (x^2 y + y^3)\, dy = \frac{\varrho_0}{M}\int_0^a \left(x^2\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4}\right)\Big|_{y=0}^{y=a-x} dx =$$
$$= \frac{\varrho_0}{M}\int_0^a \left[\frac{x^2}{2}(a-x)^2 + \frac{(a-x)^4}{4}\right] dx = \frac{\varrho_0 a^5}{15M} = \frac{2a}{5},$$

$$z_0 = \frac{1}{M}\iiint_G z\varrho_0\, dx\, dy\, dz = \frac{\varrho_0}{M}\iint_D dx\, dy \int_0^{z_0(x,y)} z\, dz = \frac{\varrho_0}{2M}\iint_D (x^2+y^2)^2\, dx\, dy =$$
$$= \frac{\varrho_0}{2M}\int_0^a dx \int_0^{a-x} (x^4 + 2x^2y^2 + y^4)\, dy = \frac{\varrho_0}{2M}\int_0^a \left(x^4 y + \frac{2x^2y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right)\Big|_{y=0}^{y=a-x} dx =$$
$$= \frac{\varrho_0}{2M}\int_0^a \left[x^4(a-x) + \frac{2}{3}x^2(a-x)^3 + \frac{(a-x)^5}{5}\right] dx = \frac{7a^6\varrho_0}{180M} = \frac{7a^2}{30}.$$

Deci $\quad x_0 = y_0 = \dfrac{2a}{5}, \quad z_0 = \dfrac{7a^2}{30}.$

**7.** Să se determine momentele de inerţie în raport cu planele de coordonate ale corpului omogen mărginit de următoarele suprafeţe:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a}, \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le \frac{x}{a}\right), \quad \varrho = \varrho_0.$$

**Rezolvare.** Domeniul $G$ este desenat în Figura 5.2.41; el este limitat de elipsoid şi de cilindrul $\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{1}{4}$. Avem:

$$(G): \begin{cases} z_1(x,y) = -c\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}} \le z \le c\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}} = z_2(x,y) \\ (x,y) \in D, \end{cases}$$

unde $(D):\ \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{y^2}{b^2} \le \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{\frac{a^2}{4}} + \dfrac{y^2}{\frac{b^2}{4}} \le 1,$ (vezi Figura 5.2.42).

Rezultă atunci:

$$I_{xy}=\iiint_G \varrho_0 z^2\,dx\,dy\,dz=\varrho_0\iint_D dx\,dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} z^2\,dz=\frac{2\varrho_0 c^3}{3}\iint_D\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{3/2}dx\,dy.$$

Folosind coordonatele polare $x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$, obţinem noul domeniu plan $(\widetilde{D}):\begin{cases}-\pi/2\le\varphi\le\pi/2\\ 0\le r\le\cos\varphi.\end{cases}$ Deducem:

$$I_{xy}=\frac{2\varrho_0c^3}{3}\iint_{\widetilde{D}}(1-r^2)^{3/2}abr\,dr\,d\varphi=\frac{2\varrho_0abc^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\cos\varphi}(1-r^2)^{3/2}r\,dr=$$
$$=\frac{2\varrho_0abc^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[-\frac{1}{2}\,\frac{(1-r^2)^{5/2}}{5/2}\right]\Big|_0^{\cos\varphi}d\varphi=\frac{2\varrho_0abc^3}{15}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin^5\varphi)\,d\varphi=\frac{2\varrho_0abc^3}{15}\Big[\pi+$$
$$+\left(\cos\varphi-\frac{2}{3}\cos^3\varphi+\frac{\cos^5\varphi}{5}\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big]=\frac{2\varrho_0abc^3\pi}{15}.$$

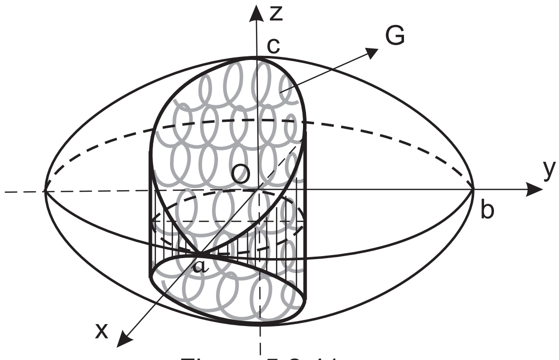

Figura 5.2.41

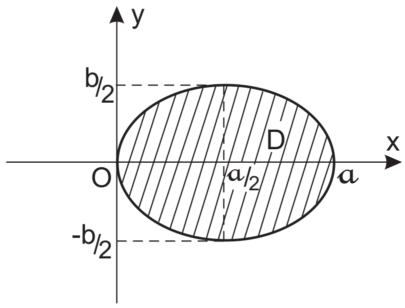

Figura 5.2.42

Apoi:

$$I_{yz}=\iiint_G\varrho_0x^2\,dx\,dy\,dz=\varrho_0\iint_D x^2\,dx\,dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}dz=2c\varrho_0\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,x^2\,dx\,dy=$$
$$=2c\varrho_0\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\cos\varphi}a^2r^2\cos^2\varphi\sqrt{1-r^2}abr\,dr=2a^3bc\varrho_0\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\varphi\int_0^{\cos\varphi}(r^3-r+$$
$$+r)\sqrt{1-r^2}\,dr=2a^3bc\varrho_0\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\varphi\left[\frac{1}{2}\,\frac{(1-r^2)^{5/2}}{5/2}-\frac{1}{2}\,\frac{(1-r^2)^{3/2}}{3/2}\right]\Big|_0^{\cos\varphi}d\varphi=$$
$$=2a^3bc\varrho_0\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\varphi\left(\frac{\sin^5\varphi}{5}-\frac{\sin^3\varphi}{3}+\frac{2}{15}\right)d\varphi=2a^3bc\varrho_0\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big[\left(-\frac{1}{5}\right)(\cos\varphi)'(\cos^2\varphi-$$
$$-2\cos^4\varphi+\cos^6\varphi)+\frac{(\cos\varphi)'}{3}(\cos^2\varphi-\cos^4\varphi)+\frac{2}{15}\,\frac{1+\cos2\varphi}{2}\Big]\,d\varphi=\frac{2a^3bc\pi\varrho_0}{15},$$

$$I_{xz}=\iiint_G\varrho_0y^2\,dx\,dy\,dz=\varrho_0\iint_D y^2\,dx\,dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}dz=2\varrho_0c\iint_D y^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy=$$
$$=2\varrho_0c\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\cos\varphi}b^2r^2\sin^2\varphi\sqrt{1-r^2}abr\,dr=2\varrho_0ab^3c\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2\varphi\int_0^{\cos\varphi}(r^3-r+$$
$$+r)\sqrt{1-r^2}\,dr=2\varrho_0ab^3c\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2\varphi\left[\frac{1}{2}\,\frac{(1-r^2)^{5/2}}{5/2}-\frac{1}{2}\,\frac{(1-r^2)^{3/2}}{3/2}\right]\Big|_0^{\cos\varphi}=$$
$$=2\varrho_0ab^3c\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2\varphi\left(\frac{\sin^5\varphi}{5}-\frac{\sin^3\varphi}{3}+\frac{2}{15}\right)d\varphi=2\varrho_0ab^3c\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big[-\frac{(\cos\varphi)'}{5}(1-3\cos^2\varphi+$$

$$+3\cos^4\varphi-\cos^6\varphi)+\frac{1}{3}(\cos\varphi)'(1-2\cos^2\varphi+\cos^4\varphi)+\frac{2}{15}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\Big]\,d\varphi=\frac{2\varrho_0 ab^3c\pi}{15}.$$

Deci $I_{xy}=\dfrac{2\varrho_0 abc^3\pi}{15}$, $I_{yz}=\dfrac{2\varrho_0 a^3bc\pi}{15}$, $I_{xz}=\dfrac{2\varrho_0 ab^3c\pi}{15}$.

**8.** Să se afle momentul de inerţie al corpului omogen mărginit de un con circular de înălţime $h$ şi de rază $r_0$:

a) în raport cu axa lui;

b) în raport cu planul dus prin vârf şi paralel cu baza, ($\varrho=\varrho_0$).

**Rezolvare.** Luând axa conului axa $Oz$, obţinem corpul din Figura 5.2.43; avem:

$$(G):\begin{cases} z_0(x,y)=\dfrac{h}{r_0}\sqrt{x^2+y^2}\le z\le h\\ (x,y)\in D,\end{cases}\quad \text{unde } (D):\ x^2+y^2\le r_0^2.$$

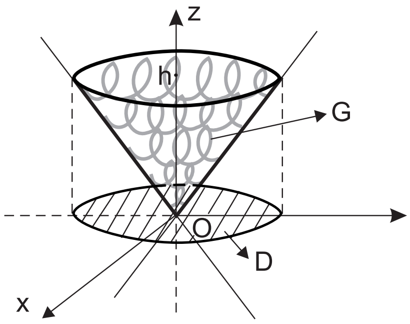


Figura 5.2.43

a) Momentul de inerţie al conului în raport cu axa sa, adică axa $Oz$ este:

$$I_z=\iiint_G \varrho_0(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz=\varrho_0\iiint_G(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz=\varrho_0\iint_D(x^2+y^2)\,dx\,dy\int_{z_0(x,y)}^h dz=$$
$$=\varrho_0\iint_D(x^2+y^2)\left(h-\frac{h}{r_0}\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy.$$

Facem schimbarea de variabile $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $(r,\varphi)\in\widetilde{D}$, unde $(\widetilde{D}):\ 0\le$ $\le r\le r_0$, $0\le\varphi\le 2\pi$. Obţinem:

$$I_z=\varrho_0\iint_{\widetilde{D}} r^2\left(h-\frac{rh}{r_0}\right)r\,dr\,d\varphi=2\pi\varrho_0\left(\frac{hr^4}{4}-\frac{r^5h}{5r_0}\right)\Big|_0^{r_0}=\frac{\pi\varrho_0 hr_0^4}{10}=\frac{3}{10}Mr_0^2,$$

unde $M=\varrho_0 V=\varrho_0\dfrac{\pi r_0^2h}{3}$.

b) Planul dus prin vârful conului şi paralel cu baza este planul $Oxy$. Deci:

$$I_{xy}=\iiint_G \varrho z^2\,dx\,dy\,dz=\varrho_0\iiint_G z^2\,dx\,dy\,dz=\varrho_0\iint_D dx\,dy\int_{z_0(x,y)}^h z^2\,dz=$$
$$=\frac{\varrho_0h^3}{3}\iint_D\left[1-\frac{1}{r_0^3}(x^2+y^2)^{3/2}\right]dx\,dy.$$

Cu coordonate polare obţinem:

$$I_{xy}=\frac{\varrho_0h^3}{3}\iint_{\widetilde{D}}\left(1-\frac{r^3}{r_0^3}\right)r\,dr\,d\varphi=\frac{2\pi\varrho_0h^3}{3}\left(\frac{r_0^2}{2}-\frac{1}{r_0^3}\frac{r_0^5}{5}\right)=\frac{\pi\varrho_0h^3r_0^2}{5}=\frac{3}{5}Mh^2.$$

**9.** Să se determine momentele de inerţie în raport cu axele de coordonate, precum şi în raport cu originea coordonatelor ale corpului omogen mărginit de suprafeţele:

$$z = x^2 + y^2, \quad x + y = \pm 1, \quad x - y = \pm 1, \quad z = 0, \quad (\varrho = \varrho_0).$$

**Rezolvare.** Domeniul $G$ este $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (vezi Figura 5.2.44) şi se proiectează pe planul $Oxy$ în domeniul $D$ (vezi Figura 5.2.45). Deci $(G) : \begin{cases} 0 \le z \le x^2+y^2 = z_0(x,y) \\ (x,y) \in D, \end{cases}$

unde $D = D_1 \cup D_2$, $(D_1) : \begin{cases} -1 \le x \le 0 \\ -1 - x \le y \le 1 + x, \end{cases}$ $\quad (D_2) : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x - 1 \le y \le 1 - x. \end{cases}$

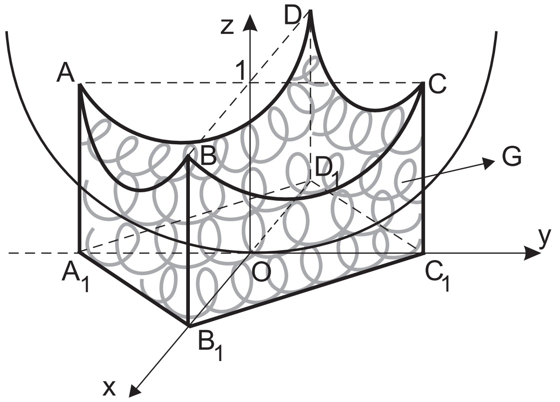


Figura 5.2.44

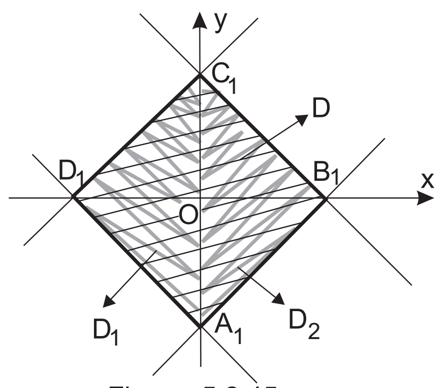


Figura 5.2.45

Calculăm mai întâi momentele de inerţie în raport cu planele de coordonate. Avem:

$$I_{xy} = \iiint_G \varrho_0 z^2\,dx\,dy\,dz = \varrho_0 \iint_D dx\,dy \int_0^{z_0(x,y)} z^2\,dz = \varrho_0 \iint_D \frac{(x^2+y^2)^3}{3}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{\varrho_0}{3} \iint_{D_1} (x^2+y^2)^3\,dx\,dy + \frac{\varrho_0}{3} \iint_{D_2} (x^2+y^2)^3\,dx\,dy = \frac{\varrho_0}{3} \int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} (x^2+y^2)^3\,dy +$$

$$+ \frac{\varrho_0}{3} \int_{-1}^0 dx \int_{-1-x}^{1+x} (x^2+y^2)^3\,dy = \frac{2}{3}\varrho_0 \int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} (x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6)\,dy =$$

$$= \frac{2\varrho_0}{3} \int_0^1 \left( x^6 y + x^4 y^3 + \frac{3}{5} x^2 y^5 + \frac{y^7}{7} \right) \Bigg|_{y=x-1}^{y=1-x} dx = \frac{4\varrho_0}{3} \int_0^1 \Big[ x^6(1-x) + x^4(1-x)^3 +$$

$$+ \frac{3}{5} x^2 (1-x)^5 + \frac{1}{7}(1-x)^7 \Big]\,dx \simeq 0,057\varrho_0.$$

Apoi:

$$I_{yz} = \iiint_G \varrho_0 x^2\,dx\,dy\,dz = \varrho_0 \iint_D x^2\,dx\,dy \int_0^{z_0(x,y)} dz = \varrho_0 \iint_D x^2(x^2+y^2)\,dx\,dy =$$

$$= 4\varrho_0 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^4 + x^2y^2)\,dy = 4\varrho_0 \int_0^1 \left[ x^4(1-x) + \frac{x^2}{3}(1-x)^3 \right] dx \simeq 0,156\varrho_0,$$

$$I_{xz} = \iiint_G \varrho_0 y^2\,dx\,dy\,dz = \varrho_0 \iint_D y^2\,dx\,dy \int_0^{z_0(x,y)} dz = \varrho_0 \iint_D y^2(x^2+y^2)\,dx\,dy =$$

$$= 4\varrho_0 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (y^2x^2 + y^4)\,dy = 4\varrho_0 \int_0^1 \left[ \frac{x^2(1-x)^3}{3} + \frac{(1-x)^5}{5} \right] dx \simeq 0,156\varrho_0.$$

Rezultă că momentele de inerţie în raport cu axele de coordonate sunt:

$$I_x = I_{xy} + I_{xz} \simeq 0,213\varrho_0, \quad I_y = I_{xy} + I_{yz} \simeq 0,213\varrho_0, \quad I_z = I_{xz} + I_{yz} \simeq 0,311\varrho_0,$$

iar momentul de inerţie în raport cu originea coordonatelor este:

$$I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{xz} \simeq 0,368\varrho_0.$$

**10.** Să se calculeze momentul de inerţie în raport cu dreapta $(d): \ x = y = z$ al corpului omogen mărginit de cilindrul $x^2 + y^2 = a^2$ şi planele $z = \pm h$, de densitate $\varrho_0$.

**Rezolvare.** Domeniul $G$ este desenat în Figura 5.2.46, proiecţia sa pe planul $Oxy$ fiind domeniul $D$ (vezi Figura 5.2.47). Deci $(G): \begin{cases} -h \le z \le h \\ (x,y) \in D, \end{cases}$ unde $(D): \ x^2+y^2 \le a^2$.

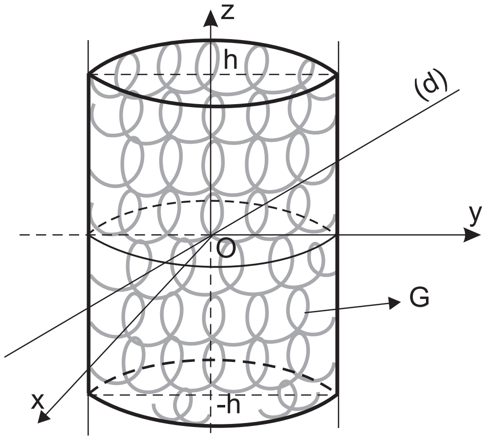

Figura 5.2.46

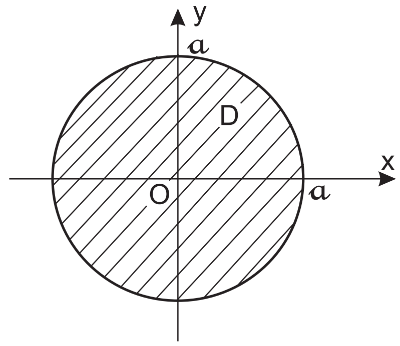

Figura 5.2.47

Direcţia dreptei $(d)$ fiind dată de vectorul $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, rezultă că distanţa de la un punct arbitrar $M(x,y,z)$ la dreapta $(d)$ este:

$$r = \operatorname{dist}(M,(d)) = \frac{\|\vec{MO} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\|(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \times (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})\|}{\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{\sqrt{(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2}}{\sqrt{3}}.$$

Rezultă atunci că momentul de inerţie al corpului $G$ în raport cu dreapta $(d)$ este:

$$I_d = \iiint_G \varrho_0 r^2 \, dx\, dy\, dz = \frac{\varrho_0}{3} \iiint_G [(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2] \, dx\, dy\, dz =$$
$$= \frac{\varrho_0}{3} \iint_D dx\, dy \int_{-h}^{h} [(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2] \, dz = \frac{\varrho_0}{3} \iint_D \Big[ -\frac{(y-z)^3}{3} + \frac{(z-x)^3}{3} +$$
$$+ z(x-y)^2 \Big] \Big|_{z=-h}^{z=h} dx\, dy = \frac{\varrho_0}{3} \iint_D \Big[ -\frac{(y-h)^3}{3} + \frac{(h-x)^3}{3} + h(x-y)^2 + \frac{(y+h)^3}{3} -$$
$$- \frac{(-h-x)^3}{3} + h(x-y)^2 \Big] \, dx\, dy = \frac{\varrho_0}{3} \iint_D \left( 4hx^2 + 4hy^2 - 4hxy + \frac{4h^3}{3} \right) dx\, dy.$$

Facem schimbarea de variabile $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $(r,\varphi) \in \widetilde{D}$, unde $(\widetilde{D}): \ 0 \le$ $\le r \le a$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Obţinem:

$$I_d = \frac{\varrho_0}{3} \iint_{\widetilde{D}} \left( 4hr^2 - 4hr^2 \sin\varphi\cos\varphi + \frac{4h^3}{3} \right) r \, dr\, d\varphi = \frac{\varrho_0}{3} \int_0^a dr \int_0^{2\pi} \Big( 4hr^3 - 2hr^3 \sin 2\varphi +$$

$$+\frac{4h^3r}{3}\Big)\,d\varphi = \frac{\varrho_0}{3}\left[2h\pi a^4 + \frac{a^4 h\cos 2\varphi}{4}\Big|_0^{2\pi} + \frac{4\pi h^3 a^2}{3}\right] = \frac{\varrho_0}{3}\left(2a^4h\pi + \frac{4a^2h^3\pi}{3}\right) =$$
$$= \frac{2\pi\varrho_0 a^2 h}{3}\left(a^2 + \frac{2h^2}{3}\right) = \frac{M}{3}\left(a^2 + \frac{2h^2}{3}\right),$$
unde $M$ este masa corpului $G$, adică $M = \varrho_0 V(G) = 2\pi\varrho_0 a^2 h$.

**11.** Să se calculeze în punctul $P(0,0,z)$ potenţialul newtonian al corpului omogen mărginit de sfera $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2$, de densitate $\varrho_0$.

**Rezolvare.** Avem:
$$u(0,0,z) = \iiint_G \varrho_0 \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - z)^2}}, \text{ unde } (G):\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \le R^2.$$

Facem schimbarea de variabile $\xi = r\cos\varphi\sin\theta$, $\eta = r\sin\varphi\sin\theta$, $\zeta = r\cos\theta$, $(r,\varphi,\theta) \in \in \widetilde{G}$, unde $(\widetilde{G}):\ 0 \le r \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$. Rezultă:
$$u(0,0,z) = \iiint_{\widetilde{G}} \varrho_0 \frac{r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta}{\sqrt{r^2 - 2rz\cos\theta + z^2}} = \varrho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^R \int_0^\pi \frac{r^2\sin\theta\, d\theta\, dr}{\sqrt{r^2 - 2rz\cos\theta + z^2}} =$$
$$= 2\pi\varrho_0 \int_0^R\int_0^\pi \frac{r^2(-\cos\theta)'}{\sqrt{r^2 - 2rz\cos\theta + z^2}}\, d\theta\, dr = 2\pi\varrho_0 \int_0^R \frac{r^2}{2rz}\, \frac{(r^2 - 2rz\cos\theta + z^2)^{1/2}}{1/2}\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} dr =$$
$$= \frac{2\pi\varrho_0}{z}\int_0^R r[-(r^2 - 2rz + z^2)^{1/2} + (r^2 + 2rz + z^2)^{1/2}]\, dr = \frac{2\pi\varrho_0}{z}\int_0^R r[-|r-z| + |r+z|]\, dr.$$

Dacă $z > R$ atunci:
$$u(0,0,z) = \frac{2\pi\varrho_0}{z}\int_0^R r[-(z-r) + (z+r)]\, dr = \frac{4\pi\varrho_0 R^3}{3z}.$$

Dacă $0 < z \le R$ atunci:
$$u(0,0,z) = \frac{2\pi\varrho_0}{z}\left\{\int_0^z r[(r+z) - (z-r)]\, dr + \int_z^R r[(r+z) - (r-z)]\, dr\right\} =$$
$$= \frac{2\pi\varrho_0}{z}\left[\int_0^z 2r^2\, dr + \int_z^R 2rz\, dr\right] = 2\pi\varrho_0\left(R^2 - \frac{z^2}{3}\right).$$

Dacă $-R \le z < 0$ avem:
$$u(0,0,z) = \frac{2\pi\varrho_0}{z}\left\{\int_0^{-z} r[(-r-z) - (r-z)]\, dr + \int_{-z}^R r[(r+z) - (r-z)]\, dr\right\} =$$
$$= \frac{2\pi\varrho_0}{z}\left[\int_0^{-z}(-2r^2)\, dr + \int_{-z}^R 2rz\, dr\right] = 2\pi\varrho_0\left(R^2 - \frac{z^2}{3}\right).$$

Dacă $z < -R$ atunci:
$$u(0,0,z) = \frac{2\pi\varrho_0}{z}\int_0^R r[-(r-z) + (-r-z)]\, dr = \frac{2\pi\varrho_0}{z}\int_0^R (-2r^2)\, dr = -\frac{4\pi\varrho_0 R^3}{3z}.$$

Pentru $z = 0$ avem:
$$u(0,0,0) = 2\pi\varrho_0 \int_0^R\int_0^\pi \frac{r^2\sin\theta}{r}\, dr\, d\theta = 2\pi\varrho_0 R^2.$$

$$\text{Deci } u(0,0,z) = \begin{cases} \dfrac{4\pi\varrho_0 R^3}{3|z|}, & \text{dacă } |z| > R; \\ 2\pi\varrho_0\left(R^2 - \dfrac{z^2}{3}\right), & \text{dacă } |z| \le R. \end{cases}$$

**12.** Cu ce forţă atrage corpul omogen mărginit de cilindrul $\xi^2+\eta^2=a^2$ şi planele $\zeta=0$, $\zeta=h$, de densitate $\varrho_0$, punctul $P(0,0,z)$ de masă 1 ?

**Rezolvare.** Avem:

$$X = k\cdot 1\iiint_G \varrho_0 \frac{(\xi-0)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{(\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta-z)^2})^3} = k\varrho_0\iiint_G \frac{\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{(\xi^2+\eta^2+(\zeta-z)^2)^{3/2}},$$

$$Y = k\varrho_0\iiint_G \frac{\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{(\xi^2+\eta^2+(\zeta-z)^2)^{3/2}} \quad \text{şi} \quad Z = k\varrho_0\iiint_G \frac{(\zeta-z)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{(\xi^2+\eta^2+(\zeta-z)^2)^{3/2}},$$

unde $(G):\begin{cases}\xi^2+\eta^2\le a^2\\ 0\le\zeta\le h.\end{cases}$

Facem schimbarea de variabile $\xi=r\cos\varphi$, $\eta=r\sin\varphi$, $\zeta=\zeta$, $(r,\varphi,\zeta)\in\widetilde{G}$, unde $(\widetilde{G}):\ 0\le r\le a$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\zeta\le h$. Rezultă:

$$X = k\varrho_0\iiint_{\widetilde{G}} \frac{r^2\cos\varphi\,dr\,d\varphi\,d\zeta}{(r^2+(\zeta-z)^2)^{3/2}} = k\varrho_0\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^a\int_0^h \frac{r^2\,dr\,d\zeta}{(r^2+(\zeta-z)^2)^{3/2}} = 0,$$

$$Y = k\varrho_0\iiint_{\widetilde{G}} \frac{r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\zeta}{(r^2+(\zeta-z)^2)^{3/2}} = k\varrho_0\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^a\int_0^h \frac{r^2\,dr\,d\zeta}{(r^2+(\zeta-z)^2)^{3/2}} = 0,$$

$$Z = k\varrho_0\iiint_{\widetilde{G}} \frac{(\zeta-z)r\,dr\,d\varphi\,d\zeta}{(r^2+(\zeta-z)^2)^{3/2}} = k\varrho_0\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int_0^a\int_0^h \frac{1}{2}\,\frac{(\zeta-z)2r\,dr\,d\zeta}{(r^2+(\zeta-z)^2)^{3/2}} =$$

$$= 2\pi k\varrho_0\int_0^h \frac{\zeta-z}{2}\,\frac{(r^2+(\zeta-z)^2)^{-1/2}}{-1/2}\bigg|_{r=0}^{r=a}d\zeta = 2\pi k\varrho_0\int_0^h(\zeta-z)\left[\frac{1}{|\zeta-z|}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{a^2+(\zeta-z)^2}}\right]d\zeta.$$

Dacă $z>h$ atunci:

$$Z = 2\pi k\varrho_0\int_0^h(\zeta-z)\left[\frac{1}{z-\zeta}-\frac{1}{\sqrt{a^2+(\zeta-z)^2}}\right]d\zeta = 2\pi k\varrho_0\int_0^h\Big(-1-$$

$$-\frac{\zeta-z}{\sqrt{a^2+(\zeta-z)^2}}\Big)d\zeta = 2\pi k\varrho_0\left(-h-\sqrt{a^2+(\zeta-z)^2}\Big|_0^h\right) = 2\pi k\varrho_0(-h-\sqrt{a^2+(h-z)^2}+$$

$$+\sqrt{a^2+z^2}).$$

Dacă $0\le z\le h$ atunci:

$$Z = 2\pi k\varrho_0\left\{\int_0^z(\zeta-z)\left[\frac{1}{z-\zeta}-\frac{1}{\sqrt{a^2+(\zeta-z)^2}}\right]d\zeta+\int_z^h(\zeta-z)\left[\frac{1}{\zeta-z}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\sqrt{a^2+(\zeta-z)^2}}\right]d\zeta\right\} = 2\pi k\varrho_0\left[-z-\sqrt{a^2+(\zeta-z)^2}\Big|_0^z+h-z-\sqrt{a^2+(\zeta-z)^2}\Big|_z^h\right] =$$

$$= 2\pi k\varrho_0[h-2z+\sqrt{a^2+z^2}-\sqrt{a^2+(h-z)^2}].$$

Dacă $z<0$ atunci:

$$Z = 2\pi k\varrho_0\int_0^h(\zeta-z)\left[\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\sqrt{a^2+(\zeta-z)^2}}\right]d\zeta = 2\pi k\varrho_0(h-\sqrt{a^2+(h-z)^2}+$$

$$+\sqrt{a^2+z^2}).$$

Deci în concluzie:

$$X = Y = 0, \quad Z = 2\pi k \varrho_0 \left\{ \sqrt{a^2 + z^2} - \sqrt{a^2 + (h - z)^2} - (|z| - |h - z|) \right\}.$$

## PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

**13.** Să se calculeze următoarele integrale triple:

a) $\iiint_G \dfrac{dx\,dy\,dz}{(1 + x + y + z)^4}$, unde $G$ este domeniul compact limitat de suprafeţele $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$.

b) $\iiint_G \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy\,dz$, unde $G$ este limitat de suprafeţele $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$.

c) $\iiint_G \dfrac{z^3\,dx\,dy\,dz}{(y + z)(x + y + z)}$, unde $G$ este limitat de suprafeţele $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

d) $\iiint_G [5(x - y)^2 + 3az - 4a^2]\,dx\,dy\,dz$, unde domeniul $G$ este limitat de suprafeţele $x^2 + y^2 - az = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$.

e) $\iiint_G (x - y + z)\,\mathrm{sgn}\,(x - z)\,dx\,dy\,dz$, unde $G$ este limitat de suprafeţele $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

**14.** Trecând la coordonate polare să se calculeze următoarele integrale triple:

a) $\iiint_G [(x - y)^2 + z^2]\,dx\,dy\,dz$, unde $G$ este limitat de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

b) $\iiint_G \dfrac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + a^2}}$, unde $G$ este limitat de suprafeţele $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$, $z = 0$.

c) $\iiint_G \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2}}\,dx\,dy\,dz$, unde $G$ este limitat de elipsoidul $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

d) $\iiint_G f(x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$, unde $G$ este limitat de suprafeţele $z = x^2 + y^2$, $x = y$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$; să se ia apoi $f \equiv 1$.

**15.** Să se determine domeniul de integrare şi apoi să se modifice în diverse moduri ordinea de integrare:

a) $I = \displaystyle\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x - x^2}} dy \int_0^a f(x, y, z)\,dz$;

b) $I = \displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1 - x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} f(x, y, z)\,dz$,

unde $f$ este o funcţie continuă.

**16.** Să se calculeze volumele corpurilor limitate de următoarele suprafeţe:

a) $k^2(x^2 + y^2) = z^2$, $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, $(k^2(x^2 + y^2) \geq z^2)$.

b) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $z = -c$, $z = c$.

c) $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, \quad x^2 + y^2 - r_0^2 = 0, \quad (x^2 + y^2 - r_0^2 \geq 0), \quad r_0 < R.$

d) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}, \quad \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq \dfrac{z^2}{c^2}\right).$

e) $x^2 + y^2 = z, \quad z^2 = xy, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$

f) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az, \quad x^2 + y^2 \leq z^2.$ g) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

h) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\dfrac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\dfrac{z}{c}\right)^{2/3} = 1.$

**17.** Să se calculeze masa şi coordonatele centrelor de greutate ale corpurilor omogene ($\varrho = \varrho_0$) mărginite de următoarele suprafeţe:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z = 0.$ b) $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2, \quad x^2 + y^2 = 2az.$

c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$

**18.** Să se determine momentul de inerţie al corpului omogen ($\varrho = \varrho_0$) având forma unui paralelipiped dreptunghic de muchii $2a$, $2b$, $2c$ în raport cu planul de simetrie perpendicular pe muchia $2c$.

**19.** Să se afle momentul de inerţie al corpului omogen mărginit de un cilindru de înălţime $h$ şi de rază $r_0$ în raport cu axa sa ($\varrho = \varrho_0$).

**20.** Să se determine momentele de inerţie în raport cu planele de coordonate ale corpului omogen ($\varrho = \varrho_0$) mărginit de următoarele suprafeţe:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

**21.** Să se determine momentele de inerţie în raport cu axele de coordonate precum şi în raport cu originea coordonatelor ale corpului omogen ($\varrho = \varrho_0$) mărginit de suprafeţele:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 \leq z^2, \quad z > 0.$$

**22.** Să se calculeze în punctul $P(0, 0, z)$ potenţialul newtonian al corpului mărginit de cilindrul $\xi^2 + \eta^2 = a^2$ şi planele $\zeta = 0$, $\zeta = h$, de densitate constantă $\varrho_0$.

**23.** Cu ce forţă atrage corpul omogen mărginit de sfera de rază $R$ şi de masă $M$, punctul material $P(0, 0, a)$ de masă $m$ ?

# Capitolul 6

# INTEGRALE DE SUPRAFAŢĂ

## §1. INTEGRALE DE SUPRAFAŢĂ. FORMULA LUI STOKES ŞI FORMULA LUI GAUSS-OSTROGRADSKI

### Calculul ariilor suprafeţelor

Fie $\Sigma$ o suprafaţă netedă dată prin ecuaţiile parametrice:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \quad (u, v) \in \Delta, \tag{6.1.1}$$

unde $\Delta$ este un domeniu compact din $\mathbb{R}^2$. Atunci *aria* suprafeţei $\Sigma$ este:

$$A(\Sigma) = \iint_\Delta \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

unde $E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2$, $G = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2$, $F = x'_u\, x'_v + y'_u\, y'_v + z'_u\, z'_v$. Avem $EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2$, unde $A = \dfrac{D(\psi, \chi)}{D(u, v)}$, $B = \dfrac{D(\chi, \varphi)}{D(u, v)}$, $C = \dfrac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$.

Dacă suprafaţa netedă $\Sigma$ este dată în mod explicit prin ecuaţia:

$$z = f(x, y), \ (x, y) \in D, \tag{6.1.2}$$

unde $D$ este un domeniu compact din $\mathbb{R}^2$, atunci $EG - F^2 = 1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2$, adică:

$$A(\Sigma) = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dx\, dy.$$

*Elementul de arie dS* este $dS = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\, du\, dv = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv$, în cazul suprafeţei (6.1.1), unde $\vec{r}(u, v) = \varphi(u, v)\vec{i} + \psi(u, v)\vec{j} + \chi(u, v)\vec{k}$. În cazul suprafeţei (6.1.2) avem $dS = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy$, unde $p = f'_x$, $q = f'_y$.

### Integrale de suprafaţă de primul tip sau de prima specie

Fie $\Sigma$ o suprafaţă netedă dată prin ecuaţiile parametrice (6.1.1).

Funcţia $F : \Sigma \to I\!R$ este *integrabilă* pe suprafaţa $\Sigma$ dacă există şi este finită limita $\lim\limits_{d\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)\, S_i$, unde $S_i = A(\sigma_i)$, $\Sigma = \cup_{i=1}^{n} \sigma_i$, iar $d$ este norma diviziunii $\delta' = (\Delta_i)_{i=\overline{1,n}}$ a domeniului $\Delta$ corespunzătoare diviziunii $\delta = (\sigma_i)_{i=\overline{1,n}}$ şi această limită este independentă de alegerea punctelor $P_i \in \sigma_i$. Dacă funcţia $F$ este integrabilă pe $\Sigma$ atunci limita de mai sus se notează $\iint_\Sigma F(x,y,z)\,dS$ şi se numeşte *integrala de suprafaţă de primul tip* a funcţiei $F$ pe $\Sigma$.

*Proprietăţi.* a) Dacă $F_1,\ F_2 : G \subset I\!R^3 \to I\!R$ sunt integrabile pe $\Sigma$ (suprafaţă netedă inclusă în $G$), deci $\exists \iint_\Sigma F_1(x,y,z)\,dS$, $\iint_\Sigma F_2(x,y,z)\,dS$, iar $\lambda,\ \mu \in I\!R$ atunci $\lambda F_1 + \mu F_2$ este integrabilă pe $\Sigma$ şi:

$$\iint_\Sigma (\lambda F_1(x,y,z) + \mu F_2(x,y,z))\,dS = \lambda \iint_\Sigma F_1(x,y,z)\,dS + \mu \iint_\Sigma F_2(x,y,z)\,dS.$$

b) Fie $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ suprafeţe netede cu $\overset{\circ}{\Sigma}_1 \cap \overset{\circ}{\Sigma}_2 = \emptyset$, iar $F : G \subset I\!R^3 \to I\!R$ este integrabilă pe $\Sigma$ ($\Sigma \subset G$). Atunci $F$ este integrabilă pe $\Sigma_1$ şi pe $\Sigma_2$ şi:

$$\iint_\Sigma F(x,y,z)\,dS = \iint_{\Sigma_1} F(x,y,z)\,dS + \iint_{\Sigma_2} F(x,y,z)\,dS.$$

**Teorema 6.1.1.** Dacă funcţia $F : \Sigma \to I\!R$ este continuă pe $\Sigma$ atunci ea este integrabilă pe $\Sigma$ şi integrala ei este:

$$\iint_\Sigma F(x,y,z)\,dS = \iint_\Delta F(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) \cdot \sqrt{EF - G^2}\,du\,dv.$$

Dacă suprafaţa netedă $\Sigma$ este dată prin ecuaţia (6.1.2), iar $F : \Sigma \to I\!R$ este o funcţie continuă pe $\Sigma$, atunci:

$$\iint_\Sigma F(x,y,z)\,dS = \iint_D F(x,y,f(x,y)) \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy.$$

Teorema rămâne adevărată şi dacă $\Sigma$ este o suprafaţă netedă pe porţiuni.

Această integrală de suprafaţă nu depinde de alegerea feţei suprafeţei $\Sigma$.

**Aplicaţiile integralei de suprafaţă de primul tip în mecanică**

$1°$. *Masa unei suprafeţe.* Dacă suprafaţa $\Sigma$ are densitatea în punctul $(x,y,z)$, $\varrho = \varrho(x,y,z)$ atunci masa sa este $M = \iint_\Sigma \varrho(x,y,z)\,dS$.

$2°$. *Centrul de greutate al unei suprafeţe.* Coordonatele centrului de greutate $(x_0, y_0, z_0)$ al unei suprafeţe $\Sigma$ se calculează după formulele:

$$x_0 = \frac{1}{M} \iint_\Sigma x\,\varrho(x,y,z)\,dS, \quad y_0 = \frac{1}{M} \iint_\Sigma y\,\varrho(x,y,z)\,dS, \quad z_0 = \frac{1}{M} \iint_\Sigma z\,\varrho(x,y,z)\,dS.$$

$3°$. *Momente de inerţie.* Momentul de inerţie al unei suprafeţe $\Sigma$ în raport cu un plan $\alpha$, o dreaptă $d$ sau un punct $P$ este integrala $I = \iint_\Sigma \varrho\, r^2\,dS$, unde $r$ este distanţa de la punctul curent al suprafeţei $(x,y,z)$ la planul $\alpha$, dreapta $d$, respectiv punctul $P$.

Momentele de inerţie ale suprafeţei $\Sigma$ în raport cu planele de coordonate sunt:

$$I_{xy} = \iint_\Sigma \varrho\, z^2\,dS, \quad I_{yz} = \iint_\Sigma \varrho\, x^2\,dS, \quad I_{xz} = \iint_\Sigma \varrho\, y^2\,dS.$$

Momentele de inerţie ale suprafeţei $\Sigma$ în raport cu axele de coordonate sunt:

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, \quad I_y = I_{xy} + I_{yz}, \quad I_z = I_{xz} + I_{yz}.$$

Momentul de inerţie al suprafeţei $\Sigma$ în raport cu originea coordonatelor este:

$$I_0 = \iint_\Sigma \varrho(x^2 + y^2 + z^2)\, dS, \quad \text{adică} \quad I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{xz}.$$

**Integrale de suprafaţă de al doilea tip sau de a doua specie**

Fie $\Sigma$ o suprafaţă cu două feţe, netedă şi regulată. Presupunem că orientarea lui $\Sigma$ este precizată de vectorul normalei $\vec{n} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$,
(unde $\cos\alpha = \dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\beta = \dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\gamma = \dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, în cazul suprafeţei dată prin (6.1.1)).

Fie $P$, $Q$, $R : \Sigma \to I\!R$ trei funcţii definite şi continue pe $\Sigma$, iar $D_z$, $D_x$ şi $D_y$ proiecţiile suprafeţei $\Sigma$ pe planele de coordonate $z = 0$, $x = 0$ şi respectiv $y = 0$. Presupunem că aceste proiecţii sunt orientate. Să presupunem în continuare că suprafaţa $\Sigma$ este dată prin:

(a): $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D_z$ sau (b): $x = g(y, z)$, $(y, z) \in D_x$ sau
(c): $y = h(z, x)$, $(z, x) \in D_y$.

Pentru cazul (a) să considerăm faţa pozitivă a lui $\Sigma$ cea pentru care unghiul dintre $Oz$ şi versorul normalei $\vec{n}$ la $\Sigma$ este ascuţit, deci $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$. Introducem integrala:

$$\iint_\Sigma R(x, y, z)\, dx\, dy = \iint_{D_z} R(x, y, f(x, y))\, dx\, dy = \iint_\Sigma R(x, y, z)\, \cos\gamma\, dS,$$

numită *integrala de suprafaţă de al doilea tip în raport cu planul* $z = 0$.

Analog se introduc integralele:

$$\iint_\Sigma P(x, y, z)\, dy\, dz = \iint_{D_x} P(g(y, z), y, z)\, dy\, dz = \iint_\Sigma P(x, y, z)\, \cos\alpha\, dS \quad \text{şi}$$

$$\iint_\Sigma Q(x, y, z)\, dx\, dz = \iint_{D_y} Q(x, h(z, x), z)\, dx\, dz = \iint_\Sigma Q(x, y, z)\, \cos\beta\, dS,$$

numite *integralele de suprafaţă de al doilea tip în raport cu planul* $x = 0$, respectiv $y = 0$.

Însumând cele trei integrale de mai sus, obţinem integrala:

$$\iint_\Sigma P\, dy\, dz + Q\, dx\, dz + R\, dx\, dy = \iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS,$$

numită *integrala de suprafaţă de al doilea tip, forma generală.*

**Teorema 6.1.2.** În ipotezele de mai sus pentru suprafaţa $\Sigma$ şi funcţiile $P$, $Q$, $R$, dacă $\Sigma$ este dată parametric prin ecuaţiile (6.1.1) atunci:

$$\iint_\Sigma P\, dy\, dz + Q\, dx\, dz + R\, dx\, dy = \pm \iint_\Delta (PA + QB + RC)\, du\, dv$$

cu $\cos\gamma > 0$ pentru $\Sigma$ orientată pozitiv.

Dacă $\Sigma$ este dată în mod explicit prin (6.1.2) atunci:

$$\iint_\Sigma P\, dy\, dz + Q\, dx\, dz + R\, dx\, dy = \pm \iint_D (-pP - qQ + R)\, dx\, dy$$

cu $\cos\gamma > 0$ pentru $\Sigma$ orientată pozitiv (faţa pozitivă a lui $\Sigma$).

Teorema rămâne adevărată şi dacă suprafaţa $\Sigma$ este regulată pe porţiuni.

**Teorema 6.1.3 (formula lui Stokes).** Fie $\Sigma$ o suprafaţă cu două feţe, simplă, netedă şi regulată (pe porţiuni) dată de (6.1.1) cu $\varphi,\ \psi,\ \chi \in C^2(\Delta)$, mărginită de un contur $\Gamma$ simplu, închis şi neted (pe porţiuni). Presupunem că domeniul compact plan $\Delta$ are conturul $\Lambda$ neted (pe porţiuni) şi că sensului pozitiv de parcurgere a conturului $\Lambda$ îi corespunde parcurgerea conturului $\Gamma$ în sens pozitiv. Atunci $\vec{n} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$ caracterizează faţa aleasă a lui $\Sigma$. Presupunem de asemenea că funcţiile $P,\ Q,\ R : G \subset \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sunt definite şi continue pe domeniul $G$, $(\Sigma \subset G)$ şi au derivate parţiale de ordinul întâi continue pe $G$. Atunci:

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

(faţa suprafeţei şi sensul de parcurgere a conturului $\Gamma$ se determină reciproc).

**Teorema 6.1.4 (formula lui Gauss-Ostrogradski).** Fie $\Sigma$ o suprafaţă simplă, închisă, netedă şi regulată (pe porţiuni) care delimitează un domeniu compact $G$ simplu în raport cu cele trei axe de coordonate, iar $P,\ Q,\ R : G_1 \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue cu derivate parţiale de ordinul întâi continue pe domeniul $G_1$ $(G \subset G_1)$. Atunci:

$$\iint_\Sigma P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz \quad \text{sau}$$

$$\iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS = \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

unde $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ sunt cosinuşii directori ai normalei exterioare la suprafaţa $\Sigma$. Prima integrală de suprafaţă de mai sus este aplicată la faţa superioară a suprafeţei $\Sigma$.

Pentru $P = x,\ \ Q = y,\ \ R = z$ obţinem:

$$V(G) = \frac{1}{3}\iint_\Sigma x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = \frac{1}{3}\iint_\Sigma (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS.$$

## PROBLEME REZOLVATE

**1.** Să se calculeze aria porţiunii de suprafaţă secţionată:

a) de cilindrul $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = c^2$ din paraboloidul eliptic $z = \dfrac{x^2}{2a} + \dfrac{y^2}{2b}$, $(a, b, c > 0)$;

b) de cilindrul $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ din paraboloidul hiperbolic $xy = az$, $(a > 0)$.

**Rezolvare.** a) Suprafaţa $\Sigma$ din paraboloidul eliptic $z = \dfrac{x^2}{2a} + \dfrac{y^2}{2b}$ secţionată de cilindrul $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = c^2$ se proiectează pe planul $Oxy$ în domeniul $(D) :\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq c^2$ (vezi Figura 6.1.1 şi Figura 6.1.2).

Deoarece suprafaţa $\Sigma$ este netedă, rezultă:

$$A(\Sigma) = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx\, dy = \iint_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1}\, dx\, dy.$$

Facem schimbarea de variabile $x = ar\cos\varphi,\ \ y = br\sin\varphi,\ \ (r,\varphi) \in \widetilde{D}$, unde $(\widetilde{D})$ : $0 \le r \le c,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi$. Obţinem:

$$A(\Sigma) = \iint_{\widetilde{D}} \sqrt{1 + r^2}\, abr\, dr\, d\varphi = ab \int_0^{2\pi}\int_0^c r\sqrt{1 + r^2}\, dr\, d\varphi = 2\pi ab \int_0^c r\sqrt{1 + r^2}\, dr =$$

$$= \frac{2\pi ab}{2} \cdot \frac{(1 + r^2)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^c = \frac{2\pi ab}{3}\Big[(1 + c^2)^{3/2} - 1\Big].$$

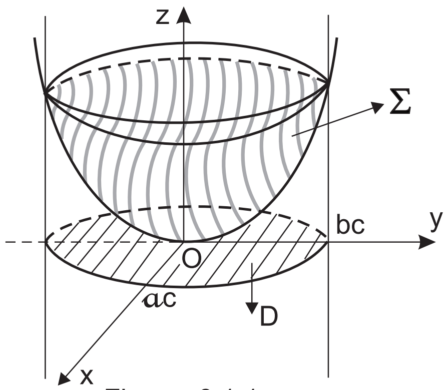

Figura 6.1.1

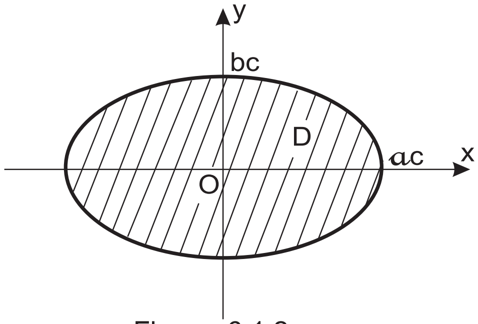

Figura 6.1.2

b) Suprafaţa netedă $\Sigma$ din paraboloidul hiperbolic $z = \dfrac{xy}{a}$ (vezi Anexa) secţionată de cilindrul $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ se proiectează pe planul $Oxy$ în domeniul $(D)$ : $(x^2 + y^2)^2 \le$ $\le 2a^2xy$ (domeniul mărginit de lemniscata care are axele de simetrie cele două bisectoare), (vezi Figura 6.1.3). Avem $A(\Sigma) = \iint_D \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2}}\, dx\, dy$. Notăm $x = ar\cos\varphi,\ \ y =$ $= ar\sin\varphi$, relaţii care introduse în inegalitatea care defineşte domeniul $D$ ne dau:

$$a^4r^4 \le 2a^2 \cdot a^2r^2\cos\varphi\sin\varphi \Rightarrow r^2 \le \sin 2\varphi, \quad \left(\sin 2\varphi \ge 0 \Rightarrow \varphi \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \tfrac{3\pi}{2}\right]\right).$$

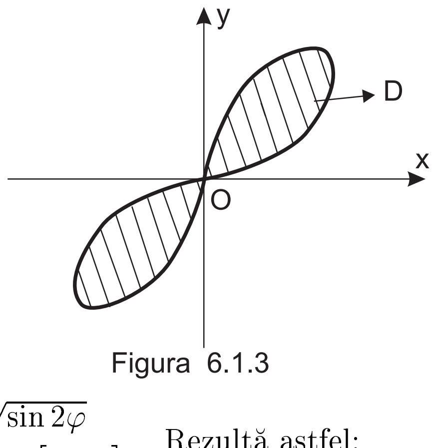

Figura 6.1.3

Deci $(\widetilde{D})$ : $\begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{\sin 2\varphi} \\ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]. \end{cases}$ Rezultă astfel:

$$A(\Sigma) = \iint_{\widetilde{D}} \sqrt{1 + r^2} \cdot a^2r\, dr\, d\varphi = a^2 \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} r\sqrt{1 + r^2}\, dr\, d\varphi +$$

$$+a^2\int_{\pi}^{3\pi/2}\int_0^{\sqrt{sin\,2\varphi}} r\sqrt{1+r^2}\,dr\,d\varphi = 2a^2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{sin\,2\varphi}} r\sqrt{1+r^2}\,dr\,d\varphi =$$
$$= 2a^2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+r^2)^{3/2}}{3/2}\Big|_{r=0}^{r=\sqrt{sin\,2\varphi}} d\varphi = \frac{2a^2}{3}\int_0^{\pi/2}\left[(1+\sin 2\varphi)^{3/2}-1\right]d\varphi =$$
$$= \frac{2a^2}{3}\int_0^{\pi/2}(\cos\varphi+\sin\varphi)^3\,d\varphi - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}\int_0^{\pi/2}(\cos^3\varphi+3\cos^2\varphi\sin\varphi+3\cos\varphi\sin^2\varphi+$$
$$+\sin^3\varphi)\,d\varphi - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}\int_0^{\pi/2}[(\sin\varphi)'(1-\sin^2\varphi) - 3\cos^2\varphi(\cos\varphi)' + 3\sin^2\varphi(\sin\varphi)' -$$
$$-(\cos\varphi)'(1-\cos^2\varphi)]\,d\varphi - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3} - \cos^3\varphi + \sin^3\varphi - \cos\varphi + \right.$$
$$\left.+\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{a^2}{9}(20-3\pi).$$

**2.** Să se afle ariile:

a) părţii suprafeţei conului $y^2+z^2=x^2$ situată în interiorul cilindrului $x^2+y^2=R^2$;

b) părţii suprafeţei conului $z^2=2xy$, $x, y>0$ situată în interiorul sferei $x^2+y^2+$ $+z^2=a^2$, $(a>0)$;

c) suprafeţei cilindrului $x^2+y^2=ax$ cuprinsă în interiorul sferei $x^2+y^2+z^2=a^2$, (suprafaţa laterală a corpului Viviani), $(a>0)$;

d) suprafeţei elicoidale: $x=\operatorname{tg}u\cdot\cos v$, $y=\operatorname{tg}u\cdot\sin v$, $z=\dfrac{\sin u}{2\cos^2 u}+\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin u}{\cos u}}+$ $+v$, corespunzătoare variaţiei parametrilor $0\le u\le\dfrac{\pi}{4}$, $0\le v\le 2\pi$.

**Rezolvare.** Suprafeţele de mai sus sunt netede.

a) Suprafaţa $\Sigma$ a conului $z=\pm\sqrt{x^2-y^2}$ situată în interiorul cilindrului $x^2+y^2=R^2$ se proiectează pe planul $Oxy$ în domeniul $D$ (vezi Figura 6.1.4 şi Figura 6.1.5).

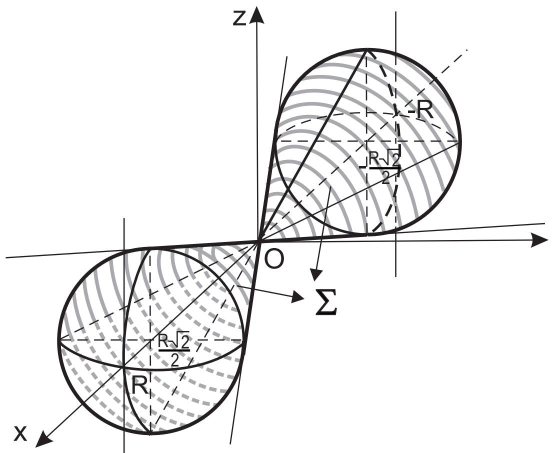


Figura 6.1.4

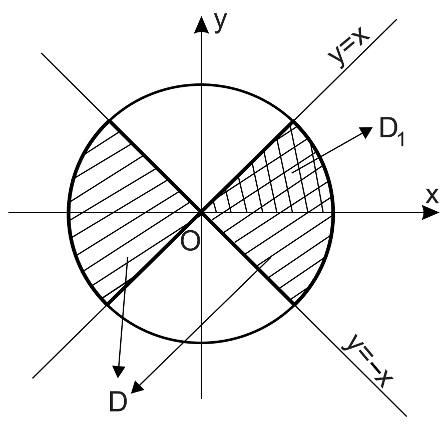


Figura 6.1.5

Din simetria suprafeţei $\Sigma$ faţă de planul $Oxy$, avem:

$$A(\Sigma) = 2\iint_D \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy = 2\iint_D\sqrt{\frac{2x^2}{x^2-y^2}}\,dx\,dy.$$

Mai precis $A(\Sigma) = 8\iint_{D_1}\sqrt{\dfrac{2x^2}{x^2-y^2}}\,dx\,dy = 8\sqrt{2}\iint_{D_1}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\,dx\,dy$,
unde $(D_1):\ 0 \le y \le x,\ \ x^2+y^2 \le R^2$.

Notăm $x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ (r,\varphi)\in\widetilde{D}_1$, unde $(\widetilde{D}_1):\ 0\le r\le R,\ \ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$. Obţinem:

$$A(\Sigma) = 8\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\!\!\int_0^R \frac{r\cos\varphi\cdot r}{r\sqrt{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}}\,dr\,d\varphi = 8\sqrt{2}\int_0^R r\,dr\cdot\int_0^{\pi/4}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}}\,d\varphi =$$

$$= 8\sqrt{2}\,\frac{R^2}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{(\sin\varphi)'}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}}\,d\varphi \overset{sin\,\varphi=u}{=} 4\sqrt{2}R^2\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{du}{\sqrt{1-2u^2}} = 4R^2\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{du}{\sqrt{\frac{1}{2}-u^2}} =$$

$$= 4R^2\arcsin\sqrt{2}u\Big|_0^{\sqrt{2}/2} = 2\pi R^2.$$

b) Suprafaţa $\Sigma$ din conul $z^2 = 2xy,\ \ x,\ y > 0$ situată în interiorul sferei $x^2+y^2+z^2 = a^2$, desenată în Figura 6.1.6 se proiectează pe planul $Oxy$ în domeniul $D$ (vezi Figura 6.1.7).

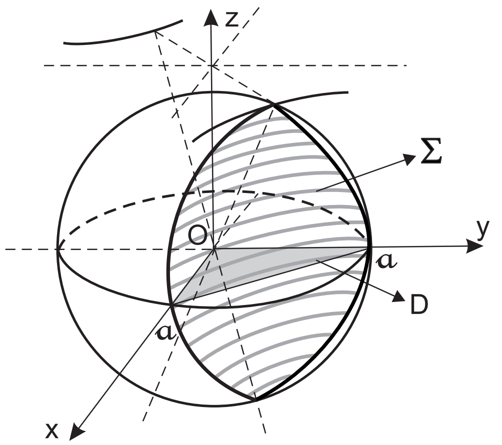

Figura 6.1.6

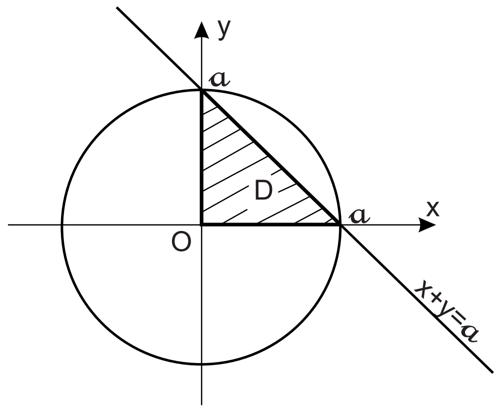

Figura 6.1.7

Avem $A(\Sigma) = 2\iint_D\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy$, cu $z(x,y) = \sqrt{2xy}$, deci:

$$A(\Sigma) = 2\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{2y}}{2\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2x}}{2\sqrt{y}}\right)^2}\,dx\,dy = \sqrt{2}\iint_D\frac{\sqrt{2xy+x^2+y^2}}{\sqrt{xy}}\,dx\,dy =$$

$$= \sqrt{2}\iint_D\frac{x+y}{\sqrt{xy}}\,dx\,dy = \sqrt{2}\iint_D\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)dx\,dy = \sqrt{2}\int_0^a dx\int_0^{a-x}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)dy =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^a\left(\sqrt{x}\cdot\frac{y^{1/2}}{1/2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{y^{3/2}}{3/2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=a-x}dx = 2\sqrt{2}\int_0^a\left[\sqrt{x}(a-x)^{1/2}+\frac{(a-x)^{3/2}}{3\sqrt{x}}\right]dx =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^a\frac{(a-x)^{1/2}(2x+a)}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Notăm $\sqrt{\dfrac{x}{a-x}} = u \Rightarrow x = \dfrac{au^2}{1+u^2},\ \ dx = \dfrac{2au}{(1+u^2)^2}\,du$. Rezultă:

$$A(\Sigma)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^\infty\frac{1}{u}\left(2\frac{au^2}{1+u^2}+a\right)\cdot\frac{2au}{(1+u^2)^2}\,du=\frac{4\sqrt{2}\,a^2}{3}\int_0^\infty\frac{3u^2+1}{(1+u^2)^3}\,du=$$
$$=\frac{4\sqrt{2}\,a^2}{3}\int_0^\infty\frac{du}{(1+u^2)^2}+\frac{8\sqrt{2}\,a^2}{3}\int_0^\infty\frac{u^2}{(1+u^2)^3}\,du=\frac{4\sqrt{2}\,a^2}{3}\int_0^\infty\frac{du}{(1+u^2)^2}-$$
$$-\frac{2\sqrt{2}a^2}{3}\int_0^\infty u\left(\frac{1}{(1+u^2)^2}\right)'du=\frac{4\sqrt{2}\,a^2}{3}\int_0^\infty\frac{du}{(1+u^2)^2}-\frac{2\sqrt{2}\,a^2}{3}\cdot\frac{u}{(1+u^2)^2}\bigg|_0^\infty+$$
$$+\frac{2\sqrt{2}\,a^2}{3}\int_0^\infty\frac{du}{(1+u^2)^2}=2\sqrt{2}\,a^2\int_0^\infty\frac{(1+u^2)-u^2}{(1+u^2)^2}\,du=2\sqrt{2}\,a^2\int_0^\infty\frac{du}{1+u^2}+$$
$$+a^2\sqrt{2}\int_0^\infty u\left(\frac{1}{1+u^2}\right)'du=2\sqrt{2}\,a^2\int_0^\infty\frac{du}{1+u^2}+a^2\sqrt{2}\frac{u}{1+u^2}\bigg|_0^\infty-a^2\sqrt{2}\int_0^\infty\frac{du}{1+u^2}=$$
$$=a^2\sqrt{2}\int_0^\infty\frac{du}{1+u^2}=\frac{a^2\pi\sqrt{2}}{2}.$$

c) Suprafaţa $\Sigma$ este desenată în Figura 6.1.8, iar proiecţia sa pe planul $Oxz$ este domeniul $D$ desenat în Figura 6.1.9. Avem $A(\Sigma)=2A(\Sigma_1)$, unde $(\Sigma_1):\ y=\sqrt{ax-x^2},\ (y>0)$.

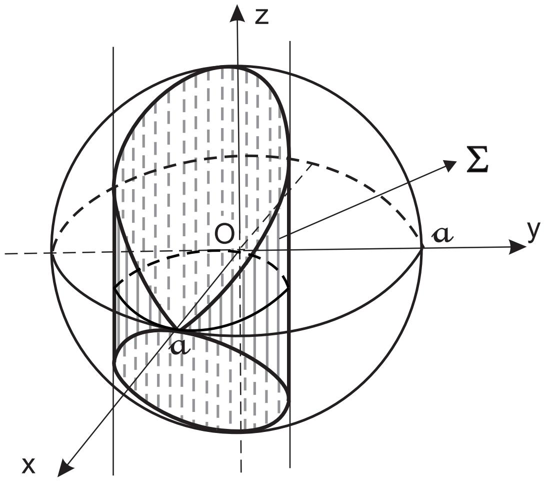

Figura 6.1.8

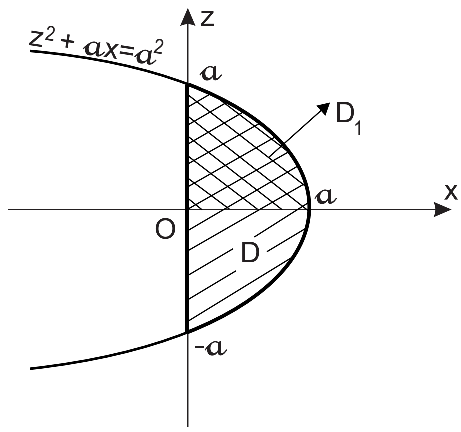

Figura 6.1.9

Ecuaţia parabolei care delimitează domeniul $D$ se obţine prin eliminarea lui $y$ din ecuaţiile $x^2+y^2=ax,\ x^2+y^2+z^2=a^2$. Rezultă $z^2+ax=a^2$. Deci:

$$A(\Sigma)=2\iint_D\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\,dx\,dz=4\iint_{D_1}\sqrt{1+\left(\frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}\right)^2}\,dx\,dz=$$
$$=2a\iint_{D_1}\frac{dx\,dz}{\sqrt{ax-x^2}},\quad\text{unde } (D_1):\begin{cases}0\le x\le\frac{a^2-z^2}{a}\\ 0\le z\le a,\ \text{(simplu/ Ox)}.\end{cases}$$

Rezultă astfel $A(\Sigma)=2a\displaystyle\int_0^a dz\int_0^{\frac{a^2-z^2}{a}}\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}$.

Facem notaţia $\sqrt{\dfrac{x}{a-x}}=u\Rightarrow x=\dfrac{au^2}{1+u^2},\ dx=\dfrac{2au}{(1+u^2)^2}\,du$. Deducem:

$$A(\Sigma)=2a\int_0^a dz\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{z}}\frac{1}{u\left(a-\frac{au^2}{1+u^2}\right)}\cdot\frac{2au}{(1+u^2)^2}\,du=4a\int_0^a dz\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{z}}\frac{du}{1+u^2}=$$

$$= 4a\int_0^a \operatorname{arctg} u\Big|_{u=0}^{u=\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{z}} dz = 4a\int_0^a \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{z}\,dz = 4az\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{z}\Big|_0^a +$$
$$+4a\int_0^a \frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}\,dz = 4a^2.$$

d) Avem $A(\Sigma) = \iint_\Delta \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$, unde $(\Delta):\ 0\le u\le \frac{\pi}{4},\ \ 0\le v\le 2\pi$. Apoi:

$$E=(x'_u)^2+(y'_u)^2+(z'_u)^2=\frac{1}{(\cos^2 u)^2}\cos^2 v+\frac{1}{(\cos^2 u)^2}\sin^2 v+\Bigg(\frac{1}{2}\,\frac{\cos^3 u+2\cos u\sin^2 u}{\cos^4 u}+$$
$$+\frac{\sqrt{\cos u}}{\sqrt{1+\sin u}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+\sin u}{\cos u}}}\cdot\frac{\cos^2 u+\sin u+\sin^2 u}{\cos^2 u}\Bigg)^2=\frac{1}{\cos^4 u}+\Bigg(\frac{1}{2}\,\frac{\cos^2 u+2\sin^2 u}{\cos^3 u}+$$
$$+\frac{1}{2}\,\frac{1+\sin u}{(1+\sin u)\cos u}\Bigg)^2=\frac{1}{\cos^4 u}+\frac{1}{4}\left(\frac{1+\sin^2 u+\cos^2 u}{\cos^3 u}\right)^2=\frac{1}{\cos^4 u}+\frac{1}{\cos^6 u}=\frac{1+\cos^2 u}{\cos^6 u},$$

$$G=(x'_v)^2+(y'_v)^2+(z'_v)^2=\operatorname{tg}^2 u\cdot\sin^2 v+\operatorname{tg}^2 u\cdot\cos^2 v+1=\operatorname{tg}^2 u+1=\frac{1}{\cos^2 u},$$

$$F=x'_u\,x'_v+y'_u\,y'_v+z'_u\,z'_v=-\frac{1}{\cos^2 u}\cos v\operatorname{tg} u\sin v+\frac{1}{\cos^2 u}\sin v\operatorname{tg} u\cos v+\frac{1}{2}\,\frac{2}{\cos^3 u}=$$
$$=\frac{1}{\cos^3 u}.$$

Deci $\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{\frac{1+\cos^2 u}{\cos^6 u}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}-\frac{1}{\cos^6 u}}=\frac{1}{\cos^4 u}$, iar:

$$A(\Sigma)=\int_0^{\pi/4}\!\!\int_0^{2\pi}\frac{1}{\cos^4 u}\,du\,dv=2\pi\int_0^{\pi/4}\frac{du}{\cos^4 u}\overset{tg\,u=t}{=}2\pi\int_0^1\frac{1}{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=$$
$$=2\pi\int_0^1(1+t^2)\,dt=\frac{8\pi}{3}.$$

**3.** Să se calculeze:

a) aria suprafeţei $x^2+y^2+z^2=a^2$ situată în exteriorul cilindrilor $x^2+y^2=\pm ax$ (problema lui Viviani), $(a>0)$;

b) aria suprafeţei corpului mărginit de suprafeţele $x^2+z^2=a^2,\ \ y^2+z^2=a^2$, $(a>0)$;

c) aria suprafeţei $z=\sqrt{x^2-y^2}$ situată în interiorul cilindrului $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, $(a>0)$.

**Rezolvare.** Suprafeţele de mai sus sunt netede (pe porţiuni).

a) Aria suprafeţei $\Sigma$ este diferenţa dintre aria sferei şi aria suprafeţei sferei situată în interiorul celor doi cilindri, adică $A(\Sigma)=A(sf)-4\,A(\Sigma_1)$, $A(\Sigma_1)$ fiind aria unei "petale" (vezi Figura 6.1.10). Deci:

$$(\Sigma_1):\ \ z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\ \ (x,y)\in D,\ \ \text{cu}\ \ (D):\ x^2+y^2\le ax,$$

(vezi Figura 6.1.11).

Rezultă:

$$A(\Sigma_1)=\iint_D\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy=a\iint_D\frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Facem schimbarea de variabile $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Introducând aceste relaţii în inegalitatea care defineşte domeniul $D$ obţinem $r \le a\cos\varphi$, $\cos\varphi \ge 0$. Deci:

$$(\widetilde{D}):\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ \ 0 \le r \le a\cos\varphi.$$

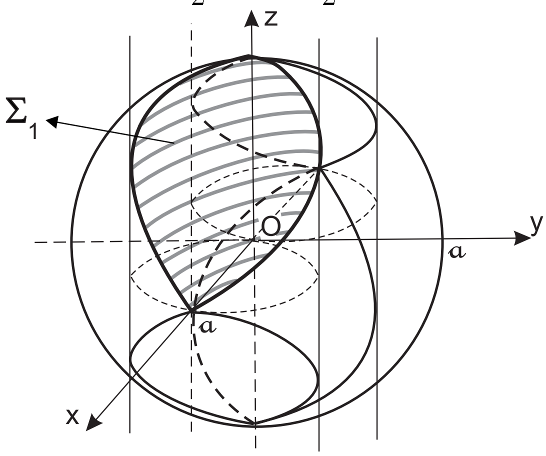

Figura 6.1.10

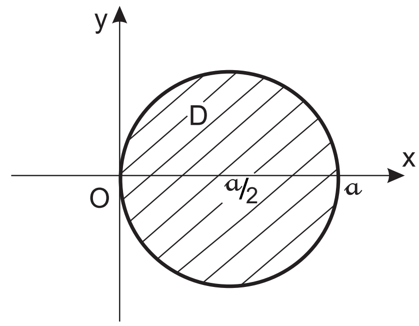

Figura 6.1.11

Deducem astfel:

$$A(\Sigma_1) = a\iint_{\widetilde{D}} \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr\,d\varphi = a\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr =$$

$$= a\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{a\cos\varphi} (-\sqrt{a^2-r^2})'\,dr\,d\varphi = a\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-\sqrt{a^2-r^2})\Big|_{r=0}^{r=a\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= a\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [a - \sqrt{a^2 - a^2\cos^2\varphi}]\,d\varphi = a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-|\sin\varphi|)\,d\varphi = a^2\int_0^{\pi/2}(1-\sin\varphi)\,d\varphi +$$

$$+ a^2\int_{-\pi/2}^{0}(1+\sin\varphi)\,d\varphi = \pi a^2 - 2a^2, \quad \text{iar} \quad A(\Sigma) = 4\pi a^2 - 4(\pi a^2 - 2\,a^2) = 8a^2.$$

b) Suprafaţa corpului mărginit de cilindrii $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$ este desenată în Figura 6.1.12. Avem $A(\Sigma) = A(\Sigma_1) + A(\Sigma_2)$, unde $\Sigma_1 = AMBN \cup DMCN$, iar $\Sigma_2 = DMAN \cup MCBN$.

Pentru $\Sigma_1$ avem $A(\Sigma_1) = 2\,A(AMBN)$, unde $(AMBN):\ \begin{cases} y(x,z) = \sqrt{a^2-z^2}, \\ (x,z) \in D_1, \end{cases}$

cu $D_1 = PMQN:\ x^2 + z^2 \le a^2$.

Rezultă:

$$A(\Sigma_1) = 2\iint_{D_1} \sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2-z^2}}\,dx\,dz = 2\iint_{D_1} \frac{a}{\sqrt{a^2-z^2}}\,dx\,dz.$$

Facem schimbarea de variabile $x = ar\cos\varphi$, $z = ar\sin\varphi$, $(r,\varphi) \in \widetilde{D}_1$, unde $(\widetilde{D}_1)$ : $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, iar $\dfrac{D(x,z)}{D(r,\varphi)} = a^2 r$. Rezultă:

$$A(\Sigma_1) = 2\iint_{\widetilde{D}_1} \frac{a^2 r}{\sqrt{1-r^2\sin^2\varphi}}\,dr\,d\varphi = 2a^2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2\sin^2\varphi}}\,dr =$$

$$= 2a^2\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{\sin^2\varphi}(\sqrt{1-r^2\sin^2\varphi})\Big|_{r=0}^{r=1}\right] d\varphi = 2a^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sin^2\varphi}(1-\sqrt{1-\sin^2\varphi})\,d\varphi =$$

$$= 8a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{1+\cos\varphi} \overset{tg\,\frac{\varphi}{2}=u}{=} 8a^2 \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}\, du = 8a^2.$$

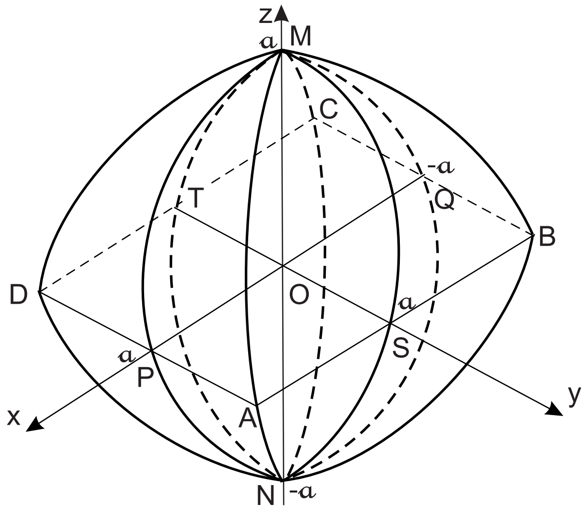


Figura 6.1.12

În mod asemănător avem $A(\Sigma_2) = 2\,A(DMAN)$, unde $(DMAN):\ x(y,z) = = \sqrt{a^2 - z^2}$, $(y,z) \in D_2$, cu $D_2 = TMSN:\ y^2 + z^2 \le a^2$, iar:

$A(\Sigma_2) = 2 \iint_{D_2} \sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2 - z^2}}\, dy\, dz = 2 \iint_{D_2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - z^2}}\, dy\, dz = 8\,a^2.$

Deci $A(\Sigma) = 16\,a^2$.

c) Suprafaţa conului $\Sigma$ situată în interiorul cilindrului $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ este desenată în Figura 6.1.13.

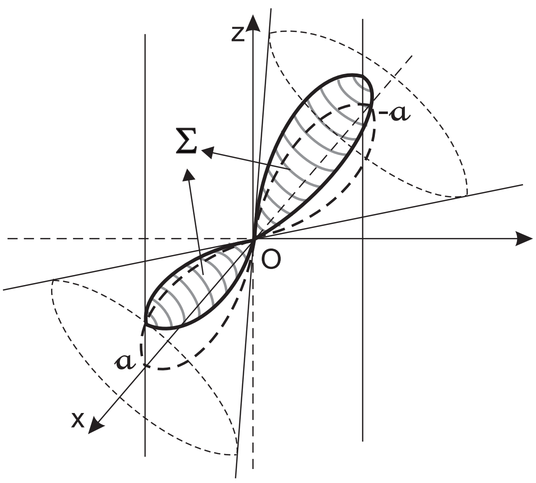


Figura 6.1.13

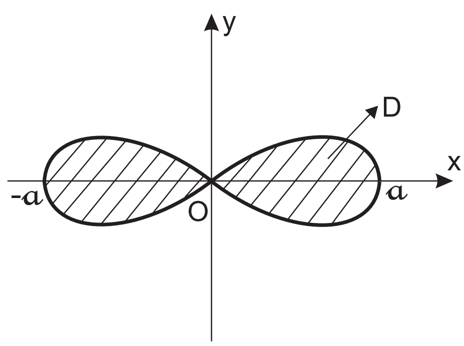


Figura 6.1.14

Avem $A(\Sigma) = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx\, dy$, unde $z(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$, iar:

$(D):\ (x^2+y^2)^2 \le a^2(x^2-y^2)$, (domeniul mărginit de lemniscata care are axele de simetrie axele de coordonate), vezi Figura 6.1.14.

Rezultă $A(\Sigma) = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2-y^2} + \frac{y^2}{x^2-y^2}}\, dx\, dy = \sqrt{2}\iint_D \frac{|x|}{\sqrt{x^2-y^2}}\, dx\, dy.$

Pentru a calcula integrala dublă de mai sus facem schimbarea de variabile $x = ar\cos\varphi$, $y = ar\sin\varphi$, relaţii care introduse în inegalitatea care defineşte domeniul $D$ ne dau:

$a^4r^4 \le a^4r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \Rightarrow r^2 \le \cos 2\varphi \Rightarrow 0 \le r \le \sqrt{\cos 2\varphi}$, cu $\cos 2\varphi \ge 0 \Rightarrow$ $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right] = I$. Deci $(r, \varphi) \in \widetilde{D}$, unde $(\widetilde{D}) : \begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{\cos 2\varphi} \\ \varphi \in I. \end{cases}$

Rezultă:

$$A(\Sigma) = \iint_{\widetilde{D}} \frac{\sqrt{2}\, ar|\cos\varphi|}{\sqrt{a^2r^2\cos^2\varphi - a^2r^2\sin^2\varphi}}\, a^2r\, dr\, d\varphi = 2\sqrt{2}\, a^2 \iint_{\widetilde{D}_1} \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\, dr\, d\varphi,$$

unde $(\widetilde{D}_1) :\ 0 \le r \le \sqrt{\cos 2\varphi}$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$. Deci:

$$A(\Sigma) = 2\sqrt{2}\, a^2 \int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{cos\, 2\varphi}} \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\, dr\, d\varphi + 2\sqrt{2}\, a^2 \int_{7\pi/4}^{2\pi}\int_0^{\sqrt{cos\, 2\varphi}} \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\, dr\, d\varphi =$$

$$= 2\sqrt{2}\, a^2 \int_0^{\pi/4} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \cdot \frac{r^2}{2}\Big|_{r=0}^{r=\sqrt{cos\, 2\varphi}} d\varphi + 2\sqrt{2}\, a^2 \int_{7\pi/4}^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \cdot \frac{r^2}{2}\Big|_{r=0}^{r=\sqrt{cos\, 2\varphi}} d\varphi =$$

$$= a^2\sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \cos\varphi\sqrt{1 - 2\sin^2\varphi}\, d\varphi + \underbrace{a^2\sqrt{2}\int_{7\pi/4}^{2\pi} \cos\varphi\sqrt{1 - 2\sin^2\varphi}\, d\varphi}_{2\pi - \varphi = u} =$$

$$= 2\sqrt{2}\, a^2 \int_0^{\pi/4} \cos\varphi\sqrt{1 - 2\sin^2\varphi}\, d\varphi \overset{sin\,\varphi = v}{=} 2\sqrt{2}\, a^2 \int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{1 - 2v^2}\, dv.$$

Calculăm integrala:

$$I_1 = \int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{1 - 2v^2}\, dv = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dv}{\sqrt{1 - 2v^2}} + \int_0^{\sqrt{2}/2} v(\sqrt{1 - 2v^2})'\, dv =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{v}{1/\sqrt{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}/2} + v\sqrt{1 - 2v^2}\Big|_0^{\sqrt{2}/2} - \int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{1 - 2v^2}\, dv = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - I_1. \text{ Deci:}$$

$$I_1 = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}, \quad \text{iar} \quad A(\Sigma) = 2\sqrt{2}\, a^2 \cdot \frac{\pi}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi\, a^2}{2}.$$

**4.** Să se calculeze următoarele integrale de primul tip:

a) $\iint_\Sigma (x + y + z)\, dS$, unde $\Sigma$ este suprafaţa $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$, $(a > 0)$;

b) $\iint_\Sigma \frac{dS}{(1 + x + y)^2}$, unde $\Sigma$ este tetraedrul determinat de suprafeţele $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

c) $\iint_\Sigma (xy + yz + zx)\, dS$, unde $\Sigma$ este porţiunea suprafeţei conice $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ decupată de suprafaţa $x^2 + y^2 = 2ax$, $(a > 0)$.

d) $\iint_\Sigma \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}\, dS$, unde $\Sigma$ este suprafaţa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a, b, c > 0$.

**Rezolvare.** Suprafeţele $\Sigma$ de mai sus sunt netede (pe porţiuni), iar funcţiile de sub

semnul integrală sunt continue pe $\Sigma$.

a) Suprafaţa $\Sigma$ are ecuaţia $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $(x,y)\in D$, unde $(D):\ x^2+y^2\le a^2$, (vezi Figura 6.1.15). Rezultă:

$$I=\iint_D (x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2})\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy.$$

Facem schimbarea de variabile $x=ar\cos\varphi$, $y=ar\sin\varphi$, $(r,\varphi)\in\widetilde{D}$, cu $(\widetilde{D})$ : $0\le r\le 1$, $0\le\varphi\le 2\pi$. Obţinem:

$$I=\iint_{\widetilde{D}}[ar(\cos\varphi+\sin\varphi)+a\sqrt{1-r^2}]\cdot\frac{a}{a\sqrt{1-r^2}}\,a^2r\,dr\,d\varphi=a^3\iint_{\widetilde{D}}\Big[\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}(\cos\varphi+$$
$$+\sin\varphi)+r\Big]\,dr\,d\varphi=a^3\left(\int_0^1\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}\,dr\right)\cdot(\sin\varphi-\cos\varphi)\Big|_0^{2\pi}+a^3\cdot\frac{r^2}{2}\Big|_0^1\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}=\pi a^3.$$

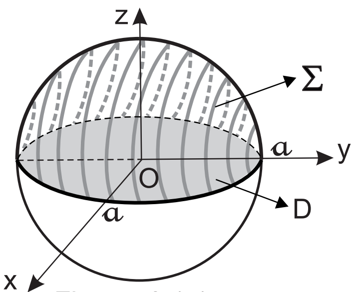

Figura 6.1.15

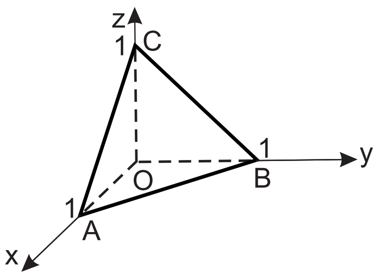

Figura 6.1.16

Integrala de mai sus se poate calcula şi în felul următor. Parametrizăm suprafaţa $\Sigma$: $x=a\cos u\sin v$, $y=a\sin u\sin v$, $z=a\cos v$, $(u,v)\in\Delta$, unde $(\Delta)$ : $u\in[0,2\pi]$, $v\in[0,\frac{\pi}{2}]$. Rezultă atunci:

$$I=\iint_\Delta (a\cos u\sin v+a\sin u\sin v+a\cos v)\cdot\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

unde $E=(x'_u)^2+(y'_u)^2+(z'_u)^2=(-a\sin u\sin v)^2+(a\cos u\sin v)^2+0=a^2\sin^2 v$,

$G=(x'_v)^2+(y'_v)^2+(z'_v)^2=(a\cos u\cos v)^2+(a\sin u\cos v)^2+(-a\sin v)^2=a^2$,

$F=x'_u\,x'_v+y'_u\,y'_v+z'_u\,z'_v=-a^2\sin u\cos u\sin v\cos v+a^2\sin u\cos u\sin v\cos v+0=0.$

Deci $\sqrt{EG-F^2}=a^2\sin v$, iar:

$$I=\iint_\Delta (a\cos u\sin v+a\sin u\sin v+a\cos v)\,a^2\sin v\,du\,dv=a^3\iint_\Delta\Big(\cos u\sin^2 v+$$
$$+\sin u\sin^2 v+\frac{\sin 2v}{2}\Big)\,du\,dv=a^3\left[\sin u\Big|_0^{2\pi}\cdot\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2v}{2}\,dv-\cos u\Big|_0^{2\pi}\cdot\int_0^{\pi/2}\Big(\frac{1}{2}-\right.$$
$$\left.-\frac{\cos 2v}{2}\Big)\,dv-\frac{1}{4}\cos 2v\Big|_0^{\pi/2}\cdot 2\pi\right]=\pi a^3.$$

b) Suprafaţa $\Sigma$ este reuniunea a patru suprafeţe $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3\cup\Sigma_4$, (vezi Figura 6.1.16), unde:

$$\Sigma_1=OAB:\ \ z=0,\ (x,y)\in D_1,\ \text{ cu } (D_1):\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1-x,\ \text{ (vezi Figura 6.1.17),}\end{cases}$$

$$\Sigma_2 = OCB: \quad x = 0,\ (y,z) \in D_2,\ \text{ cu } (D_2): \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le z \le 1 - y, \quad \text{(vezi Figura 6.1.18)}, \end{cases}$$

$$\Sigma_3 = OAC: \quad y = 0,\ (x,z) \in D_3,\ \text{ cu } (D_3): \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le z \le 1 - x, \quad \text{(vezi Figura 6.1.19)} \end{cases}$$

şi $\Sigma_4 = ABC: \ z = 1 - x - y,\ (x,y) \in D_1$.

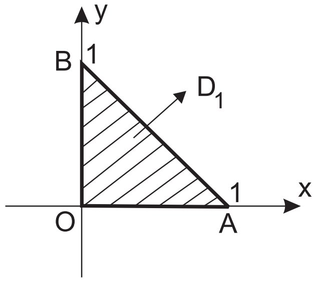

Figura 6.1.17

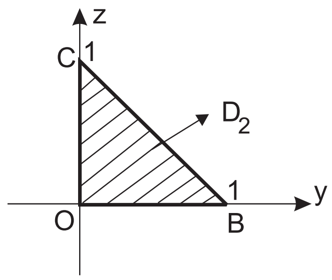

Figura 6.1.18

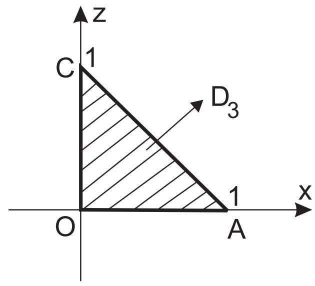

Figura 6.1.19

Rezultă:

$$I_1 = \iint_{\Sigma_1} \frac{dS}{(1+x+y)^2} = \iint_{D_1} \frac{1}{(1+x+y)^2} \cdot \sqrt{1}\, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{(1+x+y)^2}\, dy =$$

$$= \int_0^1 \left[ -\frac{1}{1+x+y}\Big|_{y=0}^{y=1-x} \right] dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \right) dx = \left[ \ln(1+x) - \frac{1}{2}x \right]\Big|_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2},$$

$$I_2 = \iint_{\Sigma_2} \frac{dS}{(1+x+y)^2} = \iint_{D_2} \frac{1}{(1+y)^2} \cdot \sqrt{1}\, dy\, dz = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} \frac{dz}{(1+y)^2} =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(1+y)^2}(1-y)\, dy = -\int_0^1 \frac{dy}{1+y} + 2\int_0^1 \frac{dy}{(1+y)^2} = -\ln(1+y)\Big|_0^1 - \frac{2}{1+y}\Big|_0^1 = 1 - \ln 2,$$

$$I_3 = \iint_{\Sigma_3} \frac{dS}{(1+x+y)^2} = \iint_{D_3} \frac{1}{(1+x)^2} \cdot \sqrt{1}\, dx\, dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dz}{(1+x)^2} =$$

$$= \int_0^1 \frac{1-x}{(1+x)^2}\, dx = 1 - \ln 2,$$

$$I_4 = \iint_{\Sigma_4} \frac{dS}{(1+x+y)^2} = \iint_{D_1} \frac{1}{(1+x+y)^2} \cdot \sqrt{3}\, dx\, dy = \sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} =$$

$$= \sqrt{3} \int_0^1 \left( -\frac{1}{1+x+y}\Big|_{y=0}^{y=1-x} \right) dx = \sqrt{3} \int_0^1 \left( \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \right) dx = \left[ \sqrt{3} \ln(1+x) - \frac{\sqrt{3}}{2}x \right]\Big|_0^1 =$$

$$= \sqrt{3} \ln 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Obţinem astfel:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = (\sqrt{3} - 1)\ln 2 + \frac{3 - \sqrt{3}}{2}.$$

c) Suprafaţa $\Sigma$ din conul $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ decupată de suprafaţa cilindrică $x^2 + y^2 = 2ax$ este desenată în Figura 6.1.20. Avem $(\Sigma): \ z = \sqrt{x^2 + y^2}\ (x,y) \in D$, unde $(D): x^2 + y^2 \le 2ax$ (vezi Figura 6.1.21).

Rezultă:

$$I = \iint_{\Sigma} (xy + yz + zx)\, dS = \iint_D [xy + (x+y)\sqrt{x^2 + y^2}] \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}\, dx\, dy =$$

$$= \iint_D (xy + (x+y)\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{2}\, dx\, dy.$$

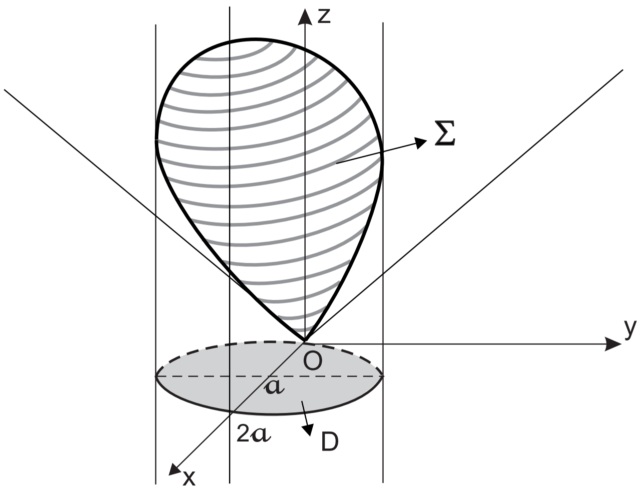


Figura 6.1.20

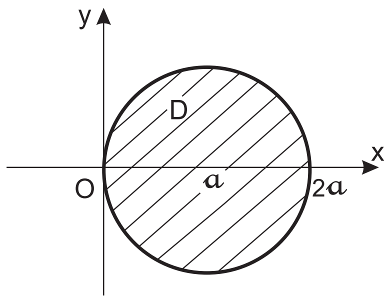


Figura 6.1.21

Făcând schimbarea de variabile $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ rezultă $r^2 \leq 2ar\cos\varphi$, deci $r \leq 2a\cos\varphi$ cu $\cos\varphi \geq 0 \Rightarrow \varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Deci $(r,\varphi) \in \widetilde{D}$, unde $(\widetilde{D})$ : $\begin{cases} 0 \leq r \leq 2a\cos\varphi \\ \varphi \in [-\pi/2, \pi/2]. \end{cases}$ Obţinem astfel:

$$I = \sqrt{2}\iint_{\widetilde{D}} [r^2\cos\varphi\sin\varphi + r(\cos\varphi + \sin\varphi)r]\, r\, dr\, d\varphi = \sqrt{2}\iint_{\widetilde{D}} \Big(r^3 \cdot \frac{\sin 2\varphi}{2} +$$
$$+ r^3(\cos\varphi + \sin\varphi)\Big)\, dr\, d\varphi = \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^3 \left[\frac{\sin 2\varphi}{2} + \cos\varphi + \sin\varphi\right] dr =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 16a^4\cos^4\varphi(\cos\varphi\sin\varphi + \cos\varphi + \sin\varphi)\, d\varphi = 4\sqrt{2}a^4\left[-\frac{\cos^6\varphi}{6}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{\cos^5\varphi}{5}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} +\right.$$
$$\left. + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin^2\varphi)^2(\sin\varphi)'\, d\varphi\right] = 4\sqrt{2}a^4\left(\sin\varphi - \frac{2}{3}\sin^3\varphi + \frac{\sin^5\varphi}{5}\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{64\sqrt{2}}{15}a^4.$$

d) Suprafaţa $\Sigma$ este elipsoidul $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (vezi Figura 6.1.22).

Parametrizăm suprafaţa $\Sigma$: $\begin{cases} x = a\cos u\sin v \\ y = b\sin u\sin v \\ z = c\cos v, \quad (u,v) \in \Delta, \end{cases}$ unde $(\Delta)$ : $\begin{cases} u \in [0, 2\pi] \\ v \in [0, \pi]. \end{cases}$

Avem:

$E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2 = (-a\sin u\sin v)^2 + (b\cos u\sin v)^2 + 0 = (a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u)\sin^2 v,$

$G = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2 = (a\cos u\cos v)^2 + (b\sin u\cos v)^2 + (-c\sin v)^2 = (a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u)\cos^2 v + c^2\sin^2 v,$

$F = x'_u\, x'_v + y'_u\, y'_v + z'_u\, z'_v = -a^2\sin u\cos u\sin v\cos v + b^2\sin u\cos u\sin v\cos v.$

Deci:

$EG - F^2 = a^2b^2\sin^2 v\cos^2 v(\cos^4 u + \sin^4 u + 2\sin^2 u\cos^2 u) + a^2c^2\sin^2 u\sin^4 v +$
$+b^2c^2\cos^2 u\sin^4 v = \sin^2 v(a^2b^2\cos^2 v + a^2c^2\sin^2 u\sin^2 v + b^2c^2\cos^2 u\sin^2 v) =$
$= a^2b^2c^2\sin^2 v\left(\dfrac{\cos^2 u\sin^2 v}{a^2} + \dfrac{\sin^2 u\sin^2 v}{b^2} + \dfrac{\cos^2 v}{c^2}\right).$

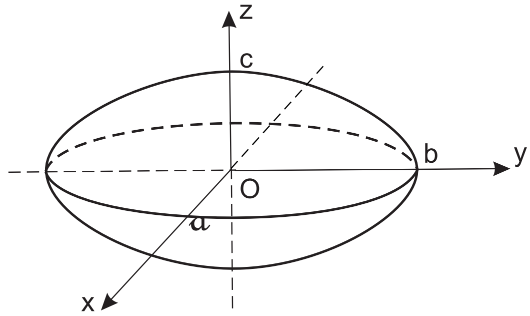

Figura 6.1.22

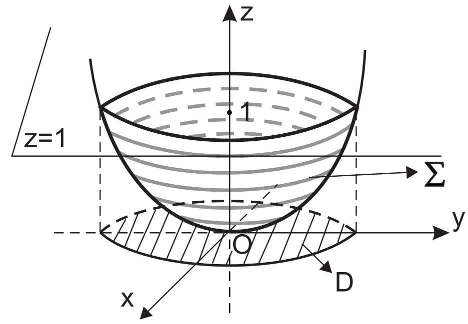

Figura 6.1.23

Rezultă astfel:

$$I = \iint_\Delta \left(\sqrt{\frac{a^2\cos^2 u\sin^2 v}{a^4} + \frac{b^2\sin^2 u\sin^2 v}{b^4} + \frac{c^2\cos^2 v}{c^4}}\right)^2 \cdot abc\sin v\, du\, dv =$$
$$= abc\iint_\Delta \sin v\left(\frac{\cos^2 u\sin^2 v}{a^2} + \frac{\sin^2 u\sin^2 v}{b^2} + \frac{\cos^2 v}{c^2}\right) du\, dv =$$
$$= abc\int_0^{2\pi} du\int_0^\pi \sin v\left(\frac{\cos^2 u\sin^2 v}{a^2} + \frac{\sin^2 u\sin^2 v}{b^2} + \frac{\cos^2 v}{c^2}\right) dv =$$
$$= abc\left[\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}\cos^2 u\, du\cdot\int_0^\pi \sin^3 v\, dv + \frac{1}{b^2}\int_0^{2\pi}\sin^2 u\, du\cdot\int_0^\pi \sin^3 v\, dv + \right.$$
$$\left. +\frac{1}{c^2}\int_0^{2\pi}du\int_0^\pi \sin v\cos^2 v\, dv\right] = abc\left\{\frac{1}{2a^2}\left(u + \frac{1}{2}\sin 2u\right)\Big|_0^{2\pi}\cdot\left[-\left(\cos v - \frac{\cos^3 v}{3}\right)\right]\Big|_0^\pi + \right.$$
$$\left. +\frac{1}{2b^2}\left(u - \frac{1}{2}\sin 2u\right)\Big|_0^{2\pi}\cdot\left[-\left(\cos v - \frac{\cos^3 v}{3}\right)\right]\Big|_0^\pi + \frac{2\pi}{c^2}\left(-\frac{\cos^3 v}{3}\right)\Big|_0^\pi\right\} =$$
$$= \frac{4\pi abc}{3}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

**5.** Să se calculeze masa pânzei parabolice $z = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $0 \le z \le 1$, a cărei densitate variază după legea $\varrho = z$.

**Rezolvare.** Avem $M(\Sigma) = \displaystyle\iint_\Sigma \varrho(x,y,z)\, dS = \iint_\Sigma z\, dS$, unde $(\Sigma):\ z = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $(x,y) \in D$, cu $(D):\ x^2 + y^2 \le 2$, (vezi Figura 6.1.23).

Rezultă: $M(\Sigma) = \displaystyle\iint_D \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy$. Facem schimbarea de variabile $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $(r,\varphi) \in \widetilde{D}$, unde $(\widetilde{D}):\ \begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$

Obţinem:

$$M(\Sigma) = \frac{1}{2}\iint_{\widetilde{D}} r^2\sqrt{1 + r^2}\, r\, dr\, d\varphi = \frac{1}{2}\iint_{\widetilde{D}} r^3\sqrt{1 + r^2}\, dr\, d\varphi = \frac{1}{2}\iint_{\widetilde{D}}((r^3 + r) -$$

$$-r)\sqrt{1+r^2}\,dr\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}}\left[r(1+r^2)^{3/2} - r(1+r^2)^{1/2}\right]dr\cdot 2\pi = \pi\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+r^2)^{5/2}}{5/2} - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+r^2)^{3/2}}{3/2}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\pi(6\sqrt{3}+1)}{15}.$$

**6.** Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al suprafeţei omogene:

$$z = \sqrt{a^2-x^2-y^2},\ \ x,\, y \geq 0,\ \ x+y \leq a,\ \ (\varrho = \varrho_0).$$

**Rezolvare.** Avem $x_0 = \dfrac{1}{M}\displaystyle\iint_\Sigma x\varrho_0\,dS$, $y_0 = \dfrac{1}{M}\displaystyle\iint_\Sigma y\varrho_0\,dS$, $z_0 = \dfrac{1}{M}\displaystyle\iint_\Sigma z\varrho_0\,dS$, unde $M = \displaystyle\iint_\Sigma \varrho_0\,dS$.

Suprafaţa $\Sigma$ are ecuaţia $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $(x,y)\in D$, unde $(D):\begin{cases} 0\leq x\leq a \\ 0\leq y\leq a-x,\end{cases}$ (vezi Figura 6.1.24 şi Figura 6.1.25).

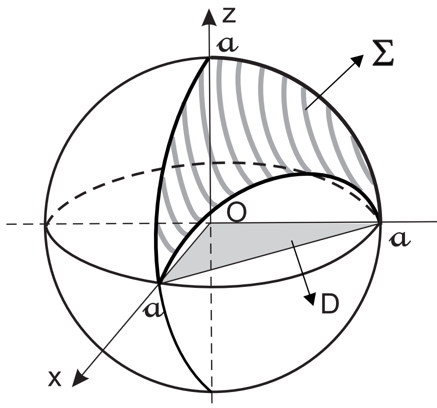


Figura 6.1.24

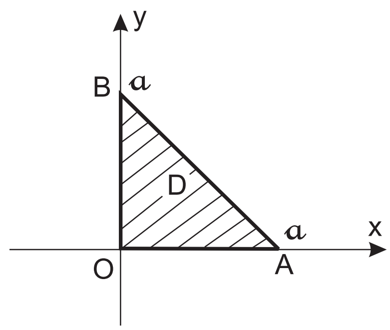


Figura 6.1.25

Rezultă:

$$M = \varrho_0\iint_\Sigma dS = \varrho_0\iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \varrho_0 a\int_0^a dx\int_0^{a-x}\frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} =$$
$$= \varrho_0 a\int_0^a \arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\Bigg|_{y=0}^{y=a-x} dx = \varrho_0 a\int_0^a \arcsin\frac{a-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \varrho_0 a\int_0^a \arcsin\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx =$$
$$= \varrho_0 a\left[x\arcsin\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\Bigg|_0^a - \int_0^a x\,\frac{-a}{\sqrt{2x}\,\sqrt{a-x}(a+x)}\,dx\right] = \frac{\varrho_0 a^2}{\sqrt{2}}\int_0^a \frac{x}{(a+x)\sqrt{ax-x^2}}\,dx.$$

Notăm $\sqrt{\dfrac{x}{a-x}} = t \Rightarrow x = \dfrac{at^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2at}{(1+t^2)^2}\,dt$. Rezultă:

$$M = \varrho_0 a^2\sqrt{2}\int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)(2t^2+1)}\,dt = \varrho_0 a^2\sqrt{2}\int_0^\infty\left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{2t^2+1}\right)dt =$$
$$= \varrho_0 a^2\sqrt{2}\left(\operatorname{arctg} t\Big|_0^\infty - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}/2}\Bigg|_0^\infty\right) = \varrho_0 a^2\frac{(\sqrt{2}-1)\pi}{2}.$$

Calculăm în continuare coordonatele centrului de greutate al suprafeţei $\Sigma$. Avem:

$$x_0 = \frac{1}{M}\iint_\Sigma x\varrho_0\,dS = \frac{\varrho_0}{M}\iint_\Sigma x\,dS = \frac{\varrho_0}{M}\iint_D x\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{\varrho_0 a}{M}\int_0^a dy \int_0^{a-y} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx = \frac{\varrho_0 a}{M}\int_0^a (-\sqrt{a^2-x^2-y^2})\Big|_{x=0}^{x=a-y} dy =$$
$$= \frac{\varrho_0 a}{M}\int_0^a (\sqrt{a^2-y^2} - \sqrt{a^2-(a-y)^2-y^2})\,dy = \frac{\varrho_0 a}{M}\int_0^a (\sqrt{a^2-y^2} - \sqrt{2ay-2y^2})\,dy.$$

Calculăm acum integrala:

$$I_1 = \int_0^a \sqrt{a^2-y^2}\,dy = a^2 \arcsin\frac{y}{a}\Big|_0^a + y\sqrt{a^2-y^2}\Big|_0^a - \int_0^a \sqrt{a^2-y^2}\,dy,$$

deci $I_1 = \dfrac{\pi a^2}{4}$. Pentru integrala:

$$I_2 = \sqrt{2}\int_0^a \sqrt{ay-y^2}\,dy \quad \text{facem schimbarea de variabilă } \sqrt{\frac{y}{a-y}} = t \Rightarrow y = \frac{at^2}{1+t^2},$$

$dy = \dfrac{2at}{(1+t^2)^2}\,dt$. Obţinem:

$$I_2 = 2\sqrt{2}a^2\int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^3}\,dt = -\frac{2\sqrt{2}}{4}a^2\int_0^\infty t\left(\frac{1}{(1+t^2)^2}\right)'dt = -\frac{\sqrt{2}}{2}a^2 t\,\frac{1}{(1+t^2)^2}\Big|_0^\infty +$$
$$+\frac{\sqrt{2}}{2}a^2\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} - \frac{\sqrt{2}}{2}a^2\int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2 \operatorname{arctg} t\Big|_0^\infty +$$
$$+\frac{\sqrt{2}}{4}a^2\int_0^\infty t\left(\frac{1}{1+t^2}\right)'dt = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}a^2}{4}t\frac{1}{1+t^2}\Big|_0^\infty - \frac{\sqrt{2}a^2}{4}\operatorname{arctg} t\Big|_0^\infty = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{8}.$$

Rezultă astfel:

$$x_0 = \frac{\varrho_0 a}{M}\left(\frac{\pi a^2}{4} - \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{8}\right) = \frac{\varrho_0 \pi a^3(2-\sqrt{2})}{8M} = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

În mod asemănător:

$$y_0 = \frac{1}{M}\iint_\Sigma y\varrho_0\,dS = \frac{\varrho_0}{M}\iint_D \frac{ay}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \frac{a}{2\sqrt{2}}, \quad \text{iar:}$$
$$z_0 = \frac{1}{M}\iint_\Sigma z\varrho_0\,dS = \frac{\varrho_0}{M}\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \frac{\varrho_0 a}{M}\iint_D dx\,dy =$$
$$= \frac{\varrho_0 a}{M}\int_0^a dx\int_0^{a-x} dy = \frac{\varrho_0 a}{M}\int_0^a (a-x)\,dx = \frac{\varrho_0 a^3}{2M} = \frac{a(\sqrt{2}+1)}{\pi}.$$

Deci $\quad x_0 = y_0 = \dfrac{a}{2\sqrt{2}}, \quad z_0 = \dfrac{a(\sqrt{2}+1)}{\pi}.$

**7.** Să se calculeze momentul de inerţie al pânzei conice omogene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0, \quad 0 \le z \le b$$

de densitate $\varrho_0$ în raport cu dreapta $(d) : \ \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z-b}{0}$, $(a,\, b > 0)$.

**Rezolvare.** Avem $I_d = \iint_\Sigma \varrho_0\, r^2\,dS$, unde $r = dist\,((x,y,z),(d))$, $M(x,y,z) \in \Sigma$ (vezi Figura 6.1.26). Pentru a calcula $r$ folosim formula (vezi şi Figura 6.1.27):

$$dist\,(M,(d)) = \frac{\|\vec{MM_0} \times \vec{i}\|}{\|\vec{i}\|} = \|(z-b)\vec{j} - y\vec{k}\| = \sqrt{(z-b)^2 + y^2}.$$

Deoarece $(\Sigma) : \ z = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \in D$, unde $(D) : \ x^2+y^2 \le a^2$, rezultă că:

$$I_d = \varrho_0 \iint_\Sigma [(z-b)^2 + y^2]\, dS = \varrho_0 \iint_D \left[\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2} - b\right)^2 + y^2\right] \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}\, dx\, dy =$$
$$= \frac{\varrho_0\sqrt{a^2+b^2}}{a^3} \iint_D [b^2(x^2+y^2) + a^2b^2 - 2ab^2\sqrt{x^2+y^2} + a^2y^2]\, dx\, dy.$$

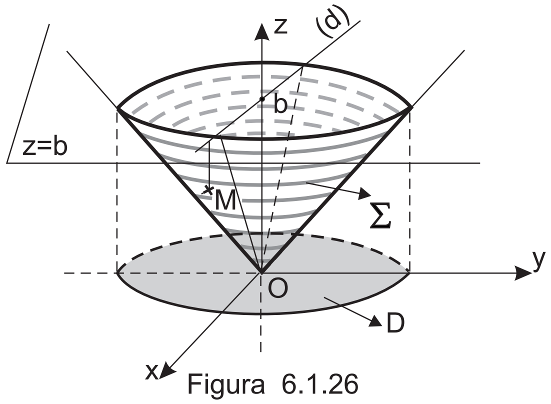

Figura 6.1.26

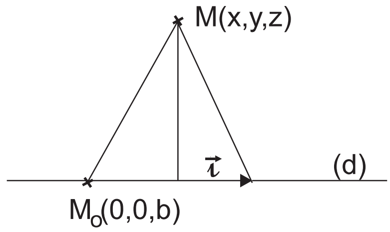

Figura 6.1.27

Facem schimbarea de variabile $x = r\cos\varphi,\;\; y = r\sin\varphi,\;\; (r,\varphi) \in \widetilde{D}$, unde $(\widetilde{D}):$ $0 \le r \le a,\;\; 0 \le \varphi \le 2\pi$. Obţinem:

$$I_d = \varrho_0 \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^3} \iint_{\widetilde{D}} (b^2r^2 + a^2b^2 - 2ab^2r + a^2r^2\sin^2\varphi) \cdot r\, dr\, d\varphi =$$
$$= \frac{\varrho_0\sqrt{a^2+b^2}}{a^3}\left[b^2\frac{a^4}{4}\cdot 2\pi + \frac{a^4b^2}{2}\cdot 2\pi - \frac{2}{3}a^4b^2 \cdot 2\pi + a^2\,\frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\, d\varphi\right] =$$
$$= 2\pi\varrho_0 \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^3}\left(\frac{3a^4b^2}{4} - \frac{2a^4b^2}{3} + \frac{a^6}{8}\right) = \frac{\pi\sqrt{a^2+b^2}\varrho_0 a}{12}(3a^2+2b^2).$$

**8.** Să se calculeze integrala $\quad F(t) = \iint_{x+y+z=t} f(x,y,z)\, dS,$

unde $\;f(x,y,z) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 - z^2, & \text{dacă } x^2+y^2+z^2 \le 1 \\ 0, & \text{dacă } x^2+y^2+z^2 > 1. \end{cases}$

**Rezolvare.** Avem:

$$F(t) = \iint_{\substack{x+y+z=t \\ x^2+y^2+z^2\le 1}} (1 - x^2 - y^2 - z^2)\, dS + \iint_{\substack{x+y+z=t \\ x^2+y^2+z^2>1}} 0\, dS.$$

Înălţimea tetraedrului $OABC$ (vezi Figura 6.1.28) este $dist\,(O,(P)) = \dfrac{|t|}{\sqrt{3}}$, unde $(P):\; x+y+z=t$. Avem două cazuri:

a) Dacă $\dfrac{|t|}{\sqrt{3}} \ge 1$ atunci $F(t) = 0$.

b) Dacă $|t| < \sqrt{3}$ atunci $F(t) = \iint_{\substack{x+y+z=t \\ x^2+y^2+z^2\le 1}} (1 - x^2 - y^2 - z^2)\, dS.$

În acest caz suprafaţa $\Sigma$ se proiectează pe planul $Oxy$ într-un domeniu $D$, a cărui inegalitate o obţinem înlocuind pe $z = t - x - y$ în inegalitatea $x^2+y^2+z^2 \le 1$. Rezultă:

$(D):\; x^2 + y^2 + (t-x-y)^2 \le 1 \;\;\Leftrightarrow\;\; 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2tx - 2ty + t^2 - 1 \le 0.$

Obţinem astfel:

$$F(t) = \iint_D [1 - x^2 - y^2 - (t - x - y)^2]\sqrt{3}\,dx\,dy = \sqrt{3}\iint_D [1 - t^2 + 2t(x + y) - 2(x^2 + \\ +y^2) - 2xy]\,dx\,dy.$$

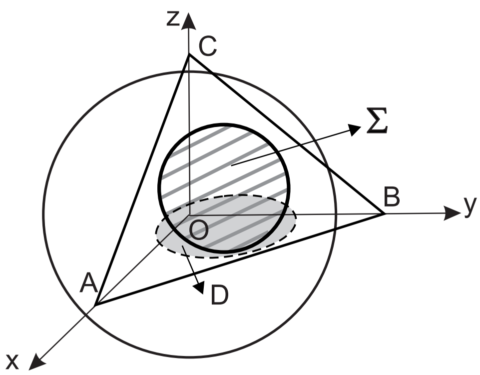

Figura 6.1.28

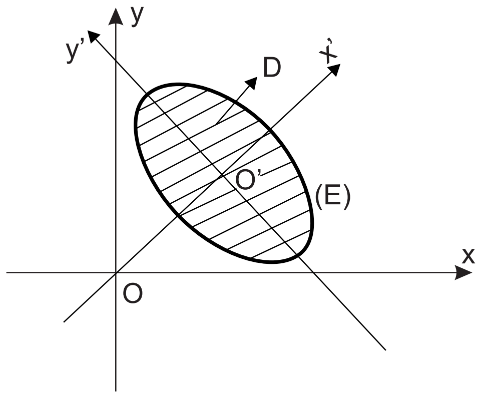

Figura 6.1.29

Pentru a studia curba care mărgineşte domeniul $D$ (elipsa) şi a găsi astfel o schimbare de variabile pentru calculul integralei $F(t)$ determinăm câteva elemente ale elipsei (vezi [11]). Avem $\delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$. Coordonatele centrului curbei sunt date de sistemul $\begin{cases} 2x + y - t = 0 \\ x + 2y - t = 0, \end{cases}$ adică $x_0 = y_0 = \dfrac{t}{3}$. Valorile proprii sunt rădăcinile ecuaţiei $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ deci $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Pentru $\lambda_1 = 1$ un vector propriu este $\vec{u}_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$, iar pentru $\lambda_2 = 3$ un vector propriu este $\vec{u}_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$. Astfel obţinem matricea schimbării de bază:

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}. \text{ Deoarece } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -t \\ 1 & 2 & -t \\ -t & -t & t^2 - 1 \end{vmatrix} = t^2 - 3,$$

rezultă că ecuaţia redusă a elipsei este:

$$(E): \ (x')^2 + 3(y')^2 + \frac{t^2 - 3}{3} = 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{(x')^2}{\frac{-t^2+3}{3}} + \frac{(y')^2}{\frac{-t^2+3}{9}} - 1 = 0.$$

Relaţiile dintre coordonatele vechi $(x, y)$ şi cele noi $(x', y')$ sunt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t/3 \\ t/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{t}{3} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}x' + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y = \dfrac{t}{3} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}x' + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y', \ \text{(vezi Figura 6.1.29).} \end{cases}$$

Pornind de la ecuaţia redusă a elipsei obţinem următoarea parametrizare pentru $D$:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3-t^2}}{\sqrt{3}}\, r\cos\varphi \\ y' = \dfrac{\sqrt{3-t^2}}{3}\, r\sin\varphi, \quad (r,\varphi)\in\widetilde{D}, \end{cases} \quad \text{unde} \quad (\widetilde{D}): \begin{cases} 0\le r\le 1 \\ 0\le\varphi\le 2\pi. \end{cases}$$

În coordonatele $(x,y)$ avem:

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{3} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3-t^2}}{\sqrt{3}}\, r\cos\varphi + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3-t^2}}{3}\, r\sin\varphi \\ y = \dfrac{t}{3} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3-t^2}}{\sqrt{3}}\, r\cos\varphi + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3-t^2}}{3}\, r\sin\varphi. \end{cases}$$

Determinantul funcţional $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}$ este $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \dfrac{3-t^2}{3\sqrt{3}}r.$

Astfel obţinem pentru $F(t)$:

$$F(t) = \sqrt{3}\iint_{\widetilde{D}}\left[1-t^2+2t\left(\frac{2t}{3}+\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{3-t^2}}{3}\, r\sin\varphi\right) - 2\left(\frac{t^2}{9}+\frac{1}{2}\,\frac{3-t^2}{3}r^2\cos^2\varphi + \right.\right.$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{3-t^2}{9}r^2\sin^2\varphi + \frac{t\sqrt{2}}{3}\,\frac{\sqrt{3-t^2}}{\sqrt{3}}r\cos\varphi + \frac{t\sqrt{2}}{3}\,\frac{\sqrt{3-t^2}}{3}r\sin\varphi + \frac{3-t^2}{3\sqrt{3}}r^2\cos\varphi\sin\varphi +$$

$$+\frac{t^2}{9} + \frac{1}{2}\,\frac{3-t^2}{3}r^2\cos^2\varphi + \frac{1}{2}\,\frac{3-t^2}{9}r^2\sin^2\varphi - \frac{t\sqrt{2}}{3}\,\frac{\sqrt{3-t^2}}{\sqrt{3}}r\cos\varphi + \frac{t\sqrt{2}}{3}\,\frac{\sqrt{3-t^2}}{3}r\sin\varphi -$$

$$\left. - \frac{3-t^2}{3\sqrt{3}}r^2\sin\varphi\cos\varphi\right) - \frac{2t^2}{9} - \frac{1}{9}(3-t^2)r^2\sin^2\varphi - \frac{2t\sqrt{2}}{9}\sqrt{3-t^2}\, r\sin\varphi +$$

$$\left. + \frac{1}{3}(3-t^2)r^2\cos^2\varphi\right]\cdot\frac{3-t^2}{3\sqrt{3}}r\,dr\,d\varphi = \sqrt{3}\iint_{\widetilde{D}}\left[\left(1-\frac{t^2}{3}\right)r + \frac{2\sqrt{2}t}{9}\sqrt{3-t^2}\, r^2\sin\varphi - \right.$$

$$\left. - \frac{3-t^2}{3}r^3\cos^2\varphi - \frac{3-t^2}{3}r^3\sin^2\varphi + \frac{2\sqrt{2}t}{9}\sqrt{3-t^2}\, r^2\sin\varphi\right]\cdot\frac{3-t^2}{3\sqrt{3}}\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{3-t^2}{3}\left[2\pi\left(1-\frac{t^2}{3}\right)\cdot\frac{1}{2} - \frac{3-t^2}{3}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} - \frac{3-t^2}{12}\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}\right] =$$

$$= \frac{\pi(3-t^2)^2}{18}.$$

Deci $F(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi(3-t^2)^2}{18}, & \text{dacă } |t|<\sqrt{3} \\ 0, & \text{dacă } |t|\ge\sqrt{3}. \end{cases}$

**9.** Să se calculeze următoarele integrale de suprafaţă de al doilea tip:

a) $\displaystyle\iint_\Sigma x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$, unde $\Sigma$ este faţa exterioară a sferei $x^2+y^2+z^2=a^2$;

b) $\displaystyle\iint_\Sigma (y-z)\,dy\,dz + (z-x)\,dx\,dz + (x-y)\,dx\,dy$, unde $\Sigma$ este faţa exterioară a conului $x^2+y^2=z^2$, $0\le z\le h$;

c) $\displaystyle\iint_\Sigma \frac{dy\,dz}{x} + \frac{dx\,dz}{y} + \frac{dx\,dy}{z}$, unde $\Sigma$ este faţa exterioară a elipsoidului $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

d) $I_1 = \displaystyle\iint_\Sigma x^3\,dy\,dz$, $I_2 = \displaystyle\iint_\Sigma yz\,dz\,dx$, unde $\Sigma$ este faţa exterioară a jumătăţii superioare a elipsoidului $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

**Rezolvare.** Suprafeţele de mai sus sunt cu două feţe, netede şi regulate, iar funcţiile de sub semnul integrală sunt continue pe suprafeţele respective.

a) Parametrizăm suprafaţa:

$x = a\cos u \sin v,\ \ y = a\sin u \sin v,\ \ z = a\cos v,\ \ (u,v) \in \Delta$, unde $(\Delta) : 0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le \pi$. Calculăm cosinuşii directori ai normalei $\vec{n}$ la suprafaţa $\Sigma$:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

unde $A = \dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}$, $B = \dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}$, $C = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$. Vom alege semnul din faţa radicalului astfel încât $\cos\gamma > 0$. Avem:

$$A = \begin{vmatrix} a\cos u \sin v & a\sin u\cos v \\ 0 & -a\sin v \end{vmatrix} = -a^2\cos u \sin^2 v,$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & -a\sin v \\ -a\sin u\sin v & a\cos u\cos v \end{vmatrix} = -a^2\sin u\sin^2 v,$$

$$C = \begin{vmatrix} -a\sin u\sin v & a\cos u\cos v \\ a\cos u\sin v & a\sin u\cos v \end{vmatrix} = -a^2\sin v\cos v,$$

iar $A^2+B^2+C^2 = a^4\cos^2 u\sin^4 v + a^4\sin^2 u \sin^4 v + a^4 \sin^2 v\cos^2 v = a^4\sin^4 v +$ $+ a^4\sin^2 v\cos^2 v = a^4\sin^2 v$.

Pentru ca $\cos\gamma = \dfrac{-a^2\sin v\cos v}{\pm a^2\sin v}$ să fie cosinusul unghiului pe care normala exterioară la suprafaţă îl face cu axa $Oz$, adică $\cos\gamma > 0$, vom lua semnul $-$ în faţa radicalului. Obţinem astfel:

$$\cos\alpha = \frac{-a^2\cos u\sin^2 v}{-a^2\sin v} = \cos u\sin v,\quad \cos\beta = \frac{-a^2\sin u\sin^2 v}{-a^2\sin v} = \sin u\sin v,$$
$$\cos\gamma = \cos v.$$

Rezultă:

$$I = \iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS = \iint_\Sigma (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS =$$
$$= \iint_\Delta (a\cos u\sin v\cdot\cos u\sin v + a\sin u\sin v\cdot \sin u\sin v + a\cos^2 v)\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv =$$
$$= \iint_\Delta (a\cos^2 u\sin^2 v + a\sin^2 u\sin^2 v + a\cos^2 v)\cdot a^2\sin v\,du\,dv = a^3\iint_\Delta \sin v\,du\,dv =$$
$$= a^3\int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi} \sin v\,dv = a^3\cdot 2\pi\cdot(-\cos v)\Big|_0^{\pi} = 4\pi a^3.$$

b) Parametrizăm suprafaţa $\Sigma$. Avem $x = v\cos u$, $y = v\sin u$, $z = v$, $(u,v)\in\Delta$, unde $(\Delta):\ 0\le u\le 2\pi,\ \ 0\le v\le h$. Avem:

$$A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} v\cos u & \sin u \\ 0 & 1\end{vmatrix} = v\cos u,\quad B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -v\sin u & \cos u\end{vmatrix} =$$
$$= v\sin u,\quad C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} -v\sin u & \cos u \\ v\cos u & \sin u\end{vmatrix} = -v,$$

iar $A^2+B^2+C^2=2v^2$. Deoarece $\cos\gamma=\dfrac{-v}{\pm v\sqrt{2}}=\mp\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, iar suprafaţa $\Sigma$ este considerată cu faţa exterioară, vom lua semnul minus în faţa radicalului pentru ca $\cos\gamma>0$. Deci:

$$\cos\alpha=\frac{v\cos u}{-v\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos u,\quad \cos\beta=\frac{v\sin u}{-v\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin u,\quad \cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Rezultă astfel:

$$I=\iint_\Sigma[(y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma]\,dS=\iint_\Delta\left[(v\sin u-v)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos u\right)+\right.$$

$$\left.+(v-v\cos u)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin u\right)+(v\cos u-v\sin u)\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cdot v\sqrt{2}\,du\,dv=$$

$$=\iint_\Delta[-v^2(\sin u-1)\cos u-v^2(1-\cos u)\sin u+v^2(\cos u-\sin u)]\,du\,dv=$$

$$=\int_0^h v^2\,dv\cdot\int_0^{2\pi}(-\sin u\cos u+\cos u-\sin u+\sin u\cos u+\cos u-\sin u)\,du=$$

$$=\frac{h^3}{3}\int_0^{2\pi}(2\cos u-2\sin u)\,du=0.$$

c) Ecuaţiile parametrice ale suprafeţei $\Sigma$ sunt:

$x=a\cos u\sin v,\ \ y=b\sin u\sin v,\ \ z=c\cos v,\ \ (u,v)\in\Delta$, unde $(\Delta):\ 0\le u\le 2\pi$, $0\le v\le\pi$. Avem:

$$A=\frac{D(y,z)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} b\cos u\sin v & b\sin u\cos v\\ 0 & -c\sin v\end{vmatrix}=-bc\cos u\sin^2 v,$$

$$B=\frac{D(z,x)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} 0 & -c\sin v\\ -a\sin u\sin v & a\cos u\cos v\end{vmatrix}=-ac\sin u\sin^2 v,$$

$$C=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} -a\sin u\sin v & a\cos u\cos v\\ b\cos u\sin v & b\sin u\cos v\end{vmatrix}=-ab\sin v\cos v,$$

iar $A^2+B^2+C^2=\sin^2 v(b^2c^2\cos^2 u\sin^2 v+a^2c^2\sin^2 u\sin^2 v+a^2b^2\cos^2 v)$.

Pentru ca:

$$\cos\gamma=\frac{-ab\sin v\cos v}{\pm\sin v\cdot\sqrt{b^2c^2\cos^2 u\sin^2 v+a^2c^2\sin^2 u\sin^2 v+a^2b^2\cos^2 v}}=\frac{-ab\cos v}{\pm E}$$

($E$ este numitorul fracţiei de mai sus, fără semnele $\pm$) să fie mai mare sau egal cu zero, vom lua semnul $-$ în faţa radicalului. Deci:

$$\cos\alpha=\frac{bc\cos u\sin^2 v}{\sin v\cdot E}=\frac{bc\sin v\cos u}{E},\quad \cos\beta=\frac{ac\sin u\sin^2 v}{\sin v\cdot E}=\frac{ac\sin u\sin v}{E},$$

$$\cos\gamma=\frac{ab\cos v}{E}.$$

Rezultă astfel că:

$$I=\iint_\Sigma\left(\frac{1}{x}\cos\alpha+\frac{1}{y}\cos\beta+\frac{1}{z}\cos\gamma\right)dS=-\iint_\Delta\left(\frac{A}{x(u,v)}+\frac{B}{y(u,v)}+\frac{C}{z(u,v)}\right)du\,dv=$$

$$=\iint_\Delta\left(\frac{bc\cos u\sin^2 v}{a\cos u\sin v}+\frac{ac\sin u\sin^2 v}{b\sin u\sin v}+\frac{ab\sin v\cos v}{c\cos v}\right)du\,dv=$$

$$= \iint_\Delta \left(\frac{bc}{a}\sin v + \frac{ac}{b}\sin v + \frac{ab}{c}\sin v\right) du\,dv = \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right) 2\pi \left(-\cos v\right)\Big|_0^\pi =$$
$$= \frac{4\pi(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2)}{abc}.$$

d) Ca şi la punctul precedent, ecuaţiile parametrice ale jumătăţii superioare a elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ sunt:

$x = a\cos u \sin v$, $y = b\sin u \sin v$, $z = c\cos v$, $(u, v) \in \Delta$, unde $(\Delta):\ 0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$, iar $\cos\alpha = \frac{bc\sin v\cos u}{E}$, $\cos\beta = \frac{ac\sin u\sin v}{E}$, $\cos\gamma = \frac{ab\cos v}{E}$. Obţinem:

$$I_1 = -\iint_\Delta x^3(u,v)\,A\,du\,dv = \iint_\Delta a^3\cos^3 u \sin^3 v\cdot bc\cos u\sin^2 v\,du\,dv =$$
$$= a^3bc\int_0^{2\pi}\cos^4 u\,du\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^5 v\,dv = -a^3bc\int_0^{2\pi}\frac{(1+\cos 2u)^2}{4}du\cdot\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 v)^2(\cos v)'\,dv =$$
$$= -a^3bc\int_0^{2\pi}\frac{1 + 2\cos 2u + \cos^2 2u}{4}du\cdot\left(\cos v - \frac{2}{3}\cos^3 v + \frac{1}{5}\cos^5 v\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2\pi a^3bc}{5},$$

iar $I_2 = -\iint_\Delta y(u,v)\,z(u,v)\,B\,du\,dv = \iint_\Delta bc\sin u\sin v\cos v\cdot ac\sin u\sin^2 v\,du\,dv =$

$$= abc^2\int_0^{2\pi}\sin^2 u\,du\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^3 v\cos v\,dv = abc^2\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2u}{2}du\cdot\frac{\sin^4 v}{4}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi abc^2}{4}.$$

**10.** Să se verifice formula lui Stokes pentru funcţiile:

a) $P = y$, $Q = z$, $R = x$, considerând $\Gamma$ cercul $x = a\cos^2 t$, $y = a\sqrt{2}\sin t\cos t$, $z = a\sin^2 t$, $t \in [0, \pi]$, iar $\Sigma$ este discul cu frontiera $\Gamma$, ($\Gamma$ este intersecţia sferei $x^2+y^2+z^2 = a^2$ cu planul $x + z = a$, de rază $\frac{a}{\sqrt{2}}$, parcurs în sens direct trigonometric dacă privim dinspre semiaxa pozitivă $Ox$, din afara sferei).

b) $P = y^2 + z^2$, $Q = z^2 + x^2$, $R = x^2 + y^2$, unde $\Sigma$ este suprafaţa decupată de cilindrul $x^2 + y^2 = 2rx$ din sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $0 < r < R$, $z > 0$, iar $\Gamma = Fr\,S$ fiind orientată compatibil cu orientarea suprafeţei.

c) $P = z^2 - x^2$, $Q = x^2 - y^2$, $R = y^2 - z^2$, unde $\Sigma$ este suprafaţa elicoidală $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = cv$, $u \in [a, b]$, $v \in [0, 2\pi]$, mărginită de două linii elicoidale şi de două segmente de dreaptă, formând împreună conturul $\Gamma$, $(0 < a < b)$.

**Rezolvare.** Funcţiile $P$, $Q$, $R$ de mai sus sunt continue cu derivate parţiale continue pe $\mathbb{R}^3$, suprafeţele $\Sigma$ sunt simple, cu două feţe, netede, regulate şi mărginite de curbe $\Gamma$ simple, închise şi netede (pe porţiuni).

a) Avem:

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_0^\pi [a\sqrt{2}\sin t\cos t(-2a\cos t\sin t) + a\sin^2 t\,a\sqrt{2}(\cos^2 t - \sin^2 t) +$$
$$+ a\cos^2 t\cdot 2a\sin t\cos t]\,dt = \int_0^\pi\left[-\frac{2\sqrt{2}a^2}{4}\sin^2 2t + a^2\sqrt{2}\left(\frac{\sin^2 2t}{4} - \frac{(1-\cos 2t)^2}{4}\right) +\right.$$
$$\left. + 2a^2\cos^3 t\sin t\right] dt = -\frac{\sqrt{2}}{2}a^2\int_0^\pi\frac{1-\cos 4t}{2}dt + a^2\sqrt{2}\int_0^\pi\left[\frac{1-\cos 4t}{8} - \right.$$

$$-\frac{1-2\cos 2t+\cos^2 2t}{4}\Big]\,dt - 2a^2\frac{\cos^4 t}{4}\Big|_0^\pi = -\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}.$$

Suprafaţa $\Sigma$ este dată prin relaţiile: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2\le a^2 \\ x+z=a \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} z=a-x \\ x^2+y^2+(a-x)^2\le a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=a-x \\ \dfrac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}}+y^2\le\dfrac{a^2}{2}, \end{cases}$$ (vezi Figura 6.1.30),

de unde deducem ecuaţiile sale parametrice:

$$x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}u\cos v,\ \ y=\frac{a\sqrt{2}}{2}u\sin v,\ \ z=\frac{a}{2}-\frac{a}{2}u\cos v,\ \ (u,v)\in\Delta,$$

unde $(\Delta):\ u\in[0,1],\ \ v\in[0,2\pi]$.

Avem:

$$A=\frac{D(y,z)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{a\sqrt{2}}{2}\sin v & \frac{a\sqrt{2}}{2}u\cos v \\ -\frac{a}{2}\cos v & \frac{a}{2}u\sin v \end{vmatrix}=\frac{a^2\sqrt{2}}{4}u,\ \ B=\frac{D(z,x)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} -\frac{a}{2}\cos v & \frac{a}{2}u\sin v \\ \frac{a}{2}\cos v & -\frac{a}{2}u\sin v \end{vmatrix}=0,$$

$$C=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{a}{2}\cos v & -\frac{a}{2}u\sin v \\ \frac{a\sqrt{2}}{2}\sin v & \frac{a\sqrt{2}}{2}u\cos v \end{vmatrix}=\frac{a^2\sqrt{2}}{4}u,$$

iar $A^2+B^2+C^2=\dfrac{a^4u^2}{4}$. Pentru ca $\cos\gamma=\dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{\frac{a^2\sqrt{2}}{4}u}{\pm\frac{a^2u}{2}}$ să fie mai mare sau egal cu zero, vom lua semnul + în faţa radicalului. Deci $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

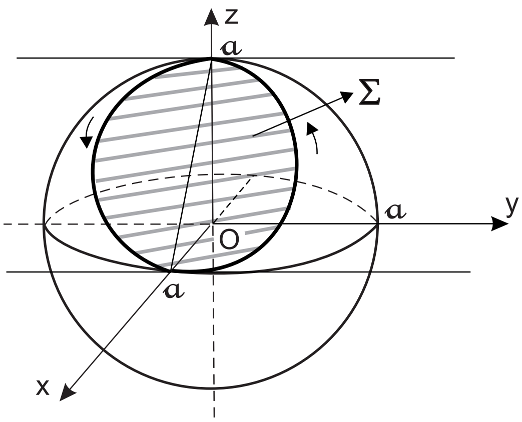


Figura 6.1.30

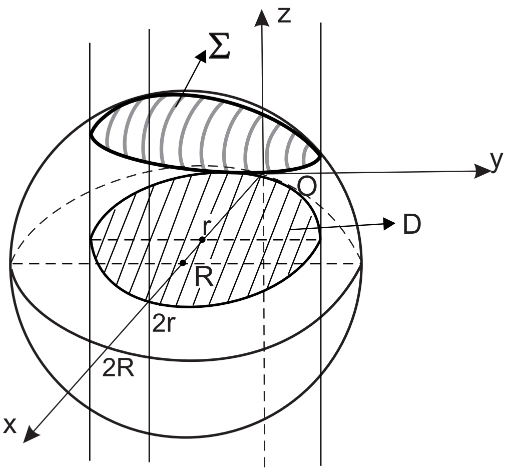


Figura 6.1.31

Rezultă:

$$I=\iint_\Sigma(-dy\,dz-dz\,dx-dx\,dy)=-\iint_\Sigma(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\,dS=$$

$$=-\frac{a^2}{\sqrt{2}}\iint_\Delta u\,du\,dv=-\frac{a^2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{u^2}{2}\Big|_0^1\cdot v\Big|_0^{2\pi}=-\frac{a^2\sqrt{2}\,\pi}{2}.$$

b) Determinăm mai întâi o parametrizare a curbei $\Gamma$:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2Rx \\ x^2+y^2=2rx, \quad z>0, \quad \text{(vezi Figura 6.1.31)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=r+r\cos t \\ y=r\sin t \\ z=\sqrt{2R(r+r\cos t)-2r(r+r\cos t)}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=r+r\cos t \\ y=r\sin t \\ z=\sqrt{2r(R-r)}\cdot\sqrt{1+\cos t}, \quad t\in[0,2\pi]. \end{cases}$$

Avem astfel:

$$\int_\Gamma (y^2+z^2)\,dx+(z^2+x^2)\,dy+(x^2+y^2)\,dz=\int_0^{2\pi}\Big\{[r^2\sin^2 t+2r(R-r)(1-\cos t)]\times$$
$$\times(-r\sin t)+[2r(R-r)(1+\cos t)+r^2(1+\cos t)^2]\,r\cos t+[r^2(1+\cos t)^2+r^2\sin^2 t]\times$$
$$\times\sqrt{2r(R-r)}\,\frac{-\sin t}{2\sqrt{1+\cos t}}\Big\}\,dt=\int_0^{2\pi}\Big[-r^3\sin^3 t-2r^2(R-r)(1+\cos t)\sin t+2r^2(R-$$
$$-r)(1+\cos t)\cos t+r^3(1+\cos t)^2\cos t-r^2\sqrt{2r(R-r)}\,\frac{\sin t(1+\cos t)}{\sqrt{1+\cos t}}\Big]\,dt=$$
$$=r^3\int_0^{2\pi}(1-\cos^2 t)(\cos t)'\,dt+2r^2(R-r)\int_0^{2\pi}(1+\cos t)(\cos t)'\,dt+2r^2(R-r)\sin t\Big|_0^{2\pi}+$$
$$+2r^2(R-r)\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt+r^3\int_0^{2\pi}(\cos t+2\cos^2 t+\cos^3 t)\,dt+$$
$$+r^2\sqrt{2r(R-r)}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos t}\,(\cos t)'\,dt=2\pi r^2R.$$

Pentru integrala de suprafaţă:

$$I=\iint_\Sigma (2y-2z)\,dy\,dz+(2z-2x)\,dx\,dz+(2x-2y)\,dx\,dy,$$

unde $(\Sigma):\ x^2+y^2+z^2=2Rx,\ x^2+y^2\le 2rx,\ z>0$, avem $\cos\alpha=\dfrac{x-R}{R}$, $\cos\beta=\dfrac{y}{R}$, $\cos\gamma=\dfrac{z}{R}$.

Rezultă astfel că:

$$I=2\iint_\Sigma[(y-z)\cos\alpha+(z-x)\,cos\beta+(x-y)\,\cos\gamma]\,dS=2\iint_\Sigma\Big[(y-z)\frac{x-R}{R}+$$
$$+(z-x)\frac{y}{R}+(x-y)\frac{z}{R}\Big]\,dS=2\iint_\Sigma(z-y)\,dS.$$

Deoarece $(\Sigma):\ z=\sqrt{2Rx-x^2-y^2},\ (x,y)\in D$, unde $(D):\ x^2+y^2\le 2rx$, obţinem că:

$$dS=\sqrt{1+\frac{(R-x)^2}{2Rx-x^2-y^2}+\frac{y^2}{2Rx-x^2-y^2}}\,dx\,dy=\frac{R}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}\,dx\,dy.$$

Deci:

$$I=2\iint_D\frac{(\sqrt{2Rx-x^2-y^2}-y)R}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}\,dx\,dy=2R\iint_D\left(1-\frac{y}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}\right)dx\,dy=$$
$$=2R\cdot A(D)-2R\int_0^{2r}dx\int_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}}\frac{y}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}\,dy=2\pi r^2R-$$
$$-2R\int_0^{2r}(-\sqrt{2Rx-x^2-y^2})\Big|_{y=-\sqrt{2rx-x^2}}^{y=\sqrt{2rx-x^2}}dx=2\pi r^2R.$$

c) Avem $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4$, unde:

$$\Gamma_1 = \overline{AB} : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0, \ \ t \in [a, b], \end{cases} \qquad \Gamma_2 = \overset{\frown}{BC} : \begin{cases} x = b\cos t \\ y = b\sin t \\ z = ct, \ \ t \in [0, 2\pi], \end{cases}$$

$$\Gamma_3 = \overline{CD} : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 2\pi c, \ \ t \in [b, a], \end{cases} \qquad \Gamma_4 = \overset{\frown}{DA} : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = ct, \ \ t \in [2\pi, 0], \end{cases}$$

(vezi Figura 6.1.32).

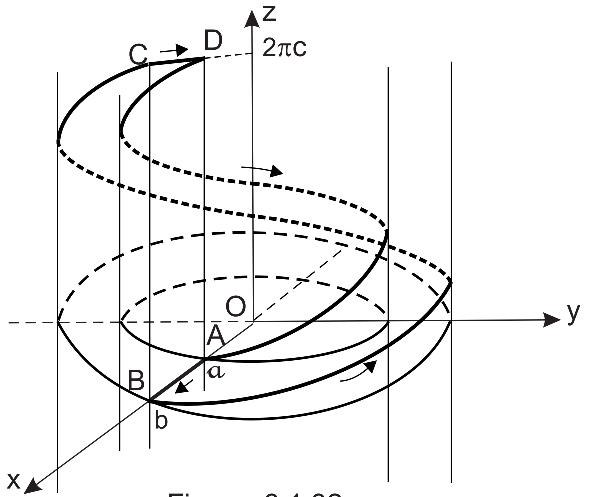


Figura 6.1.32

Rezultă:

$$\int_\Gamma (z^2 - x^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy + (y^2 - z^2)\,dz = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4} =$$

$$= \int_a^b [-t^2 \cdot 1 + t^2 \cdot 0 + 0]\,dt + \int_0^{2\pi} [(c^2t^2 - b^2\cos^2 t)(-b\sin t) + (b^2\cos^2 t - b^2\sin^2 t)\,b\cos t +$$

$$+ (b^2\sin^2 t - c^2t^2)\,c]\,dt + \int_b^a [(4\pi^2c^2 - t^2)\cdot 1 + (t^2 - 0)\cdot 0 + 0]\,dt + \int_{2\pi}^0 [(c^2t^2 - a^2\cos^2 t)(-a\sin t) +$$

$$+ (a^2\cos^2 t - a^2\sin^2 t)(a\cos t) + (a^2\sin^2 t - c^2t^2)\,c]\,dt = -\frac{b^3 - a^3}{3} + 4\pi^2c^2(a-b) - \frac{a^3 - b^3}{3} +$$

$$+ \int_0^{2\pi} (-bc^2t^2\sin t + b^3\sin t\cos^2 t + b^3\cos^3 t - b^3\sin^2 t\cos t + b^2c\sin^2 t - c^3t^2)\,dt -$$

$$- \int_0^{2\pi} (-ac^2t^2\sin t + a^3\sin t\cos^2 t + a^3\cos^3 t - a^3\sin^2 t\cos t + a^2c\sin^2 t - c^3t^2)\,dt =$$

$$= 4\pi^2c^2(a-b) + \left[ bc^2t^2\cos t\Big|_0^{2\pi} - 2bc^2\int_0^{2\pi} t\cos t\,dt - \frac{b^3\cos^3 t}{3}\Big|_0^{2\pi} + \right.$$

$$\left. + b^3\int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t)(\sin t)'\,dt - \frac{b^3}{3}\sin^3 t\Big|_0^{2\pi} + b^2c\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2}\,dt - c^3\frac{t^3}{3}\Big|_0^{2\pi} \right] -$$

$$- \left[ ac^2t^2\cos t\Big|_0^{2\pi} - 2ac^2\int_0^{2\pi} t\cos t\,dt - a^3\frac{\cos^3 t}{3}\Big|_0^{2\pi} + a^3\int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t)(\sin t)'\,dt - \right.$$

$$\left. - \frac{a^3}{3}\sin^3 t\Big|_0^{2\pi} + a^2c\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2}\,dt - c^3\frac{t^3}{3}\Big|_0^{2\pi} \right] = \pi c(b^2 - a^2).$$

Pentru integrala de suprafaţă:

$$I = \iint_{\Sigma} 2y\,dy\,dz + 2z\,dx\,dz + 2x\,dx\,dy,$$

unde $(\Sigma):\ x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = cv,\ (u,v) \in \Delta,$ cu $(\Delta):\ a \le u \le b,\ 0 \le v \le 2\pi,$ avem:

$$A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \sin v & u\cos v \\ 0 & c \end{vmatrix} = c\sin v, \quad B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} 0 & c \\ \cos v & -u\sin v \end{vmatrix} = -c\cos v,$$

$$C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u,$$ iar $A^2 + B^2 + C^2 = c^2 + u^2$. Rezultă:

$$\cos\alpha = \frac{c\sin v}{\pm\sqrt{c^2+u^2}}, \quad \cos\beta = \frac{-c\cos v}{\pm\sqrt{c^2+u^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{u}{\pm\sqrt{c^2+u^2}}.$$

Luăm faţa exterioară a suprafeţei $\Sigma$, deci $\cos\gamma > 0$, adică vom considera semnul $+$ în faţa radicalilor de mai sus. Obţinem astfel:

$$I = 2\iint_{\Sigma} (y\cos\alpha + z\cos\beta + x\cos\gamma)\,dS = 2\iint_{\Delta} (y(u,v)A + z(u,v)B + x(u,v)C)\,du\,dv =$$
$$= 2\iint_{\Delta} (u\sin v \cdot c\sin v - c^2 v\cos v + u\cos v \cdot u)\,du\,dv = 2\left[c\frac{b^2-a^2}{2}\pi - c^2(b-a)v\sin v\Big|_0^{2\pi} - \right.$$
$$\left. -c^2\cos v\Big|_0^{2\pi} \cdot (b-a) + \frac{b^3-a^3}{3}\sin v\Big|_0^{2\pi}\right] = \pi c(b^2-a^2).$$

**11.** Să se calculeze aplicând formula lui Stokes integrala:

$$\int_{\Gamma} (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz,$$

unde $\Gamma$ este secţiunea cubului $0 < x < a,\ 0 < y < a,\ 0 < z < a$ cu planul $x + y + z = \frac{3}{2}a$ parcursă în sens direct trigonometric, dacă privim dinspre partea pozitivă a axei $Ox$.

**Rezolvare.** Funcţiile $P$, $Q$, $R$ sunt continue, cu derivate parţiale continue pe $\mathbb{R}^3$, iar suprafaţa $\Sigma$ mărginită de curba $\Gamma$ (simplă, închisă şi netedă) este cu două feţe, simplă, netedă şi regulată (vezi Figura 6.1.33).

Avem:

$$I = \int_{\Gamma} (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz = \iint_{\Sigma} (-2y - 2z)\,dy\,dz + (-2z -$$
$$-2x)\,dx\,dz + (-2x - 2y)\,dx\,dy = -2\iint_{\Sigma} (y+z)\,dy\,dz + (x+z)\,dx\,dz + (x+y)\,dx\,dy,$$

unde $(\Sigma):\ x + y + z = \frac{3}{2}a,\ \ (x,y) \in D$ (vezi Figura 6.1.34).

Deoarece vectorul normal la suprafaţa $\Sigma$ este $N = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ rezultă că $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$, deci:

$$I = -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma} [(y+z) + (x+z) + (x+y)]\,dS = -\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma} (x+y+z)\,dS =$$
$$= -\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_{D} \left(x + y + \frac{3}{2}a - x - y\right) \cdot \sqrt{3}\,dx\,dy = -6a\iint_{D} dx\,dy = -6a \cdot A(D) = -\frac{9a^3}{2},$$

$\left(A(D) = A(OF'MC') - 2A(OE'D') = \dfrac{3a^2}{4}\right).$

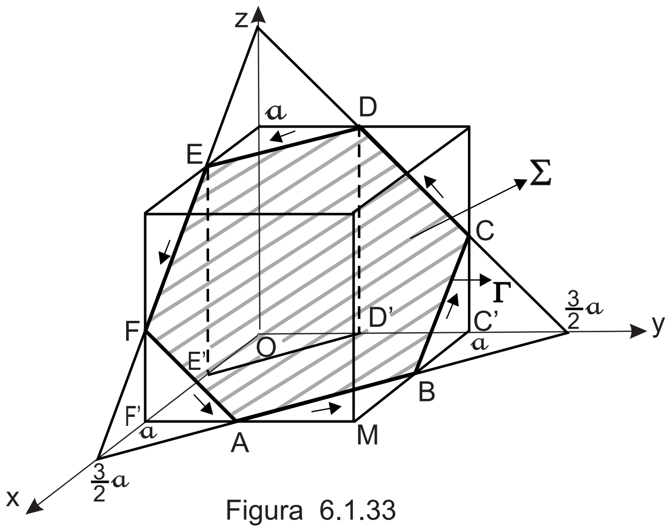


Figura 6.1.33

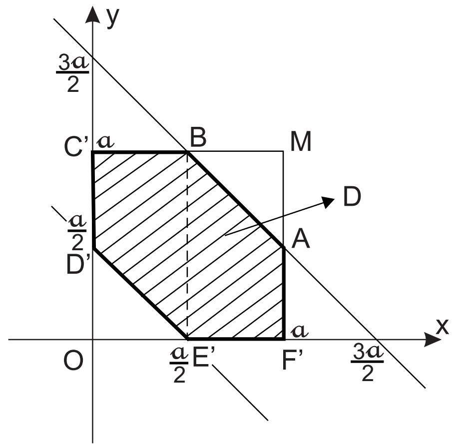


Figura 6.1.34

**12.** Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Gauss-Ostrogradski următoarele integrale de suprafaţă:

a) $\displaystyle\iint_\Sigma x^3\,dy\,dz + y^3\,dx\,dz + z^3\,dx\,dy$, unde $\Sigma$ este faţa exterioară a sferei $x^2+y^2+z^2 = a^2$;

b) $\displaystyle\iint_\Sigma (x-y+z)\,dy\,dz + (y-z+x)\,dz\,dx + (z-x+y)\,dx\,dy$, unde $\Sigma$ este faţa exterioară a suprafeţei $|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| = 1$;

c) $\displaystyle\iint_\Sigma x^3\,dy\,dz + x^2y\,dz\,dx + x^2z\,dx\,dy$, unde $\Sigma$ este suprafaţa cilindrului $x^2+y^2 = R^2$ cuprinsă între planele $z=0$, $z=a$;

d) $\displaystyle\iint_\Sigma \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dS$, unde $\Sigma$ este o suprafaţă simplă, închisă, netedă şi regulată care mărgineşte un domeniu compact $G$, iar $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sunt cosinusurile directoare ale normalei exterioare la această suprafaţă.

**Rezolvare.** Avem îndeplinite toate condiţiile asupra funcţiilor de integrat şi asupra suprafeţelor $\Sigma$, deci putem aplica formula lui Gauss-Ostrogradski.

a) Avem:

$$I = \iiint_G (3x^2+3y^2+3z^2)\,dx\,dy\,dz, \text{ unde } (G):\ x^2+y^2+z^2 \le a^2.$$

Folosim coordonatele sferice $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $(r,\varphi,\theta) \in \widetilde{G}$, cu $\widetilde{G}:\ 0 \le r \le a,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi$. Obţinem:

$$I = 3\iiint_{\widetilde{G}} r^4 \sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta = 3\frac{a^5}{5}\cdot 2\pi\cdot(-\cos\theta)\Big|_0^\pi = \frac{12\pi a^5}{5}.$$

b) Avem $I = 3\displaystyle\iiint_G dx\,dy\,dz = 3\,V(G)$,

unde $(G):\ A = |x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| \le 1$. Deoarece:

$$|x-y+z| = \begin{cases} x-y+z, & \text{dacă } y \le x+z \\ -x+y-z, & \text{dacă } y > x+z, \end{cases}$$

$$|y-z+x| = \begin{cases} y-z+x, & \text{dacă } z \le x+y \\ -y+z-x, & \text{dacă } z > x+y, \end{cases}$$

$$|z-x+y| = \begin{cases} z-x+y, & \text{dacă } x \le y+z \\ -z+x-y, & \text{dacă } x > y+z, \end{cases}$$

rezultă că:

$$A = \begin{cases} x+y+z, & \text{dacă } y \le x+z,\ z \le x+y,\ x \le y+z, \\ 3z-x-y, & \text{dacă } y \le x+z,\ z > x+y,\ x \le y+z, \\ -x+3y-z, & \text{dacă } y > x+z,\ z \le x+y,\ x \le y+z, \\ -3x+y+z, & \text{dacă } y > x+z,\ z > x+y,\ x \le y+z, \\ 3x-y-z, & \text{dacă } y \le x+z,\ z \le x+y,\ x > y+z, \\ x-3y+z, & \text{dacă } y \le x+z,\ z > x+y,\ x > y+z, \\ x+y-3z, & \text{dacă } y > x+z,\ z \le x+y,\ x > y+z, \\ -x-y-z, & \text{dacă } y > x+z,\ z > x+y,\ x > y+z. \end{cases}$$

Astfel descompunem domeniul $G$ în 8 subdomenii:

$$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup G_5 \cup G_6 \cup G_7 \cup G_8, \text{ unde:}$$

$$(G_1): \begin{cases} x+y+z \le 1,\ y \le x+z, \\ z \le x+y,\ x \le y+z, \end{cases} \qquad (G_2): \begin{cases} 3z-x-y \le 1,\ y \le x+z, \\ z > x+y,\ x \le y+z, \end{cases}$$

$$(G_3): \begin{cases} -x+3y-z \le 1,\ y > x+z, \\ z \le x+y,\ x \le y+z, \end{cases} \qquad (G_4): \begin{cases} -3x+y+z \le 1,\ y > x+z, \\ z > x+y,\ x \le y+z, \end{cases}$$

$$(G_5): \begin{cases} 3x-y-z \le 1,\ y \le x+z, \\ z \le x+y,\ x > y+z, \end{cases} \qquad (G_6): \begin{cases} x-3y+z \le 1,\ y \le x+z, \\ z > x+y,\ x > y+z, \end{cases}$$

$$(G_7): \begin{cases} x+y-3z \le 1,\ y > x+z, \\ z \le x+y,\ x > y+z, \end{cases} \qquad (G_8): \begin{cases} -x-y-z \le 1,\ y > x+z \\ z > x+y,\ x > y+z. \end{cases}$$

Vom calcula în continuare $V(G_1)$, celelalte volume calculându-se într-un mod asemănător. Notăm cu $(P_1): x+z=y$, $(P_2): x+y=z$, $(P_3): y+z=x$ şi $(P): x+y+z=1$ (vezi Figura 6.1.35). Deci $(P_1)=(OAB)$, $(P_2)=(OBC)$, $(P_3)=(OAC)$, $(P)=(MNQ)$, iar $G_1$ este delimitat de tetraedrul $OM_1M_2M_3$.

Rezultă astfel că $V(G_1) = \dfrac{1}{3} \cdot A(M_1M_2M_3) \cdot h$, cu $h = dist\,(O,(P)) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, iar $A(M_1M_2M_3) = \dfrac{\|\vec{M_1M_2} \times \vec{M_1M_3}\|}{2}$.

Punctul $M_1$ fiind intersecţia dintre dreapta $OA$ şi planul $(P)$ ($z=0$, $y=x$, $x+y=1$) are coordonatele $M_1\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0\right)$, punctul $M_2$ fiind intersecţia dintre dreapta $OB$ şi planul

$(P)$ $(x = 0,\ y = z,\ y + z = 1)$ are coordonatele $M_2\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, iar $M_3$ fiind intersecţia dintre dreapta $OC$ şi planul $(P)$ $(y = 0,\ x = z,\ x + z = 1)$ are coordonatele $M_3\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$. Obţinem astfel:

$$\vec{M_1M_2} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{k},\quad \vec{M_1M_3} = -\frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k},\quad \vec{M_1M_2} \times \vec{M_1M_3} = \frac{1}{4}\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j} + \frac{1}{4}\vec{k},$$

iar $\|\vec{M_1M_2} \times \vec{M_1M_3}\| = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Deci $A(M_1M_2M_3) = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$, iar $V(G_1) = \dfrac{1}{24}$.

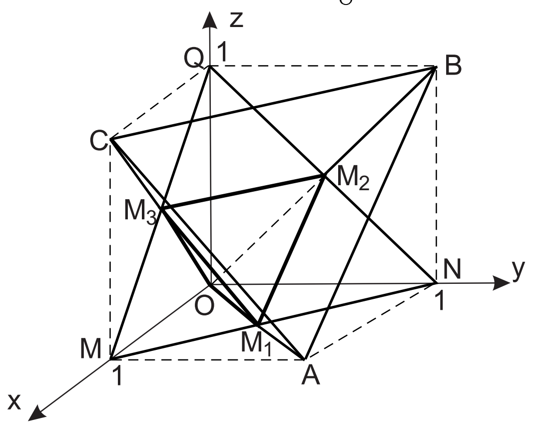


Figura 6.1.35

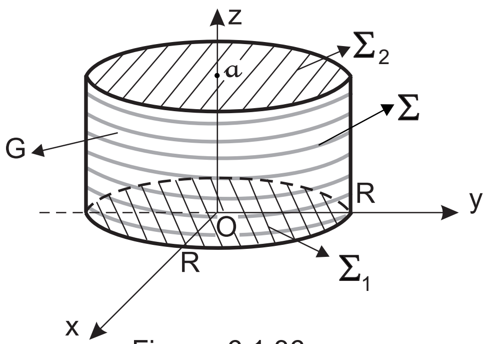


Figura 6.1.36

Având coordonatele celor patru vârfuri ale tetraedrului $OM_1M_2M_3$, volumul său poate fi calculat folosind formula (vezi [12]):

$$V(G_1) = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{24}.$$

Rezultă în mod analog că $V(G_2) = \cdots = V(G_8) = \dfrac{1}{24}$, deci:

$$V(G) = \frac{1}{3},\ \text{ iar }\ I = 3V(G) = 1.$$

c) Pentru a putea aplica aici formula lui Gauss-Ostrogradski, vom completa suprafaţa cilindrică $\Sigma$ cu discul $(\Sigma_1) : z = 0,\ x^2 + y^2 \le R^2$ şi discul $(\Sigma_2) : z = a,\ x^2 + y^2 \le R^2$, (vezi Figura 6.1.36). Astfel $\iint_\Sigma + \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} = 5\iiint_G x^2\,dx\,dy\,dz$, unde $G$ este domeniul delimitat de suprafeţele $\Sigma$, $\Sigma_1$ şi $\Sigma_2$, adică $(G) : x^2 + y^2 \le R^2,\ 0 \le z \le a$.

Pentru a calcula integrala triplă de mai sus facem schimbarea de variabile $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, $(r, \varphi, z) \in \widetilde{G}$, unde $(\widetilde{G}) : 0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le z \le a$. Obţinem:

$$5\iiint_G x^2\,dx\,dy\,dz = 5\iiint_{\widetilde{G}} r^2\cos^2\varphi \cdot r\,dr\,d\varphi\,dz = 5\frac{R^4}{4} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}\,d\varphi \cdot a =$$

$= \dfrac{5\pi a R^4}{4}$.

Pentru $\Sigma_1$ vectorul normal la suprafaţă este $\vec{n} = -\vec{k}$, deci:

$$\iint_{\Sigma_1} (x^3\, dy\, dz + x^2 y\, dz\, dx + x^2 z\, dx\, dy) = \iint_{\Sigma_1} (-x^2 z)\, dS = \iint_{D_1} (-x^2 \cdot 0) \cdot \sqrt{1}\, dx\, dy = 0,$$

unde $(D_1):\ x^2 + y^2 \leq R^2$.

Pentru $\Sigma_2$ vectorul normal la suprafaţă este $\vec{n} = \vec{k}$, deci:

$$\iint_{\Sigma_2} (x^3\, dy\, dz + x^2 y\, dz\, dx + x^2 z\, dx\, dy) = \iint_{\Sigma_2} x^2 z\, dS = \iint_{D_1} x^2 a \cdot \sqrt{1}\, dx\, dy =$$

$$= a \iint_{D_1} x^2\, dx\, dy = a \iint_{\widetilde{D}_1} r^2 \cos^2 \varphi \cdot r\, dr\, d\varphi = a \frac{R^4}{4} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}\, d\varphi = \frac{a\pi R^4}{4},$$

unde $(\widetilde{D}_1):\ 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Rezultă astfel:

$$\iint_{\Sigma} (x^3\, dy\, dz + x^2 y\, dz\, dx + x^2 z\, dx\, dy) = \frac{5\pi a R^4}{4} - \frac{\pi a R^4}{4} = \pi a R^4.$$

d) Avem:

$$\iint_{\Sigma} \frac{x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\, dS = \iiint_G \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2} \right) dx\, dy\, dz =$$

$$= 2 \iiint_G \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

**13.** Să se calculeze volumul corpului $G$ limitat de suprafaţa:

$$(\Sigma_0):\ \begin{cases} x = a \cos u \cos v + b \sin u \sin v \\ y = a_1 \cos u \sin v + b_1 \sin u \cos v \\ z = c \sin u,\quad (u, v) \in \Delta, \end{cases}$$

unde $(\Delta):\ -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq v \leq 2\pi$ şi de planele $z = c$ şi $z = -c$ $(a,\ a_1,\ b,\ b_1,\ c > 0)$.

**Rezolvare.** Avem $V(G) = \dfrac{1}{3} \displaystyle\iint_{\Sigma} (x\, \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma)\, dS$,

unde $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, $\Sigma_1$ fiind suprafaţa: $z = c$, $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{b_1^2} \leq 1$, iar $\Sigma_2$ este suprafaţa: $z = -c$, $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{b_1^2} \leq 1$.

Pentru $\Sigma_0$ deducem că:

$$A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)} = -c \cos u (a_1 \cos u \cos v - b_1 \sin u \sin v),$$

$$B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)} = -c \cos u (a \cos u \sin v - b \sin u \cos v),$$

$$C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = -(aa_1 + bb_1) \sin u \cos u + (ab_1 + a_1 b) \sin v \cos v.$$

În calculul lui $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ vom lua semnul $-$ în faţa radicalului $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$. Deci:

$$I_1 = \frac{1}{3}\iint_{\Sigma_0}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,dS = -\frac{1}{3}\iint_{\Delta}[x(u,v)A+y(u,v)B+z(u,v)C]\,du\,dv =$$
$$= \frac{1}{3}\iint_{\Delta}[(a\cos u\cos v+b\sin u\sin v)\cdot c\cos u\,(a_1\cos u\cos v-b_1\sin u\sin v)+(a_1\cos u\sin v+$$
$$+b_1\sin u\cos v)\cdot c\cos u\,(a\cos u\sin v-b\sin u\cos v)+c\sin u\,((aa_1+bb_1)\sin u\cos u-$$
$$-(ab_1+a_1b)\sin v\cos v)]\,du\,dv = \frac{1}{3}\iint_{\Delta}[aa_1c\cos^3 u-bb_1c\sin^2 u\cos u+$$
$$+aa_1c\sin^2 u\cos u+bb_1c\sin^2 u\cos u-c(ab_1+a_1b)\sin u\sin v\cos v]\,du\,dv =$$
$$= \frac{1}{3}\iint_{\Delta}[aa_1c\cos u-c(ab_1+a_1b)\sin u\sin v\cos v]\,du\,dv =$$
$$= \frac{1}{3}\left[aa_1c\sin u\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\cdot 2\pi - c(ab_1+a_1b)(-\cos u)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(-\frac{\cos 2v}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}\right] = \frac{4aa_1c\pi}{3}.$$

Pentru $\Sigma_1:\ z=c,\ (x,y)\in D,$ unde $(D):\ \dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{b_1^2}\le 1$, avem $\vec{n}=\vec{k}$. Deci:

$$I_2 = \frac{1}{3}\iint_{\Sigma_1}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,dS = \frac{1}{3}\iint_{\Sigma_1}z\cdot 1\,dS = \frac{c}{3}\iint_D dx\,dy =$$
$$= \frac{c}{3}\cdot A(D) = \frac{bb_1c\pi}{3}.$$

Asemănător pentru $\Sigma_2:\ z=-c,\ (x,y)\in D$ avem $\vec{n}=-\vec{k}$, iar:

$$I_3 = \frac{1}{3}\iint_{\Sigma_2}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,dS = \frac{1}{3}\iint_{\Sigma_2}z\cdot(-1)\,dS = \frac{c}{3}\iint_D dx\,dy =$$
$$= \frac{bb_1c\pi}{3}.$$

Rezultă astfel că:

$$V(G) = I_1+I_2+I_3 = \frac{4\pi aa_1c}{3}+\frac{2\pi bb_1c}{3} = \frac{2\pi c}{3}(2aa_1+bb_1).$$

## PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

**14.** Să se calculeze aria porţiunii de suprafaţă secţionată de cilindrul $x^2+y^2=a^2$ din sfera $x^2+y^2+z^2=R^2$, $0<a<R$.

**15.** Să se calculeze ariile:

a) părţii suprafeţei conului $z^2=2xy$, $x,\ y>0$ cuprinsă între planele $x=a$ şi $y=b$;

b) suprafeţei laterale a unui con cu înălţimea $c$ şi având ca bază o elipsă cu semiaxele $a$ şi $b$, $a>b>0$, (înălţimea trece prin centrul bazei);

c) porţiunii de suprafaţă reprezentată parametric prin ecuaţiile:

$$x=3u+3uv^2-u^3,\ \ y=3v+3u^2v-v^3,\ \ z=3(u^2-v^2),$$

corespunzătoare domeniului $0\le u\le 1$, $0\le v\le 1$ din planul $Ouv$.

**16.** Să se calculeze:

a) aria porţiunii suprafeţei $az = xy$, $a > 0$ cuprinsă în interiorul cilindrului $x^2+y^2 = = a^2$;

b) aria suprafeţei $x^2+y^2 = a^2$ cuprinsă între planele $x+z = 0$, $x-z = 0$, $x, y > 0$;

c) aria porţiunii de elicoid $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = b\varphi$ decupată din ea de cilindrul $x^2 + y^2 = a^2$ şi de planele $z = 0$ şi $z = 2\pi b$.

**17.** Să se calculeze următoarele integrale de primul tip:

a) $\iint_\Sigma (x^2 + y^2)\, dS$, $\Sigma$ fiind frontiera corpului $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1$;

b) $\iint_\Sigma z\, dS$, $\Sigma$ fiind o porţiune de pe suprafaţa elicoidului $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = v$, $0 < u < a$, $0 < v < 2\pi$;

c) $\iint_\Sigma z^2\, dS$, $\Sigma$ fiind o porţiune de pe suprafaţa conului $x = r\cos\varphi\sin\alpha$, $y = r\sin\varphi\sin\alpha$, $z = r\cos\alpha$, $0 \le r \le a$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $\alpha = const.$, $0 < \alpha < \pi/2$;

d) $\iint_\Sigma (y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2)\, dS$, unde $\Sigma$ este suprafaţa decupată din partea superioară a conului $z^2 = k^2(x^2 + y^2)$ de cilindrul $x^2 + y^2 - 2ax = 0$.

**18.** Să se calculeze masa şi coordonatele centrului de greutate ale porţiunii de pe suprafaţa omogenă $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ decupată de suprafaţa $x^2 + y^2 = ax$, ($\varrho = \varrho_0$, $a > 0$).

**19.** Să se calculeze momentul de inerţie al pânzei sferice omogene $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$ de densitate $\varrho_0$ în raport cu axa $Oz$.

**20.** Să se calculeze următoarele integrale de suprafaţă de al doilea tip:

a) $\iint_\Sigma x^2y^2z\, dx\, dy$, unde $\Sigma$ este faţa exterioară a jumătăţii inferioare a sferei $x^2+ +y^2 + z^2 = R^2$;

b) $I_1 = \iint_\Sigma dx\, dy$, $I_2 = \iint_\Sigma z\, dx\, dy$, $I_3 = \iint_\Sigma z^2\, dx\, dy$, unde $\Sigma$ este faţa exterioară a elipsoidului $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

c) $\iint_\Sigma x^2\, dy\, dz + y^2\, dx\, dz + z^2\, dx\, dy$, unde $\Sigma$ este faţa exterioară a sferei $(x-a)^2+ +(y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

**21.** Să se verifice formula lui Stokes pentru funcţiile:

a) $P = x^2y^3$, $Q = 1$, $R = z$, dacă conturul $\Gamma$ este circumferinţa $x^2+y^2 = a^2$, $z = 0$, iar suprafaţa $\Sigma$ este emisfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $z > 0$; luăm pe suprafaţă faţa superioară, iar conturului îi dăm sensul contrar acelor de ceasornic, privind de sus;

b) $P = y^2z^2$, $Q = x^2z^2$, $R = x^2y^2$, unde $\Gamma$ este curba închisă $x = a\cos t$, $y = a\cos 2t$, $z = a\cos 3t$, $t \in [0, 2\pi]$, parcursă în sensul creşterii parametrului $t$, iar $\Sigma$ este suprafaţa mărginită de $\Gamma$, de ecuaţii parametrice $x = au\cos v$, $y = au\cos 2v$, $z =$

$= au\cos 3v,\ \ u\in[0,1],\ \ v\in[0,2\pi]$.

**22.** Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Gauss-Ostrogradski următoarele integrale de suprafaţă:

a) $\displaystyle\iint_\Sigma xyz(x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy)$, unde $\Sigma$ este faţa exterioară a porţiunii de suprafaţă $x^2+y^2+z^2=a^2,\ \ x,\ y,\ z\geq 0$;

b) $\displaystyle\iint_\Sigma xy\,dy\,dz+y^2\,dx\,dz+yz\,dx\,dy$, unde $\Sigma$ este faţa exterioară a sferei $x^2+y^2+z^2=$ $=R^2$;

c) $\displaystyle\iint_\Sigma (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,dS$, unde $\Sigma$ este porţiunea suprafeţei conice $x^2+y^2=z^2,\ \ 0\leq z\leq h$, iar $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sunt cosinusurile directoare ale normalei exterioare la această suprafaţă;

d) $\displaystyle\iint_\Sigma yz\,dy\,dz+xz\,dx\,dz+xy\,dx\,dy$, $\Sigma$ fiind o suprafaţă simplă, netedă, regulată şi închisă care mărgineşte un domeniu compact $G$.

# §2. ELEMENTE DE TEORIA CÂMPURILOR

**1. Gradient.** Dacă $U(\vec{r})=U(x,y,z)$, $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, este un câmp scalar continuu derivabil ($\exists\ \dfrac{\partial U}{\partial x},\ \dfrac{\partial U}{\partial y},\ \dfrac{\partial U}{\partial z}$ continue), numim *gradient* al acestui câmp vectorul:

$$\operatorname{grad} U=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k},\ \text{ notat şi } \nabla U,\ \text{ unde } \nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Derivata câmpului $U$ după o direcţie oarecare $\vec{l}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}$ este:

$$\frac{dU}{d\vec{l}}=\operatorname{grad} U\cdot\vec{l}=\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma.$$

**2. Divergenţa şi rotorul unui câmp.** Pentru câmpul vectorial:

$$\vec{F}(\vec{r})=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

scalarul $\operatorname{div}\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$ se numeşte *divergenţa* acestui câmp.

Vectorul:

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

se numeşte *rotorul* câmpului.

Un câmp vectorial $\vec{F}$ se numeşte *solenoidal* dacă $\operatorname{div}\vec{F}=0$. Un câmp vectorial $\vec{F}$ se numeşte *irotaţional* dacă $\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{0}$.

**3. Câmp potenţial.** Un câmp vectorial $\vec{F}$ se numeşte *potenţial* dacă există un câmp scalar $U$ astfel încât $\vec{F} = \operatorname{grad} U$. În acest caz $U$ este potenţialul sau funcţia potenţială a câmpului vectorial $\vec{F}$.

Dacă $\vec{F}$ este un câmp vectorial definit pe domeniul $D$ simplu conex ($P$, $Q$, $R$ continue cu derivate parţiale de ordinul întâi continue) atunci condiţia necesară şi suficientă pentru ca $\vec{F}$ să fie potenţial este ca $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$ (câmp irotaţional).

**4. Fluxul unui vector printr-o suprafaţă.** Să presupunem că vectorul $\vec{F}(\vec{r})$ generează în domeniul $G$ un câmp vectorial. Numim *fluxul* vectorului printr-o suprafaţă dată $\Sigma$ în sensul indicat de versorul normalei $\vec{n} = \cos\alpha\, \vec{i} + \cos\beta\, \vec{j} + \cos\gamma\, \vec{k}$ integrala de suprafaţă:

$$\iint_\Sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS.$$

Formula lui Ostrogradski devine în transcriere vectorială:

$$\iint_\Sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_G \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz,$$

unde $\Sigma$ este suprafaţa care mărgineşte domeniul compact $G$, iar $\vec{n}$ este vectorul normalei exterioare la suprafaţa $\Sigma$.

**5. Circulaţia unui vector.** Numim *integrala liniară* a vectorului $\vec{F}(\vec{r})$ luată de-a lungul unei curbe $\Gamma$ sau *lucrul mecanic* al câmpului $\vec{F}$ integrala curbilinie:

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\Gamma P\, dx + Q\, dy + R\, dz.$$

Dacă conturul $\Gamma$ este închis, integrala liniară se numeşte *circulaţia* vectorului $\vec{F}$ de-a lungul conturului $\Gamma$.

Transcrisă vectorial formula lui Stokes devine:

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_\Sigma \vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{F}\, dS,$$

unde $\Gamma$ este conturul închis care mărgineşte suprafaţa $\Sigma$, iar direcţia normalei $\vec{n}$ la suprafaţa $\Sigma$ trebuie astfel luată încât pentru un observator care s-ar afla pe suprafaţa $\Sigma$ cu capul îndreptat după normală, sensul de parcurs al conturului $\Gamma$ să fie direct trigonometric.

## PROBLEME REZOLVATE

**1.** În ce puncte ale spaţiului $Oxyz$ gradientul câmpului:

$$U = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

este a) perpendicular pe axa $Oz$; b) paralel cu axa $Oz$; c) egal cu $\vec{0}$ ?

**Rezolvare.** Avem:
$\nabla U = \dfrac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = (3x^2 - 3yz)\vec{i} + (3y^2 - 3xz)\vec{j} + (3z^2 - 3xy)\vec{k}.$

a) $\nabla U \perp (Oz) \Leftrightarrow \nabla U \cdot \vec{k} = 0 \Leftrightarrow 3z^2 - 3xy = 0 \Leftrightarrow z^2 = xy.$

Am obţinut ecuaţia conului hiperbolic.

b) $\nabla U \parallel (Oz) \Leftrightarrow \nabla U = \lambda\vec{k} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3yz = 0 \\ 3y^2 - 3xz = 0 \\ 3z^2 - 3xy = \lambda \end{cases} \Rightarrow x = y = z \ (x,\, y \neq 0)$ sau $x = y = 0.$

Am obţinut bisectoarea primului octant şi axa $Oz$.

În acest caz puteam pune şi condiţia $\nabla U \times \vec{k} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3x^2 - 3yz & 3y^2 - 3xz & 3z^2 - 3xy \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3y^2 - 3xz)\vec{i} - (3x^2 - 3yz)\vec{j} = \vec{0} \Rightarrow x = y = z$$

sau $x = y = 0.$

c) $\nabla U = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - yz = 0 \\ y^2 - xz = 0 \\ z^2 - xy = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z.$

Am obţinut bisectoarea primului octant.

**2.** Să se demonstreze formula:

$\operatorname{grad}(UV) = V \operatorname{grad} U + U \operatorname{grad} V$, unde $U$, $V$ sunt câmpuri scalare.

**Rezolvare.** Avem:
$\operatorname{grad}(UV) = \dfrac{\partial}{\partial x}(UV)\,\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}(UV)\,\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}(UV)\,\vec{k} = \left(\dfrac{\partial U}{\partial x}V + U\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)\vec{i} +$
$+ \left(\dfrac{\partial U}{\partial y}V + U\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(\dfrac{\partial U}{\partial z}V + U\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)\vec{k} = V \operatorname{grad} U + U \operatorname{grad} V.$

**3.** Să se calculeze:

a) $\operatorname{grad} r$; b) $\operatorname{grad} r^2$; c) $\operatorname{grad} \dfrac{1}{r}$; d) $\operatorname{grad} f(r)$; e) $\operatorname{grad}(\vec{c} \cdot \vec{r})$; f) $\operatorname{grad}\{\|\vec{c} \times \vec{r}\|^2\}$, unde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, $\vec{c}$ este un vector constant, iar $f$ este o funcţie arbitrară derivabilă.

**Rezolvare.** a) $\operatorname{grad} r = \dfrac{\partial r}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial r}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial r}{\partial z}\vec{k} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{j} +$
$+ \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{k} = \dfrac{\vec{r}}{r};$

b) $\operatorname{grad} r^2 = \dfrac{\partial r^2}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial r^2}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial r^2}{\partial z}\vec{k} = 2r\dfrac{\partial r}{\partial x}\vec{i} + 2r\dfrac{\partial r}{\partial y}\vec{j} + 2r\dfrac{\partial r}{\partial z}\vec{k} = 2r \operatorname{grad} r = 2r\dfrac{\vec{r}}{r} = 2\vec{r};$

c) $\operatorname{grad} \dfrac{1}{r} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{r}\right)\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{r}\right)\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{1}{r}\right)\vec{k} = -\dfrac{x}{r^3}\vec{i} - \dfrac{y}{r^3}\vec{j} - \dfrac{z}{r^3}\vec{k} = -\dfrac{\vec{r}}{r^3};$

d) $\operatorname{grad} f(r) = \dfrac{\partial}{\partial x} f(r)\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y} f(r)\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial z} f(r)\vec{k} = f'(r)\left(\dfrac{x}{r}\vec{i} + \dfrac{y}{r}\vec{j} + \dfrac{z}{r}\vec{k}\right) = f'(r)\dfrac{\vec{r}}{r}$;

e) $\operatorname{grad}(\vec{c}\cdot\vec{r}) = \operatorname{grad}(c_1x + c_2y + c_3z) = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k} = \vec{c}$, $(\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k})$;

f) $\operatorname{grad}\{\|\vec{c}\times\vec{r}\|^2\} = \operatorname{grad}\left\{\left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}\right\|^2\right\} = \operatorname{grad}\{\|(c_2z - c_3y)\vec{i} - (c_1z - c_3x)\vec{j} +$
$+(c_1y - c_2x)\vec{k}\|^2\} = \operatorname{grad}\{(c_2z - c_3y)^2 + (c_1z - c_3x)^2 + (c_1y - c_2x)^2\} = \operatorname{grad}\{c_2^2z^2 - 2c_2c_3yz +$
$+c_3^2y^2 + c_1^2z^2 - 2c_1c_3xz + c_3^2x^2 + c_1^2y^2 - 2c_1c_2xy + c_2^2x^2\} = \operatorname{grad}\{(c_2^2 + c_3^2)x^2 + (c_1^2 + c_3^2)y^2 +$
$+(c_1^2 + c_2^2)z^2 - 2c_1c_2xy - 2c_1c_3xz - 2c_2c_3yz\} = [2(c_2^2 + c_3^2)x - 2c_1c_2y - 2c_1c_3z]\vec{i} + [2(c_1^2 + c_3^2)y -$
$-2c_1c_2x - 2c_2c_3z]\vec{j} + [2(c_1^2 + c_2^2)z - 2c_1c_3x - 2c_2c_3y]\vec{k} = 2[(c_2^2 + c_3^2 + c_1^2)x\vec{i} + (c_1^2 + c_3^2 + c_2^2)y\vec{j} +$
$+(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)z\vec{k}] - 2[(c_1^2x + c_1c_2y + c_1c_3z)\vec{i} + (c_2^2y + c_1c_2x + c_2c_3z)\vec{j} + (c_3^2z + c_1c_3x + c_2c_3y)\vec{k}] =$
$= 2(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) - 2[c_1(c_1x + c_2y + c_3z)\vec{i} + c_2(c_1x + c_2y + c_3z)\vec{j} + c_3(c_1x +$
$+c_2y + c_3z)\vec{k}] = 2\vec{c}^{\,2}\vec{r} - 2(\vec{c}\cdot\vec{r})\vec{c}$.

**4.** Să se calculeze:

$$\vec{a} = \vec{c}\times\operatorname{grad} U, \text{ dacă } U = \operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ şi } \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

**Rezolvare.** Avem:

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = -\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} -$$
$$-\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j} + \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}\vec{k}.$$

Rezultă atunci că:

$$\vec{a} = \vec{c}\times\operatorname{grad} U = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}[(x^2+y^2+yz)\vec{i} - (x^2+y^2+xz)\vec{j} + (-yz+xz)\vec{k}] =$$
$$= \frac{(x^2+y^2+yz)\vec{i} - (x^2+y^2+xz)\vec{j} + z(x-y)\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

**5.** Să se calculeze derivata câmpului $U = \dfrac{1}{r}$ după direcţia $\vec{l} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$, $(\|\vec{l}\| = 1)$, unde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. În ce caz această derivată este egală cu zero ?

**Rezolvare.** Avem $\dfrac{dU}{d\vec{l}} = \operatorname{grad} U\cdot\vec{l}$, iar:

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{k} = -\frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^{3/2}}\vec{i} - \frac{y}{r^3}\vec{j} - \frac{z}{r^3}\vec{k} = -\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Rezultă astfel:

$$\frac{dU}{d\vec{l}} = -\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{l} = -\frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{r^3} = -\frac{\cos\widehat{(\vec{l},\vec{r})}}{r^2}$$

şi $\dfrac{dU}{d\vec{l}} = 0 \Leftrightarrow \cos\,(\widehat{\vec{l},\vec{r}}) = 0 \Leftrightarrow \vec{l} \perp \vec{r}$.

**6.** Să se demonstreze că:

$$\operatorname{div}(U\vec{F}) = U \operatorname{div}\vec{F} + \vec{F}\cdot\operatorname{grad} U,$$

unde $U$ este un câmp scalar, iar $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ este un câmp vectorial.

**Rezolvare.** Avem:

$$\operatorname{div}(U\vec{F}) = \operatorname{div}(UP\vec{i} + UQ\vec{j} + UR\vec{k}) = \frac{\partial}{\partial x}(UP) + \frac{\partial}{\partial y}(UQ) + \frac{\partial}{\partial z}(UR) =$$
$$= \frac{\partial U}{\partial x}P + U\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}Q + U\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}R + U\frac{\partial R}{\partial z} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}P + \frac{\partial U}{\partial y}Q + \frac{\partial U}{\partial z}R\right) +$$
$$+U\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) = \vec{F}\cdot\operatorname{grad} U + U\operatorname{div}\vec{F}.$$

**7.** Să se calculeze:

a) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} U)$; b) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$; c) $\operatorname{div}\vec{r}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; d) $\operatorname{div}\dfrac{\vec{r}}{r}$; e) $\operatorname{div}(U\operatorname{grad} U)$, unde $U$ este un câmp scalar, iar $f$ este o funcţie de clasă $C^2$.

**Rezolvare.** a) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} U) = \operatorname{div}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial U}{\partial y}\right) +$

$+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial U}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U$, (Laplacianul câmpului $U$).

b) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) \overset{Prob.3,d)}{=} \operatorname{div}\left(f'(r)\,\dfrac{\vec{r}}{r}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(f'(r)\dfrac{x}{r}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(f'(r)\dfrac{y}{r}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(f'(r)\dfrac{z}{r}\right) =$

$$= \left(f''(r)\frac{x^2}{r^2} + f'(r)\frac{r^2-x^2}{r^3}\right) + \left(f''(r)\frac{y^2}{r^2} + f'(r)\frac{r^2-y^2}{r^3}\right) + \left(f''(r)\frac{z^2}{r^2} + f'(r)\frac{r^2-z^2}{r^3}\right) =$$
$$= f''(r) + f'(r)\frac{3r^2 - x^2 - y^2 - z^2}{r^3} = f''(r) + 2\frac{f'(r)}{r}.$$

c) $\operatorname{div}\vec{r} = \operatorname{div}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \dfrac{\partial x}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial z} = 3$.

d) $\operatorname{div}\dfrac{\vec{r}}{r} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{r}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{r}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{z}{r}\right) = \dfrac{r^2-x^2}{r^3} + \dfrac{r^2-y^2}{r^3} + \dfrac{r^2-z^2}{r^3} = \dfrac{2}{r}$.

e) $\operatorname{div}(U\operatorname{grad} U) = \operatorname{div}\left(U\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(U\dfrac{\partial U}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(U\dfrac{\partial U}{\partial y}\right) +$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(U\frac{\partial U}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + U\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + U\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + U\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} =$$
$$= (\operatorname{grad} U)^2 + U\,\Delta U.$$

**8.** Să se caculeze:

a) $\operatorname{rot}\vec{r}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; b) $\operatorname{rot}[\vec{c}\times f(r)\vec{r}]$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\vec{c}$ este un vector constant, $f$ o funcţie de clasă $C^1$; c) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U)$; d) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F})$, unde $U$ este un câmp scalar, iar $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ un câmp vectorial.

**Rezolvare.** a) $\operatorname{rot}\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{0}.$

b) Avem:

$$\vec{c}\times f(r)\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ xf(r) & yf(r) & zf(r) \end{vmatrix} = [c_2zf(r) - c_3yf(r)]\vec{i} - [c_1zf(r) - c_3xf(r)]\vec{j} + $$
$$+[c_1yf(r) - c_2xf(r)]\vec{k}.$$

Rezultă atunci că:

$$\operatorname{rot}[\vec{c}\times f(r)\vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (c_2z - c_3y)f(r) & (c_3x - c_1z)f(r) & (c_1y - c_2x)f(r) \end{vmatrix} =$$
$$= \left[f'(r)\frac{y}{r}(c_1y - c_2x) + c_1f(r) - f'(r)\frac{z}{r}(c_3x - c_1z) + c_1f(r)\right]\vec{i} - \left[f'(r)\frac{x}{r}(c_1y - c_2x) - \right.$$
$$\left. - c_2f(r) - f'(r)\frac{z}{r}(c_2z - c_3y) - c_2f(r)\right]\vec{j} + \left[f'(r)\frac{x}{r}(c_3x - c_1z) + c_3f(r) - f'(r)\frac{y}{r}(c_2z - \right.$$
$$\left. -c_3y) + c_3f(r)\right]\vec{k} = \left[\frac{f'(r)}{r}(c_1y^2 - c_2xy - c_3xz + c_1z^2) + 2c_1f(r)\right]\vec{i} - \left[\frac{f'(r)}{r}(c_1xy - \right.$$
$$\left. -c_2x^2 - c_2z^2 + c_3yz) - 2c_2f(r)\right]\vec{j} + \left[\frac{f'(r)}{r}(c_3x^2 - c_1xz - c_2yz + c_3y^2) + 2c_3f(r)\right]\vec{k} =$$
$$= \left\{\frac{f'(r)}{r}[c_1(y^2 + z^2 + x^2) - x(c_1x + c_2y + c_3z)] + 2c_1f(r)\right\}\vec{i} + \left\{\frac{f'(r)}{r}[c_2(x^2 + y^2 + z^2) - \right.$$
$$\left. -y(c_1x + c_2y + c_3z)] + 2c_2f(r)\right\}\vec{j} + \left\{\frac{f'(r)}{r}[c_3(x^2 + y^2 + z^2) - z(c_1x + c_2y + c_3z)] + \right.$$
$$\left. +2c_3f(r)\right\}\vec{k} = \frac{f'(r)}{r}r^2\vec{c} - \frac{f'(r)}{r}(\vec{c}\cdot\vec{r})\vec{r} + 2f(r)\vec{c} = \frac{f'(r)}{r}[r^2\vec{c} - (\vec{c}\cdot\vec{r})\vec{r}] + 2f(r)\vec{c}.$$

c) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = \operatorname{rot}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial U}{\partial x} & \dfrac{\partial U}{\partial y} & \dfrac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix} =$

$$= \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z\partial y}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}\right)\vec{k} = \vec{0}.$$

d) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{div}\left[\left(\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\dfrac{\partial R}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}\right] =$

$$= \frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z\partial y} = 0.$$

**9.** Să se demonstreze că:

a) $\operatorname{div}(\vec{F}\times\vec{G}) = \vec{G}\cdot\operatorname{rot}\vec{F} - \vec{F}\cdot\operatorname{rot}\vec{G}$; b) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{F}) - \Delta\vec{F}$, unde $\vec{F}$, $\vec{G}$ sunt câmpuri vectoriale, $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, $\vec{G} = L\vec{i} + M\vec{j} + N\vec{k}$.

**Rezolvare.** a) Avem:

$$\vec{F}\times\vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P & Q & R \\ L & M & N \end{vmatrix} = (QN - RM)\vec{i} - (PN - LR)\vec{j} + (PM - LQ)\vec{k}, \quad \text{iar:}$$

$$\operatorname{div}(\vec{F}\times\vec{G}) = \frac{\partial}{\partial x}(QN - RM) + \frac{\partial}{\partial y}(-PN + LR) + \frac{\partial}{\partial z}(PM - LQ) = \frac{\partial Q}{\partial x}N +$$
$$+Q\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial x}M - R\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}N - P\frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial y}R + L\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}M + P\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial L}{\partial z}Q - L\frac{\partial Q}{\partial z} =$$
$$= L\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + M\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + N\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) + P\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}\right) +$$
$$+R\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right) = \vec{G}\cdot\operatorname{rot}\vec{F} - \vec{F}\cdot\operatorname{rot}\vec{G},$$

unde $\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$ şi

$$\operatorname{rot}\vec{G} = \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

b) Avem:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{rot}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}\right] =$$
$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} & \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z\partial x}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} -\right.$$
$$\left. - \frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial z\partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial z}\right)\vec{k} = \left[\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial x} +\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial^2 R}{\partial z\partial x}\right) - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right)\right]\vec{i} - \left[\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y} +\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial^2 R}{\partial z\partial y}\right)\right]\vec{j} + \left[\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\right]\vec{k} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} +\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial R}{\partial z}\right) - \Delta P\right]\vec{i} + \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) - \Delta Q\right]\vec{j} + \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) -\right.$$
$$\left. -\Delta R\right]\vec{k} = \operatorname{grad}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) - \Delta\vec{F} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{F}) - \Delta\vec{F}.$$

**10.** Să se calculeze fluxul vectorului:

a) $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ prin suprafaţa $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 1$;

b) $\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ prin suprafaţa totală a piramidei limitată de planele $x = 0$,

$y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$, $(a > 0)$;

c) $\vec{F} = (z - x)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + 2z\vec{k}$ spre exteriorul tetraedrului $OABC$ cu $O(0, 0, 0, )$, $A(1, 1, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

**Rezolvare.** a) Suprafaţa $\Sigma: \ z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 1$ este un con cu vârful în $A(0, 0, 1)$, (vezi Figura 6.2.1), care se proiectează pe planul $Oxy$ în discul $(D): \ x^2 + y^2 \le 1$. Vectorul normal la suprafaţa $\Sigma$ este $\vec{N}(-p, -q, 1)$, unde $p = \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Deci $\vec{N}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1\right)$, iar $\|\vec{N}\| = \sqrt{2}$. Rezultă versorul $\vec{n}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Obţinem astfel fluxul vectorului $\vec{r}$:

$$I = \iint_\Sigma \vec{r} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_\Sigma \left(\frac{x^2}{\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{z}{\sqrt{2}}\right) dS = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} +$$
$$+1 - \sqrt{x^2 + y^2}) \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}\, dx\, dy = \iint_D dx\, dy = A(D) = \pi.$$

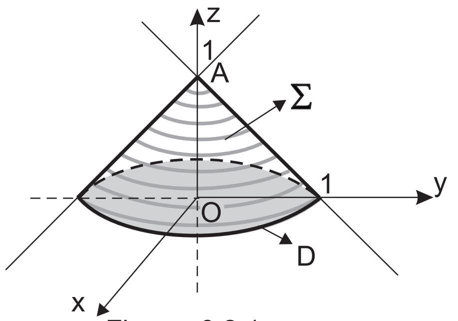

Figura 6.2.1

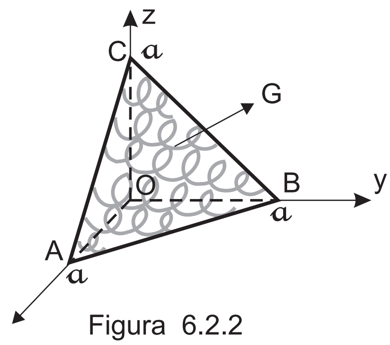

Figura 6.2.2

b) Descompunem suprafaţa $\Sigma$ a piramidei în $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$ (vezi Figura 6.2.2), unde:

$$(\Sigma_1) = (OAB): \begin{cases} z = 0; \ x, y \ge 0 \\ x + y \le a, \ (\vec{n}_1 = -\vec{k}), \end{cases} \quad (\Sigma_2) = (OBC): \begin{cases} x = 0; \ y, z \ge 0 \\ y + z \le a, \ (\vec{n}_2 = -\vec{i}), \end{cases}$$
$$(\Sigma_3) = (OAC): \begin{cases} y = 0; \ x, z \ge 0 \\ x + z \le a, \ (\vec{n}_3 = -\vec{j}), \end{cases} \quad (\Sigma_4) = (ABC): \begin{cases} x + y + z = a \\ x, y, z \ge 0, \ \left(\vec{n}_4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right). \end{cases}$$

Obţinem astfel:

$$I_1 = \iint_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1\, dS = \iint_{\Sigma_1} (-x)\, dS = -\iint_{D_1} x\, dx\, dy = -\int_0^a dx \int_0^{a-x} x\, dy =$$
$$= -\int_0^a x(a - x)\, dx = -\frac{a^3}{6}, \quad \left(D_1 = \text{pr}_{(xOy)}\Sigma_1 : \begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le a - x \end{cases}\right),$$

$$I_2 = \iint_{\Sigma_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2\, dS = \iint_{\Sigma_2} (-y)\, dS = -\iint_{D_2} y\, dy\, dz = -\int_0^a dy \int_0^{a-y} y\, dz =$$
$$= -\int_0^a y(a - y)\, dy = -\frac{a^3}{6}, \quad \left(D_2 = \text{pr}_{(yOz)}\Sigma_2 : \begin{cases} 0 \le y \le a \\ 0 \le z \le a - y \end{cases}\right),$$

$$I_3 = \iint_{\Sigma_3} \vec{F}\cdot\vec{n}_3\, dS = \iint_{\Sigma_3} (-z)\, dS = -\iint_{D_3} z\, dx\, dz = -\int_0^a dx \int_0^{a-x} z\, dz =$$

$$= -\int_0^a \frac{(a-x)^2}{2}\, dx = -\frac{a^3}{6}, \quad \left( D_3 = \text{pr}_{(xOz)}\Sigma_3 : \begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le z \le a-x \end{cases} \right)$$

şi $I_4 = \iint_{\Sigma_4} \vec{F}\cdot\vec{n}_4\, dS = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma_4} (y+z+x)\, dS = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \iint_{D_1} \sqrt{3}\, dx\, dy = a \cdot A(D_1) =$

$= \dfrac{a^3}{2}, \quad \big( D_1 = \text{pr}_{(xOy)}\Sigma_4 \big).$

Rezultă în final: $\quad I = \iint_{\Sigma} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = 0.$

Deoarece suprafaţa $\Sigma$ este închisă putem aplica aici formula lui Ostrogradski. Astfel obţinem rapid că:

$$I = \iiint_G \text{div}\,\vec{F}\, dx\, dy\, dz = 0,$$

unde $G$ este domeniul mărginit de $\Sigma$ ($\vec{F}$ este un câmp solenoidal).

c) Suprafaţa $\Sigma$ fiind închisă (vezi Figura 6.2.3), conform formulei lui Ostrogradski obţinem că:

$$I = \iint_{\Sigma} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \iiint_G \text{div}\,\vec{F}\, dx\, dy\, dz = \iiint_G 0\, dx\, dy\, dz = 0,$$

unde $G$ este domeniul mărginit de $\Sigma$.

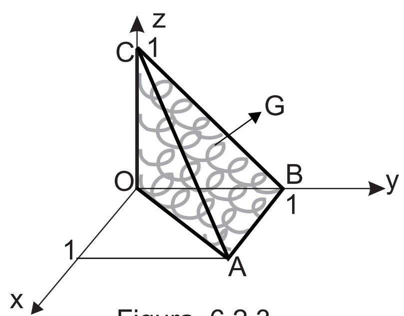

Figura 6.2.3

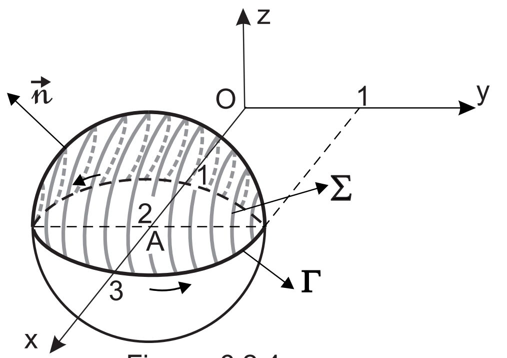

Figura 6.2.4

**11.** Să se calculeze circulaţia vectorului $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} + c\vec{k}$ ($c$ este o constantă) de-a lungul cercului $(x-2)^2 + y^2 = 1,\ z = 0$, parcurs în sens direct trigonometric dacă privim dinspre semiaxa pozitivă $Oz$.

**Rezolvare.** Avem $\quad I = \int_{\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} (-y\, dx + x\, dy + c\, dz),$
unde $(\Gamma):\ x = 2 + \cos t,\ \ y = \sin t,\ \ z = 0,\ \ t \in [0, 2\pi]$.

Obţinem:
$I = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + (2+\cos t)\cos t + c \cdot 0)\, dt = \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos t)\, dt = 2\pi.$

Putem aplica şi formula lui Stokes, adică avem $\quad I = \iint_{\Sigma} \vec{n}\cdot \text{rot}\,\vec{F}\, dS,$
unde $(\Sigma):\ (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 1,\ \ z > 0,$ (vezi Figura 6.2.4), $\quad$ iar $\ \text{rot}\,\vec{F} = 2\vec{k}.$

Ecuaţiile parametrice ale suprafeţei $\Sigma$ sunt:

$$x = 2 + \cos u \sin v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos v, \quad (u, v) \in \Delta,$$

unde $(\Delta): \; 0 \leq u \leq 2\pi, \;\; 0 \leq v \leq \pi/2$.

Vectorul normalei $\vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ este $\vec{n}(\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)$, cu $C = \sin v \cos v$. Obţinem astfel:

$$I = \iint_\Sigma 2\cos\gamma \, dS = 2 \iint_\Delta \sin v \cos v \, du \, dv = 2\pi.$$

**12.** Să se arate că:

$$\vec{F} = yz(2x + y + z)\,\vec{i} + xz(x + 2y + z)\,\vec{j} + xy(x + y + 2z)\,\vec{k}$$

este un câmp potenţial şi să se determine potenţialul acestui câmp.

**Rezolvare.** Funcţiile $P = yz(2x + y + z), \;\; Q = xz(x + 2y + z), \;\; R = xy(x + y + 2z)$ sunt definite, continue pe $D = I\!R^3$ şi au derivate parţiale de ordinul întâi continue. Avem:
$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2xz + 2yz + z^2, \;\; \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y} = x^2 + 2xy + 2xz, \;\; \dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z} = 2xy + y^2 + 2yz,$
deci $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$, adică $\vec{F}$ este un câmp potenţial. Deci există câmpul $U$ astfel încât:

$$\vec{F} = \mathrm{grad}\, U \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial U}{\partial x} = yz(2x + y + z), \;\; \frac{\partial U}{\partial y} = xz(x + 2y + z), \;\; \frac{\partial U}{\partial z} = xy(x + y + 2z).$$

Din relaţiile de mai sus deducem că:

$$U(x, y, z) = x^2yz + xy^2z + xyz^2 + C = xyz(x + y + z) + C.$$

## PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

**13.** Să se demonstreze formulele:

a) $\mathrm{grad}\,(U+c) = \mathrm{grad}\, U$; b) $\mathrm{grad}\,(c\,U) = c\,\mathrm{grad}\, U$; c) $\mathrm{grad}\,(U+V) = \mathrm{grad}\, U + \mathrm{grad}\, V$, unde $c$ este o constantă, $U$, $V$ câmpuri scalare.

**14.** Fie câmpul scalar $U = \ln\dfrac{1}{r}$, unde $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$. În ce puncte ale spaţiului $Oxyz$ are loc egalitatea $\|\mathrm{grad}\, U\| = 1$ ?

**15.** Să se demonstreze că:

a) $\mathrm{div}\,(\vec{F} + \vec{G}) = \mathrm{div}\,\vec{F} + \mathrm{div}\,\vec{G}$, unde $\vec{F}$ şi $\vec{G}$ sunt câmpuri vectoriale;

b) $\mathrm{div}\,(U\vec{F}) = \vec{F} \cdot \mathrm{grad}\, U$, unde $\vec{F}$ este un câmp vectorial constant, iar $U$ este un câmp scalar.

**16.** Să se calculeze:

a) $\mathrm{div}\,[f(r)\,\vec{r}], \;\; \vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}, \;\; r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \;\; f$ o funcţie de clasă $C^1$;

b) $\mathrm{div}\,(U\,\mathrm{grad}\, V)$, unde $U$, $V$ sunt câpuri scalare.

**17.** Să se demonstreze că:

a) $\operatorname{rot}(\vec{F}+\vec{G}) = \operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{rot}\vec{G}$; b) $\operatorname{rot}(U\vec{F}) = U\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad} U \times \vec{F}$,
unde $\vec{F}$, $\vec{G}$ sunt câmpuri vectoriale, iar $U$ câmp scalar.

**18.** Să se calculeze:

a) $\operatorname{rot}[f(r)\,\vec{r}]$, $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $f$ o funcţie de clasă $C^1$;

b) $\operatorname{rot}[\vec{c}\,f(r)]$, $\vec{c}$ un vector constant, $f$ o funcţie de clasă $C^1$.

**19.** Să se calculeze fluxul vectorului:

a) $\vec{F} = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$ prin octantul pozitiv al sferei $x^2+y^2+z^2 = 1$, $(x>0$, $y>0$, $z>0)$;

b) $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ spre exteriorul cubului $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$, $z=1$.

**20.** Să se calculeze circulaţia vectorului $\vec{F} = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j} + c\,\vec{k}$ ($c$ este o constantă) de-a lungul cercului $x^2+y^2=1$, $z=0$, parcurs în sens direct trigonometric, dacă privim dinspre semiaxa pozitivă $Oz$.

# INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

## Capitolul 1

**§1. 19.** $f$ este continuă pe $I\!R$.

**20.** a) O eventuală primitivă, dacă ar exista, ar avea forma:

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+c, & \text{dacă } x\le 0,\\ x\sin\dfrac{1}{x}+c, & \text{dacă } x>0.\end{cases}$$

Dar $F$ nu este derivabilă în $x=0$.

b) Se tratează asemănător Problemei 2, b). Aici se consideră funcţiile:

$$g:I\!R\to I\!R,\ \ g(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x\ne 0,\\ 0, & \text{dacă } x=0\end{cases}\quad \text{şi}\ \ H(x)=-x^2\sin\frac{1}{x}+2G(x),\ \ x\ne 0,$$

unde $G$ este o primitivă a funcţiei $g$.

c) Ca şi în Problema 4 o eventuală primitivă a funcţiei $f$ ar avea forma:

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}x^2\sin\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2}G(x), & \text{dacă } x\ne 0,\\ \dfrac{1}{2}G(0), & \text{dacă } x=0,\end{cases}$$

unde $G$ este o primitivă a funcţiei $g(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{2}{x}, & \text{dacă } x\ne 0,\\ 0, & \text{dacă } x=0.\end{cases}$

Dar $F'(0)\ne f(0)$.

**21.** a) $I_n=\dfrac{x^{n-1}(ax^2+b)^{3/2}}{a(n+2)}-\dfrac{(n-1)b}{(n+2)a}I_{n-2};$

b) $I_n=-\dfrac{x^n\cos ax}{a}+\dfrac{n}{a^2}x^{n-1}\sin ax-\dfrac{n(n-1)}{a^2}I_{n-2};$

c) $I_n=\dfrac{x^n\sin ax}{a}+\dfrac{n}{a^2}x^{n-1}\cos ax-\dfrac{n(n-1)}{a^2}I_{n-2};$

d) $I_n=\dfrac{a}{a^2+n^2b^2}\,e^{ax}\sin^n bx-\dfrac{nb}{a^2+n^2b^2}e^{ax}\sin^{n-1}bx\cos bx+\dfrac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2}I_{n-2};$

e) $I_n=\dfrac{a}{a^2+n^2b^2}e^{ax}\cos^n bx+\dfrac{nb}{a^2+n^2b^2}e^{ax}\cos^{n-1}bx\,\sin bx+\dfrac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2}I_{n-2};$

f) $I_n=-\dfrac{4a}{b^2-4ac}\,\dfrac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}-\dfrac{1}{(n-1)(b^2-4ac)}\,\dfrac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}};$

g) $I_n=\dfrac{n-2}{n-1}I_{n-2}-\dfrac{1}{n-1}\,\dfrac{\cos x}{\sin^{n-1}x};$

h) $J_{m,n} = \dfrac{m-1}{m-n} J_{m-2,n} - \dfrac{1}{m-n} \dfrac{\sin^{m-1} x}{\cos^{n-1} x}, \quad m \neq n.$

Dacă $m = n$ atunci $J_n := J_{m,n} = \displaystyle\int \operatorname{tg}^n x \, dx = \dfrac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - J_{n-2}, \quad n \neq 1.$

Dacă $m = n = 1$, $J_1 = \displaystyle\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + \mathcal{C}.$

O altă formulă este:

$$J_{m,n} = \frac{n-m-2}{n-1} J_{m,n-2} + \frac{1}{n-1} \frac{\sin^{m+1} x}{\cos^{n-1} x}, \quad n \neq 1.$$

i) $K_{m,n} = \dfrac{m+n-2}{m-1} K_{m-2,n} - \dfrac{1}{m-1} \dfrac{1}{\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x}, \quad m \neq 1$

sau $K_{m,n} = \dfrac{m+n-2}{n-1} K_{m,n-2} + \dfrac{1}{n-1} \dfrac{1}{\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x}, \quad n \neq 1.$

**22.** a) $-\sqrt{1-x^2} \operatorname{arctg} x + \sqrt{2} \operatorname{arctg} \dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x + \mathcal{C};$

b) $\dfrac{1}{2}(x - \sqrt{1-x^2}) e^{arcsin\, x} + \mathcal{C};$ c) $\dfrac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}} e^{arctg\, x} + \mathcal{C};$ d) $\dfrac{x+1}{2\sqrt{1+x^2}} e^{arctg\, x} + \mathcal{C};$

e) $x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + \mathcal{C};$ f) $\dfrac{1}{2} x^2 e^x (\sin x - \cos x) + x e^x \cos x - \dfrac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + \mathcal{C}.$

**23.** a) $\dfrac{1}{4\sqrt{2}} \ln \dfrac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \dfrac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} - 1) + \dfrac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} + 1) + \mathcal{C};$

b) $2 \ln \left| \dfrac{x-1}{x+1} \right| + \dfrac{1}{2(x+1)^2} + \mathcal{C};$ c) $\ln|x| - \dfrac{1}{2} \ln(x^2+1) + \dfrac{1}{2(x^2+1)} + \mathcal{C};$

d) $-3 \ln|x| + 2 \ln|x^2 - 1| + \mathcal{C};$ e) $\dfrac{3}{8} \ln \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2} + \dfrac{3(x-1)}{4(x^2+1)} + \mathcal{C};$

f) $2 \ln \left| \dfrac{x^2-1}{x^2} \right| + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{4x^4} + \mathcal{C};$ g) $x - \dfrac{3}{2} \operatorname{arctg}(x+1) + \dfrac{x+1}{2(x^2+2x+2)} + \mathcal{C};$

h) $\dfrac{1}{4} \ln \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \dfrac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg} \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg} \dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} + \mathcal{C};$

i) $\ln \dfrac{x^2-x+1}{(x-1)^2} + \dfrac{3(2x-3)}{2(x-1)^2} + \dfrac{2x-4}{3(x^2-x+1)} + \dfrac{28}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} + \mathcal{C};$

j) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + \mathcal{C}.$

**24.** a) $\dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{24} \sin 6x + \dfrac{1}{8} \sin 2x - \dfrac{1}{64} \sin 8x - \dfrac{1}{32} \sin 4x + \mathcal{C};$

b) $\dfrac{5x}{16} - \dfrac{1}{4} \sin 2x + \dfrac{3}{64} \sin 4x + \dfrac{1}{48} \sin^3 2x + \mathcal{C};$

c) $\dfrac{1}{2} \dfrac{x}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{2} \operatorname{tg} x + \mathcal{C};$ d) $\dfrac{1}{2} \ln(\sin x + \cos x) + \dfrac{x}{2} + \mathcal{C};$ e) $-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x + 1} + \mathcal{C};$

f) Dacă $a = b$, $I = \dfrac{1}{a} \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} + \mathcal{C};$ dacă $a \neq b$ şi $\dfrac{a+b}{a-b} > 0$, $I = \dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} +$
$+\mathcal{C};$ dacă $a \neq b$ şi $\dfrac{a+b}{a-b} < 0$, $I = \dfrac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \left| \dfrac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}} \right| + \mathcal{C};$

g) $x\operatorname{tg}x-\dfrac{x^2}{2}+\ln(\cos x)+\mathcal{C}$; h) $\dfrac{1}{3}\ln(\cos x+2)-\dfrac{1}{2}\ln(\cos x+1)+\dfrac{1}{6}\ln(1-\cos x)+\mathcal{C}$; i) $\dfrac{1}{4}\ln(\sin x+\cos x)-\dfrac{1}{4}(\sin x+\cos x)\cos x+\mathcal{C}$; j) $\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{1-\sin x\cos x}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{3}}+$ $+\mathcal{C}$; k) $\ln\ \operatorname{tg}x+\dfrac{1}{2}(1+\operatorname{tg}^2x)+\mathcal{C}$; l) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{2}}+\mathcal{C}$.

**25.** a) $\dfrac{-2x^2-1}{x\sqrt{x^2+1}}+\mathcal{C}$; b) $\dfrac{12}{13}(1+\sqrt[4]{x})^{13/3}-\dfrac{18}{5}(1+\sqrt[4]{x})^{10/3}+\dfrac{36}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{7/3}-$ $-3(1+\sqrt[4]{x})^{4/3}+\mathcal{C}$; c) $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+\mathcal{C}$;
d) $2x^{1/2}-3x^{1/3}+6x^{1/6}-6\ln(x^{1/6}+1)+\mathcal{C}$;
e) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{4x^4}+\dfrac{3\sqrt{x^2-1}}{8x^2}+\dfrac{3}{8}\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}+\mathcal{C}$; f) $\dfrac{3}{5}(1+x^{2/3})^{5/2}-2(1+x^{2/3})^{3/2}+3(1+$ $+x^{2/3})^{1/2}+\mathcal{C}$; g) $\dfrac{1}{4}x^3\sqrt{x^2+4}+\dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+4}+\ln\dfrac{\sqrt{x^2+4}-x}{\sqrt{x^2+4}+x}+\mathcal{C}$;
h) $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{[(x^2+1)^{1/3}-1]^3}{x^2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2(x^2+1)^{1/3}+1}{\sqrt{3}}+\mathcal{C}$.

**26.** a) $\ln(\sqrt{x^2+2x+2}+x+1)-\dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}+x}{x+1}+\mathcal{C}$; b) $-\sqrt{-x^2+4x+5}+$ $+6\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1+x}{5-x}}+\mathcal{C}$; c) $-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}}+\mathcal{C}$; d) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}+\mathcal{C}$;
e) $-\dfrac{1}{8}(\sqrt{x^2-x+1}-x)^2+\dfrac{3}{8}(\sqrt{x^2-x+1}-x)+\dfrac{1}{8}\ln(2\sqrt{x^2-x+1}-2x+1)+$ $+\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-x+1}-2x+1}+\dfrac{9}{32}\dfrac{1}{(2\sqrt{x^2-x+1}-2x+1)^2}+\mathcal{C}$;
f) $-\dfrac{1}{8}\dfrac{x^{3/2}(2+x)^{1/2}}{(x+1)^2}+\dfrac{3}{8}\dfrac{x^{1/2}(2+x)^{3/2}}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{4}\dfrac{x^{1/2}(2+x)^{1/2}}{x+1}+\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{2+x}}+\mathcal{C}=$ $=\dfrac{1}{2}\dfrac{x^{1/2}(2+x)^{1/2}}{(x+1)^2}+\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{2+x}}+\mathcal{C}$; g) $x(a^2-x^2)^{1/2}+\mathcal{C}$;
h) $2\ln(-x+\sqrt{x^2+2x+4})-\dfrac{3}{2}\ln(\sqrt{x^2+2x+4}-x-1)+\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{x+1-\sqrt{x^2+2x+4}}+\mathcal{C}$.

**27.** a) $\ln(\operatorname{tg}^2x+2)+\dfrac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}+\mathcal{C}$; b) $\dfrac{\operatorname{tg}^3x}{3}+2\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}+\mathcal{C}$;
c) $\dfrac{5}{2\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2}-1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}+1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+\dfrac{1}{2}(\cos x-\sin x)+\mathcal{C}$; d) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}+\mathcal{C}$;
e) $\dfrac{1}{3}\ln\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-\ln\left(1-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{5}{3}\ln\left(3-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)+\mathcal{C}$;
f) $\dfrac{1}{40}\sin 10x+\dfrac{1}{32}\sin 8x+\dfrac{1}{16}\sin 4x+\dfrac{1}{8}\sin 2x+\mathcal{C}$.

**28.** $I=\dfrac{e^{ax}}{4}\Bigg[\dfrac{a}{a^2+(m-n+p)^2}\cos(m-n+p)x+\dfrac{m-n+p}{a^2+(m-n+p)^2}\times$ $\times\sin(m-n+p)x+\dfrac{a}{a^2+(m-n-p)^2}\cos(m-n-p)x+\dfrac{m-n-p}{a^2+(m-n-p)^2}\sin(m-n-p)x-$

$$-\frac{a}{a^2+(m+n+p)^2}\cos(m+n+p)x-\frac{m+n+p}{a^2+(m+n+p)^2}\sin(m+n+p)x-\frac{a}{a^2+(m+n-p)^2}\times$$
$$\left.\times\cos(m+n-p)x-\frac{m+n-p}{a^2+(m+n-p)^2}\sin(m+n-p)x\right].$$

**29.** a) $-\frac{1}{2}e^{-x}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})+\frac{1}{4}\ln\frac{(\sqrt{e^x+1}-1)(1-\sqrt{1-e^x})}{(\sqrt{e^x+1}+1)(1+\sqrt{1-e^x})}+\mathcal{C}$;
b) $x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x+\mathcal{C}$;
c) $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x\ln(1+x^2)-\frac{x}{2}\ln(1+x^2)+\frac{3x}{2}-\frac{x^2+3}{2}\operatorname{arctg}x+\mathcal{C}$;
d) $(x-1)\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}+2\sqrt{x}+\mathcal{C}$; e) $\frac{3x}{8}+\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x+\frac{1}{32}\operatorname{sh}4x+\mathcal{C}$;
f) $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}e^x\sqrt{3}+\mathcal{C}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{3}\left(\frac{1+\operatorname{th}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{th}\frac{x}{2}}\right)+\mathcal{C}$;
g) $\frac{a}{a^2+b^2}\operatorname{ch}ax\,\cos bx+\frac{b}{a^2+b^2}\operatorname{sh}ax\,\sin bx+\mathcal{C}$.

**30.** Se notează $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Rezultă $I=-\frac{1}{4}\int\frac{(t^2+1)^2}{(t^2-t-1)^3}\,dt$. Descompunem fracţia de sub semnul integrală în fracţii simple:

$$\frac{(t^2+1)^2}{(t^2-t-1)^3}=\frac{2}{5\sqrt{5}}\frac{1}{t-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+\frac{3+\sqrt{5}}{10}\frac{1}{\left(t-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}+\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\frac{1}{\left(t-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3}-$$
$$-\frac{2}{5\sqrt{5}}\frac{1}{t-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}+\frac{3-\sqrt{5}}{10}\frac{1}{\left(t-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}+\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\frac{1}{\left(t-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3}.$$

Obţinem:

$$I=\frac{1}{10\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{t-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right|+\frac{3t+1}{20(t^2-t-1)}+\frac{t^2+2}{8(t^2-t-1)^2}+\mathcal{C}.\quad \text{Deci } I=$$
$$=\frac{1}{10\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right|+\frac{8\sin x-4\cos x-\sin^2x-4\cos^2x-4\sin x\cos x}{40(\sin x+2\cos x)^2}+\mathcal{C}=$$
$$=\frac{1}{10\sqrt{5}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{arctg}2}{2}\right)\right|+\frac{2\sin x-\cos x}{10(\sin x+2\cos x)^2}+\mathcal{C}.$$

**§2. 33.** Funcţia $f$ este discontinuă în orice punct $x\in(0,1]$. Conform Teoremei 5 nu este integrabilă pe $[0,1]$.

**34.** a) $\frac{\pi}{16}$; b) $\frac{4-\pi}{2}$; c) $\ln(\sqrt{2}+1)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln 3$; d) $6-2e$; e) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$; f) $\frac{\sqrt{3}}{24}$;
g) $\frac{\pi}{4}$; h) $\frac{3\pi}{16}$; i) $\frac{\pi}{4}\sin(a-b)+\frac{1}{2}\cos(a+b)$.

**35.** a) Dacă $a=0$, $I=\frac{\pi}{8}$; dacă $a\in(0,4)$, $I=\frac{2}{\sqrt{16-a^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{4-a}{4+a}}$; dacă $a=4$, $I=\frac{1}{4}$; dacă $a\in(4,\infty)$, $I=\frac{1}{\sqrt{a^2-16}}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-16}}{4}$; b) 4; c) $2e\ln 2-2$; d) $\frac{1}{2}\ln 2+$

$+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\ln\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}+1}+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\ln\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}-1}$; e) $\dfrac{141}{20}a^{10/3}$; f) $\dfrac{\pi}{6}$; g) $\dfrac{\pi\sqrt{6}}{2\sqrt{7}}$; h) Dacă $a\in(-\infty,e]$, $I=\dfrac{1}{3-a}\ln\dfrac{e(e+3-a)}{e^2+3-a}$; dacă $a\in[e^2,\infty)$, $I=\dfrac{1}{a+3}\ln\dfrac{e(a+3-e)}{a+3-e^2}$; dacă $a\in(e,e^2)$, $I=\dfrac{1}{a+3}\ln\dfrac{a(a+3-e)}{3e}+\dfrac{1}{3-a}\ln\dfrac{3e^2}{a(e^2-a+3)}$; i) Dacă $a\in(-\infty,1]$, $I=\ln\dfrac{4-a}{2-a}$; dacă $a\in[3,\infty)$, $I=\ln\dfrac{a}{a-2}$; dacă $a\in(1,3)$, $I=\ln a(4-a)$;

j) Dacă $\alpha\in[0,\pi/6)$, $I=\dfrac{2}{\sqrt{1-4\sin^2\alpha}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{1-4\sin^2\alpha}}{25+20\sin\alpha}$; dacă $\alpha\in(\pi/6,\pi/2]$, $I=\dfrac{1}{\sqrt{4\sin^2\alpha-1}}\ln\dfrac{25+20\sin\alpha+2\sqrt{4\sin^2\alpha-1}}{25+20\sin\alpha-2\sqrt{4\sin^2\alpha-1}}$; dacă $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$, $I=\dfrac{4}{35}$.

**36.** a) $S_{\Delta_1}(f)=f(1)\left(\dfrac{9}{8}-1\right)+f\left(\dfrac{9}{8}\right)\left(\dfrac{7}{6}-\dfrac{9}{8}\right)+f\left(\dfrac{7}{6}\right)\left(\dfrac{5}{4}-\dfrac{7}{6}\right)+f\left(\dfrac{5}{4}\right)\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{4}\right)+f\left(\dfrac{3}{2}\right)\left(2-\dfrac{3}{2}\right)=0,4771.$

$s_{\Delta_1}(f)=f\left(\dfrac{9}{8}\right)\left(\dfrac{9}{8}-1\right)+f\left(\dfrac{7}{6}\right)\left(\dfrac{7}{6}-\dfrac{9}{8}\right)+f\left(\dfrac{5}{4}\right)\left(\dfrac{5}{4}-\dfrac{7}{6}\right)+f\left(\dfrac{3}{2}\right)\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{4}\right)+f(2)\left(2-\dfrac{3}{2}\right)=0,4387.$

$S_{\Delta_2}(f)=f(1)\left(\dfrac{7}{6}-1\right)+f\left(\dfrac{7}{6}\right)\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{7}{6}\right)+f\left(\dfrac{3}{2}\right)\left(2-\dfrac{3}{2}\right)=0,4788.$

$s_{\Delta_2}(f)=f\left(\dfrac{7}{6}\right)\left(\dfrac{7}{6}-1\right)+f\left(\dfrac{3}{2}\right)\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{7}{6}\right)+f(2)\left(2-\dfrac{3}{2}\right)=0,4362.$

b) $S_{\Delta_1}(f)=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{1}{2}+1\right)+f(0)\left(0+\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}-0\right)+f(1)\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=$ $=5,7376.$ $s_{\Delta_1}(f)=\dfrac{1}{2}\left[f(-1)+f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f(0)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]=2,1107.$

$S_{\Delta_2}(f)=f(0)(0+1)+f(1)(1-0)=8,3890.$ $s_{\Delta_2}(f)=f(-1)+f(0)=1,1353.$

Sumele de mai sus sunt valori aproximative ale $\displaystyle\int_1^2\frac{x}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_1^2=$ $=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{2}\simeq 0,4581$, respectiv $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_{-1}^1=\frac{1}{2}(e^2-e^{-2})\simeq 3,6269.$

**37.** a) $\dfrac{1}{2}(e-1)$; b) $\dfrac{1}{2}$; c) $\dfrac{1}{5}$; d) $\dfrac{1}{2}[\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}]$; e) $\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}-1$; f) $\dfrac{1}{4}(2\sqrt[3]{2}-1)$; g) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

**38.** a) $\dfrac{t}{2}$; b) $\dfrac{30}{\pi}$; c) $-\dfrac{\pi^2}{4}$; d) $\displaystyle I=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{e^{-2k\pi}}^{e^{-2k\pi+\pi}}dx-\sum_{k=1}^{\infty}\int_{e^{-2k\pi+\pi}}^{e^{-2k\pi+2\pi}}dx=(-1-e^{2\pi}+$ $\displaystyle+2e^{\pi})\sum_{k=1}^{\infty}e^{-2k\pi}=-\frac{(e^{\pi}-1)^2}{e^{2\pi}-1}=-\frac{e^{\pi}-1}{e^{\pi}+1}=-\operatorname{th}\frac{\pi}{2}.$

**39.** a) Funcţia $f(x)=x\operatorname{arctg}x-\ln(1+x^2)$ este strict crescătoare pe $(0,\infty)$, deoarece $f'(x)>0$, $\forall x\in(0,\infty)$ şi $f(0)=0$; b) $\sin x\in[0,1]$; $e^{-\sin x}\in[e^{-1},1]$, $e^{-\sin x}\leq 1$, deci $\displaystyle\int_0^{\pi/2}e^{-\sin x}\,dx\leq\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2}$; c) Funcţia $f(x)=\dfrac{x-3}{x+5}$ este crescătoare pe $[4,7]$, deci

$f(4) \le f(x) \le f(7), \forall x \in [4,7]$, deci $\dfrac{1}{3} = 3f(4) \le \displaystyle\int_4^7 f(x)\,dx \le 3f(7) = 1$;

d) Funcţia $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$ este crescătoare pe $[4,6]$, deci $f(4) \le f(x) \le f(6), \forall x \in [4,6]$ şi $\dfrac{16}{3} = 2f(4) \le \displaystyle\int_4^6 f(x)\,dx \le 2f(6) = 9$.

**40.** $s_n = \displaystyle\int_{1/10^{n+1}}^{1/10^n} n\,dx + \int_{1/10^n}^{1/10^{n-1}} (n-1)\,dx + \cdots + \int_{1/10^2}^{1/10} 1\,dx = n\left(\frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^{n+1}}\right) + (n-1)\left(\frac{1}{10^{n-1}} - \frac{1}{10^n}\right) + \cdots + 2\left(\frac{1}{10^2} - \frac{1}{10^3}\right) + 1\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{10^2}\right) = -\frac{n}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10} = -\frac{n}{10^{n+1}} + \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$. Rezultă că $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{9}$.

**41.** $I = \displaystyle\int_{1/2}^1 x\,dx + 2\int_{1/3}^{1/2} x\,dx + 3\int_{1/4}^{1/3} x\,dx + \cdots + (n-1)\int_{1/n}^{1/(n-1)} x\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{2\cdot 3^2} + \frac{1}{2\cdot 4^2} + \cdots + \frac{1}{2\cdot(n-1)^2} - \frac{n-1}{2n^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2n}$.

**42.** $I_{m,n} = \dfrac{1}{m+1} x^{m+1}(1-x)^n\Big|_0^1 + \dfrac{n}{m+1}\displaystyle\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\,dx =$
$= \dfrac{n}{(m+1)(m+2)}\, x^{m+2}(1-x)^{n-1}\Big|_0^1 + \dfrac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)}\displaystyle\int_0^1 x^{m+2}(1-x)^{n-2}\,dx = \cdots =$
$= \dfrac{n(n-1)\cdots 1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}\displaystyle\int_0^1 x^{m+n}\,dx = \frac{n!}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)(m+n+1)} =$
$= \dfrac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$.

**43.** $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4}\left(\mathrm{tg}^{2n}x + \mathrm{tg}^{2n-2}x\right)\,dx - \int_0^{\pi/4}\mathrm{tg}^{2n-2}x\,dx = \int_0^{\pi/4}\mathrm{tg}^{2n-2}x(1+\mathrm{tg}^2x)\,dx - \int_0^{\pi/4}\mathrm{tg}^{2n-2}x\,dx = \int_0^{\pi/4}\mathrm{tg}^{2n-2}x\cdot(\mathrm{tg}\,x)'\,dx - I_{n-1} = \frac{1}{2n-1}\,\mathrm{tg}^{2n-1}x\Big|_0^{\pi/4} - I_{n-1} =$
$= \dfrac{1}{2n-1} - I_{n-1}$. Rezultă:

$$I_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{1}{3} + (-1)^{n-1}1 + (-1)^n I_0,\ I_0 = \frac{\pi}{4}.\ \text{Deci:}$$

$$I_n = (-1)^n\left[\frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)\right].$$

**44.** a) $I_n = \displaystyle\int_\alpha^{\pi/2}\frac{\sin 2nx}{\sin x}\,dx = \int_\alpha^{\pi/2}\frac{\sin(2n-1)x\cos x + \sin x\cos(2n-1)x}{\sin x}\,dx =$
$= \displaystyle\int_\alpha^{\pi/2}\cos(2n-1)x + \frac{1}{2}\int_\alpha^{\pi/2}\frac{\sin 2nx + \sin(2n-2)x}{\sin x}\,dx = \frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x\Big|_\alpha^{\pi/2} + \frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2}I_{n-1}$. Rezultă $I_n = \dfrac{2}{2n-1}(-1)^{n-1} - \dfrac{2}{2n-1}\sin(2n-1)\alpha + I_{n-1}$. Obţinem astfel:
$I_n = \dfrac{2}{2n-1}(-1)^{n-1} - \dfrac{2}{2n-1}\sin(2n-1)\alpha + \dfrac{2}{2n-3}(-1)^{n-2} - \dfrac{2}{2n-3}\sin(2n-3)\alpha + \cdots + \dfrac{2}{3}(-1) - \dfrac{2}{3}\sin 3\alpha + 2 - 2\sin\alpha + I_0 = 2\left[1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right] -$
$-2\left[\dfrac{1}{2n-1}\sin(2n-1)\alpha + \dfrac{1}{2n-3}\sin(2n-3)\alpha + \cdots + \sin\alpha\right]$.

Deci $\lim\limits_{\alpha\to 0} I_n = 2\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right]$.

b) $I_n = \int_\alpha^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx = \int_\alpha^{\pi/2} \frac{\sin 2nx\cos x + \sin x\cos 2nx}{\sin x}\,dx =$
$= \int_\alpha^{\pi/2} \cos 2nx\,dx + \frac{1}{2}\int_\alpha^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x}{\sin x}\,dx = \frac{1}{2n}\sin 2nx\Big|_\alpha^{\pi/2} + \frac{1}{2}I_n +$
$+\frac{1}{2}I_{n-1}$. Rezultă $I_n = \frac{1}{n}(\sin n\pi - \sin 2n\alpha) + I_{n-1} = -\frac{1}{n}\sin 2n\alpha + I_{n-1}$. Deci:

$$I_n = -\frac{1}{n}\sin 2n\alpha - \frac{1}{n-1}\sin(2n-2)\alpha - \cdots - \frac{1}{2}\sin 4\alpha - \sin 2\alpha + I_0,$$

unde $I_0 = \int_\alpha^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Obţinem $\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} I_n = \frac{\pi}{2}$.

**45.** a) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{(2\sqrt{2}+1)^2}{7}$; b) $S = 2\int_1^{\frac{6+2\sqrt{3}}{3}} \frac{2\sqrt{x-1}}{x}\,dx = \frac{8}{3}\sqrt{9+6\sqrt{3}} -$
$-8\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{9+6\sqrt{3}}}{3}$.

**46.** $S_1 = S_2 = \pi - 2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln 3$; $S_3 = S_{elipsa} - 2S_1 = 2\pi - 2S_1 =$
$= 4\arcsin\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \sqrt{2}\ln 3$. **47.** $S = \frac{8}{3}$.

**48.** a) $\frac{\pi a^3}{8}(e^2 - e^{-2} + 4)$; b) $\frac{(15 - 16\ln 2)\pi}{2}$; c) $V = 2(V_1 - V_2) = 2\pi\int_0^a \frac{b^2x^2}{a^2}\,dx -$
$-2\pi\int_0^a \frac{b^2}{a^4}x^4\,dx = \frac{4\pi ab^2}{15}$.

**49.** a) $\frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$; b) $\frac{\sqrt{10}}{2}\sqrt{p+10} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{p+2} + \frac{p}{2}\ln\frac{\sqrt{p+10}+\sqrt{10}}{\sqrt{p+2}+\sqrt{2}}$;
c) $l(y) = 4\int_0^a \sqrt{1 + (a^{2/3} - x^{2/3})\,x^{-2/3}}\,dx = 6a$.

**50.** a) $\frac{28\sqrt{13}\,\pi}{9} + \frac{8\pi}{27}\ln\frac{3+\sqrt{13}}{2}$; b) $\frac{32}{\pi}\ln\frac{\pi + \sqrt{\pi^2+16}}{4} + 2\sqrt{\pi^2+16}$;
c) $\frac{2\pi}{3}[(4+p)\sqrt{p(4+p)} - p^2]$.

**51.** $x_G = \frac{\pi}{2}$; $y_G = \frac{\pi}{8}$. **52.** $x_G = \frac{5a}{8}$; $y_G = 0$.

**53.** a) $1,4849$ (metoda drept.); $1,4675$ (metoda trapez.); b) $5,4025$.

**54.** $3,141$ $(n = 5)$.

# Capitolul 2

**§1. 8.** a) $|f_n(x)| \le \frac{1}{2n}$, $\forall\, x \in [1,\infty)$, $\forall\, n \ge 1$; $f_n \xrightarrow{u} 0$, pe $[1,\infty)$;
b) $|f_n(x)| \le \frac{\pi}{2n^2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \ge 1$; $f_n \xrightarrow{u} 0$, pe $\mathbb{R}$; c) $f_n \xrightarrow{p} f$, pe $[0,\infty)$,

$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{dacă } 0 \le x < 1 \\ 1/2, & \text{dacă } x = 1 \\ 0, & \text{dacă } x > 1; \end{cases}$ $\quad f_n \overset{u}{\not\to} f$, pe $[0,\infty)$, deoarece $f$ nu este continuă;

d) $f_n \overset{p}{\to} 0$, pe $[0,1]$, $M_n = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{1}{2} \not\to 0$; deci $f_n \overset{u}{\not\to} 0$, pe $[0,1]$.

**9.** a) $n_0(\varepsilon) = \max\{1, \left[\log_2 \dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1\}$; b) $n_0(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

**10.** $|f_n(x)| \le \dfrac{\pi}{2n}$, $\forall x \in I\!R$, $\forall n \ge 1$, $f_n \overset{u}{\to} 0$, pe $I\!R$; $f_n'(x) = \dfrac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}$; $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(1) = \dfrac{1}{2} \ne 0 = \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)'(1)$. Pe intervalul $[0,\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x)$, $g(x) =$

$= \begin{cases} 0, & \text{dacă } 0 \le x < 1 \\ 1/2, & \text{dacă } x = 1 \\ 0, & \text{dacă } x > 1, \end{cases}$ $\quad f_n' \overset{u}{\not\to} g$, pe $[0,\infty)$, deoarece $g$ nu este continuă; nu putem aplica Teorema 7.

**11.** a) $f(x)=0$, $\forall x \in [0,1]$; b) $M_n = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = \dfrac{n}{n+1}\, \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to$ $\to \dfrac{1}{e} \ne 0$, $f_n \overset{u}{\not\to} 0$, pe $[0,1]$; c) $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{n}{(n+1)(n+2)} \to 0 = \int_0^1 f(x)\,dx$.

**§2. 10.** a) Pentru $x \in (-\infty, -6) \cup (-6/5, \infty)$ seria este (A.C.); pentru $x \in [-6, -6/5] \setminus \{-2\}$ seria este (D);
b) pentru $x \in \bigcup_{k\in Z} \left\{\left[2k\pi, \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) \cup \left(\dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi, 2(k+1)\pi\right)\right\}$ seria este(A.C.); pentru $x \in \bigcup_{k\in Z} \left\{\left[\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi\right] \cup \left(\dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi, \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi\right)\right\}$ seria este (D); pentru $x \in \left\{\dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi, \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z\right\}$ seria este (S.C.); c) Pentru $x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right) \cup (1,\infty)$ seria este (A.C.); pentru $x \in \left[\dfrac{1}{3}, 1\right] \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ seria este (D).

**11.** a$_1$) uniform convergentă cu suma $S(x) = 2 - x$, $\dfrac{3}{2} \le x \le \dfrac{5}{2}$; a$_2$) simplu convergentă cu suma $\widetilde{S}(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{dacă } 1 < x < 3 \\ 0, & \text{dacă } x = 1; \end{cases}$ b$_1$) uniform convergentă (se foloseşte Teorema 4); b$_2$) simplu convergentă (cu criteriul lui Dirichlet de la serii numerice); nu este uniform convergentă, deoarece nu satisface condiţia din criteriul lui Cauchy.

**12.** a)-c) serii uniform şi absolut convergente (cu Teorema 2).

**13.** Seria este simplu convergentă pe $I$ cu suma $f(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$; nu este uniform convergentă pe $I$, deoarece $M_n = \sup\limits_{x\in[0,1]} |S_n(x)| = S_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = e^{-1} \not\to 0$, $n \to \infty$ $(S_n(x) = nxe^{-nx})$.

**14.** Este permisă derivarea termen cu termen; se aplică Teorema 8: seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) =$ $= 0$ este convergentă, $f_n$ sunt derivabile pe $I\!R$, iar seria derivatelor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+x^2}$ este uniform convergentă pe $I\!R$. Rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este uniform convergentă pe $I\!R$ şi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+x^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}\right)'.$$

**15.** Este permisă integrarea termen cu termen; se aplică Teorema 9: $f_n$ sunt integrabile pe $[a,b]$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este uniform convergentă.

**§3. 13.** a) $r = 1$; pentru $p = 0$ seria este (A.C.) dacă $x \in (-1,1)$, în rest fiind (D); pentru $0 < p \leq 1$ seria este (A.C.) dacă $x \in (-1,1)$, (S.C.) dacă $x = -1$, în rest fiind divergentă; pentru $p > 1$ seria este (A.C.) dacă $x \in [-1,1]$, în rest fiind (D).
b) $r = \frac{1}{2}$; pentru $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ seria este (A.C.), în $x = -\frac{1}{2}$ seria este (S.C.), în rest adică pentru $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ seria este (D).
c) $r = 1$; dacă $x \in [-1,1]$ seria este (A.C.), în rest adică pentru $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$ seria este (D).
d) $r = \frac{1}{3}$; dacă $\alpha = 0$ seria este (A.C.) pentru $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, în rest (D); dacă $0 < \alpha \leq 1$ seria este (A.C.) pentru $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, este (S.C.) pentru $x = \frac{1}{3}$, în rest fiind (D); dacă $\alpha > 1$ seria este (A.C.) pentru $x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$, în rest fiind (D).
e) Dacă $a \in [0,1)$, $r = 1$; pentru $x \in (-1,1)$ seria este (A.C.); pentru $x = 1$ seria este (S.C.), în rest fiind (D). Dacă $a = 1$ seria este (C) pentru $\forall x \in I\!R$. Dacă $a \in (1,\infty)$, $r = \frac{1}{a}$; pentru $x \in \left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$ seria este (A.C.); pentru $x = \frac{1}{a}$ seria este (S.C.), în rest fiind (D).

**14.** a) Dacă $x \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ seria este (A.C.); dacă $x = -\frac{1}{2}$ seria este (S.C.); dacă $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \setminus \{-1\}$ seria este (D);
b) Dacă $x \in (-\infty, 0)$ seria este (A.C.); dacă $x \in [0,\infty) \setminus \{2\}$ seria este (D).
c) Dacă $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$ seria este (A.C.); dacă $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$ seria este (D).

**15.** a) $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \cdots,\ \ |x| < 1;$
b) $\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -2x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^5 - \frac{2}{7}x^7 - \cdots - \frac{2}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots,\ \ |x| < 1;$
c) $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots,\ \ |x| < 1;$

d) $\dfrac{1}{(1-x)^3}=1+3x+6x^2+10x^3+\cdots+\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)x^n+\cdots,\quad |x|<1;$

e) $\sqrt[3]{1+x}=1+\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1\cdot 2}{3\cdot 6}x^2+\dfrac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1\cdot 2\cdot 5\cdots(3n-4)}{3\cdot 6\cdot 9\cdots 3n}x^n+\cdots,\quad |x|<1$ şi $x=\pm 1$;

f) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}}=1-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1\cdot 4}{3\cdot 6}x^2-\dfrac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}x^3+\cdots+(-1)^n\dfrac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdots 3n}x^n+\cdots,\quad |x|<1$ şi $x=1$;

g) $\sqrt{1+x^2}=1+\dfrac{1}{2\cdot 1!}x^2-\dfrac{1}{2^2\cdot 2!}x^4+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n\cdot n!}x^{2n}+\cdots,\quad |x|<1$ şi $x=\pm 1$;

h) $\sqrt{1-x^2}=1-\dfrac{1}{2\cdot 1!}x^2-\dfrac{1}{2^2\cdot 2!}x^4-\cdots-\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n\cdot n!}x^{2n}-\cdots,\quad |x|<1$ şi $x=\pm 1$;

i) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\dfrac{1}{2\cdot 1!}x+\dfrac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^2+\cdots+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^n+\cdots,\quad |x|<1$ şi $x=-1$;

j) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\dfrac{1}{2\cdot 1!}x^2+\dfrac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4+\cdots+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}+\cdots,\quad |x|<1;$

k) $\arcsin x=x+\dfrac{1}{2\cdot 1!\cdot 3}x^3+\dfrac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!\cdot 5}x^5+\cdots+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)}x^{2n+1}+\cdots,\quad |x|<1$ şi $x=\pm 1$;

l) $\arccos x=\dfrac{\pi}{2}-\arcsin x=\dfrac{\pi}{2}-x-\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 1!}x^3-\dfrac{1\cdot 3}{2^2\cdot 5\cdot 2!}x^5-\cdots-\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n(2n+1)n!}x^{2n+1}-\cdots,\quad |x|<1$ şi $x=\pm 1$;

m) $\operatorname{arcctg} x=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x=\dfrac{\pi}{2}-x+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^5}{5}+\cdots-(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}-\cdots,\quad |x|<1$ şi $x=\pm 1$;

n) $\dfrac{1}{1+x+x^2}=1-x+x^3-x^4+x^6-x^7+x^9-x^{10}+\cdots+x^{3n}-x^{3n+1}+\cdots,\quad |x|<1;$

o) $\sin^3 x=x^3-\dfrac{1}{2}x^5+\dfrac{13}{120}x^7-\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(2n+1)!}\,\dfrac{3}{4}(3^{2n}-1)x^{2n+1}+\cdots,\quad x\in\mathbb{R};$

p) $x\cdot\operatorname{arctg} x-\ln(1+x^2)=\dfrac{1}{6}x^4-\dfrac{2}{15}x^6+\dfrac{3}{28}x^8+\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{n}{(n+1)(2n+1)}x^{2n+2}+\cdots,\quad |x|<1$ şi $x=\pm 1$;

q) $\dfrac{e^x}{1+x}=1+x\left(\dfrac{1}{1!}-1\right)+x^2\left(\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{1!}+1\right)+x^3\left(\dfrac{1}{3!}-\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{1!}-1\right)+\cdots+x^n\left(\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n-1)!}+\cdots+(-1)^n\right)+\cdots,\quad |x|<1;$

r) $\dfrac{\arcsin x}{1-x}=x+x^2+\left(1+\dfrac{1}{2\cdot 1!\cdot 3}\right)x^3+\left(1+\dfrac{1}{2\cdot 1!\cdot 3}\right)x^4+\left(1+\dfrac{1}{2\cdot 1!\cdot 3}+\dfrac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!\cdot 5}\right)x^5+\left(1+\dfrac{1}{2\cdot 1!\cdot 3}+\dfrac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!\cdot 5}\right)x^6+\cdots+\left(1+\dfrac{1}{2\cdot 1!\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)}\right)x^{2n+1}+\left(1+\dfrac{1}{2\cdot 1!\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)}\right)x^{2n+2}+\cdots,\quad |x|<1;$

s) $(\arcsin x)^2=x^2+2\,\dfrac{1}{2\cdot 1!\cdot 3}x^4+\left(\dfrac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!\cdot 5}+\dfrac{1}{2\cdot 1!\cdot 3}\cdot\dfrac{1}{2\cdot 1!\cdot 3}+\dfrac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!\cdot 5}\right)x^6+$

$$+\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3\cdot3!\cdot7}+\frac{1}{2\cdot1!\cdot3}\cdot\frac{1\cdot3}{2^2\cdot2!\cdot5}+\frac{1\cdot3}{2^2\cdot2!\cdot5}\cdot\frac{1}{2\cdot1!\cdot3}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3\cdot3!\cdot7}\right)x^8+\cdots+$$
$$+\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)}+\frac{1}{2\cdot1!\cdot3}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot(2n-1)}+\cdots+\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot(2n-1)}\cdot\frac{1}{2\cdot1!\cdot3}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)}\right)x^{2n+2}+\cdots,\ \ |x|\le1;$$

t) $(\operatorname{arctg}x)^2=x^2-\frac{2}{3}x^4+x^6\left(\frac15+\frac13\cdot\frac13+\frac15\right)+x^8\left(-\frac17-\frac13\cdot\frac15-\frac13\cdot\frac15-\frac17\right)+\cdots+$
$+x^{2n+2}\left((-1)^n\frac{1}{2n+1}-\frac13\cdot(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\cdot\left(-\frac13\right)+\right.$
$\left.+(-1)^n\frac{1}{2n+1}\right)+\cdots,\ \ |x|\le1.$

**16.** $\pi\simeq3,14159.$

**17.** a) $f(x)=-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}+\cdots;$ b) $f(x)=-\frac{x^2}{3}+\frac{13}{90}x^4+\cdots;$
c) $f(x)=1+x^2-\frac{x^3}{2}+\frac56x^4-\frac34x^5+\cdots;$ d) $f(x)=e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+\frac{2447}{5760}x^4+\cdots\right).$

**18.** a) $S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x^2}(1-x^2)\ \ln(1-x)+\frac{2+x}{4x}, & \text{dacă } x\in[-1,1)\setminus\{0\}\\ 0, & \text{dacă } x=0\\ \frac34, & \text{dacă } x=1.\end{cases}$

b) $S(x)=\begin{cases}e^x+\frac12+\frac{3(e^x-1-xe^x)}{x^2}, & \text{dacă } x\in I\!R\setminus\{0\}\\ 0, & \text{dacă } x=0.\end{cases}$

c) $S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x^6}(x^4-1)\ln(x^2+1)+\frac{2-x^2}{4x^4}, & \text{dacă } x\in[-1,1]\setminus\{0\}\\ \frac13, & \text{dacă } x=0.\end{cases}$

**19.** a) $S=\ln2;$ b) $S=-\frac13\ln2+\frac{\pi}{3\sqrt3};$ c) $S=\frac{1}{2\sqrt2}\ln(\sqrt2+1)+\frac{\pi\sqrt2}{8}.$

**20.** a) $S(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{6x^2}{(1-x)^3}+\frac{6x^3}{(1-x)^4},\ \ \forall\,x\in(-1,1);$
b) $S(x)=\frac{2}{1-x}+\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{30x^2}{(1-x)^3}+\frac{150x^3}{(1-x)^4}+\frac{240x^4}{(1-x)^5}+\frac{120x^5}{(1-x)^6},\ \ \forall\,x\in(-1,1).$

**21.** $I_1\simeq0,3102,\ \ I_2\simeq0,9045.$ **22.** a) $0,946;$ b) $1,057;$ c) $0,461.$

**§4. 5.** a) Seria Fourier asociată lui $f$ este $\frac{2l^3}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}(n^2\pi^2-6)\sin\frac{\sin n\pi x}{l}$ cu suma $s(x)=\begin{cases}x^3, & \text{dacă } x\in(-l,l)\\ 0, & \text{dacă } x=\pm l.\end{cases}$

b) Seria Fourier este $\frac{1}{\pi a}\operatorname{sh}a\pi+\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}a\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos nx-n\sin nx}{a^2+n^2}$ cu suma

$$s(x) = \begin{cases} e^{ax}, & \text{dacă } x \in (-\pi, \pi) \\ (e^{a\pi} + e^{-a\pi})/2, & \text{dacă } x = \pm\pi. \end{cases}$$

c) Seria Fourier asociată funcţiei $f$ este $\dfrac{1}{a\pi}\operatorname{sh} a\pi + \dfrac{2a}{\pi}\operatorname{sh} a\pi \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2+n^2}\cos nx$ cu suma $s(x) = \operatorname{ch} ax,\ \forall\, x \in [-\pi, \pi]$.

d) Seria Fourier asociată funcţiei $f$ este $\dfrac{2}{\pi}\operatorname{sh} a\pi \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2+a^2}\sin nx$ cu suma

$$s(x) = \begin{cases} \operatorname{sh} ax, & \text{dacă } x \in (-\pi, \pi) \\ 0, & \text{dacă } x = \pm\pi. \end{cases}$$

**6.** a) Seria Fourier este $\dfrac{4a}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}\cos(2k+1)b\,\sin(2k+1)x =$
$= \dfrac{4a}{\pi}\left[\cos b\,\sin x + \dfrac{\cos 3b}{3}\sin 3x + \dfrac{\cos 5b}{5}\sin 5x + \cdots\right]$, cu suma $s(x) = f(x),\ \forall\, x \in [-\pi, \pi] \setminus \{-\pi+b, -b, b, \pi-b\}$, $s(-\pi+b) = s(-b) = -\dfrac{a}{2}$, $s(b) = = s(\pi - b) = \dfrac{a}{2}$.

b) Seria Fourier este $\dfrac{ac}{\pi} + \dfrac{2a}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nc\,\cos nx =$
$= \dfrac{2a}{\pi}\left[\dfrac{c}{2} + \dfrac{\sin c}{1}\cos x + \dfrac{\sin 2c}{2}\cos 2x + \dfrac{\sin 3c}{3}\cos 3x + \cdots\right]$ cu suma $s(x) = f(x),\ \forall\, x \in \in [-\pi, \pi] \setminus \{-c, c\}$, $s(-c) = s(c) = \dfrac{a}{2}$.

c) Seria Fourier este $\dfrac{ac}{2\pi} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{\pi c n^2}(1 - \cos nc)\,\cos nx =$
$= \dfrac{ac}{2\pi} + \dfrac{2a}{\pi c}\left[(1 - \cos c)\cos x + \dfrac{1 - \cos 2c}{2^2}\cos 2x + \dfrac{1 - \cos 3c}{3^2}\cos 3x + \cdots\right]$ cu suma $s(x) = f(x),\ \forall\, x \in [-\pi, \pi]$.

**7.** a) Dacă $a \in Z$, $n \neq \pm a$ seria de cosinusuri este:

$\dfrac{1}{\pi a}(1 - (-1)^a) + \displaystyle\sum_{\substack{n=1\\ n\neq|a|}}^{\infty} \frac{2a}{\pi(a^2 - n^2)}[1 - (-1)^{n+a}]\cos nx$ cu suma $s(x) = \sin ax$, $\forall\, x \in [0, \pi]$.

Dacă $a \notin Z$ seria de cosinusuri este:

$\dfrac{1}{\pi a}(1 - \cos a\pi) + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{\pi(a^2 - n^2)}[1 - (-1)^n \cos a\pi]\,\cos nx$ cu suma $s(x) = \sin ax$, $\forall\, x \in [0, \pi]$.

b) Seria de cosinusuri este:

$\dfrac{1}{\sqrt{3}}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[1 + (-1)^{n+1}]\sin\frac{n\pi}{3}\cos nx = \frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{3}\cos(2k+1)x$, cu suma $s(x) = f(x),\ \forall\, x \in [0, \pi]$.

**8.** a) Seria de sinusuri este $\displaystyle\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[\cos na-(-1)^n]\sin nx$ cu suma

$$s(x)=\begin{cases}0, & \text{dacă } x\in[0,a)\\ \frac{1}{2}, & \text{dacă } x=a\\ 1, & \text{dacă } x\in(a,\pi)\\ 0, & \text{dacă } x=\pi.\end{cases}$$

b) Seria de sinusuri este $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}[1-(-1)^n]\sin\frac{n\pi}{3}\sin nx=$

$\displaystyle=\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi}{3}\sin(2k+1)x$ cu suma $s(x)=f(x),\ \forall\, x\in[0,\pi]$.

# Capitolul 3

**§1. 17.** a) (C); b) (D); c) (A.C.); d)–e) Dacă $p>1$ integrala este (A.C.), iar dacă $0<p\le 1$ integrala este (S.C.); f) (D).

**18.** a) Dacă $a\ne b$, $I=\dfrac{1}{b-a}\ln\dfrac{b}{a}$; dacă $a=b$, $I=\dfrac{1}{a}$; b) $6\ln 2+\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{3}$; c) Dacă $a\ne b$, $I=\dfrac{1}{(b-a)^2}\ln\dfrac{b}{a}-\dfrac{1}{b(b-a)}$; dacă $a=b$, $I=\dfrac{1}{2a^2}$; d) $\dfrac{\pi+2}{4}$; e) $\dfrac{a}{a^2+b^2}$; f) 1; g) $\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg} a-\ln\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$; h) $\ln\dfrac{1+\sqrt{a^2+1}}{a}$; i) $\dfrac{1}{3}$; j) $\dfrac{13}{18}-\dfrac{1}{27}\ln 2-\dfrac{41\pi}{216\sqrt{2}}$; k) $\dfrac{\pi}{2}-1$; l) $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$; m) $\dfrac{\pi}{2(a+b)}$.

**19.** a) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$; b) $\dfrac{\pi}{\sin^3\alpha}$; c) $\pi\sqrt{2}$; d) $2\pi\sqrt{2}$; e) $\dfrac{2}{\sin^2\alpha}$.

**20.** a) (C); b) (C); c) (D); d) (D); e) (D); f) (C) dacă $p<2$; (D) dacă $p\ge 2$; g) (C) dacă $p<1$; (D) dacă $p\ge 1$.

**21.** a) (D); b) (S.C.); c) (C) dacă $p>1$ şi $q<1$, în rest fiind (D); d) (S.C.) dacă $0<\alpha\le 1$; (A.C.) dacă $\alpha>1$.

**22.** a) $0<p<1$; b) $p>m$ şi $m>0$; c) $0<p<1$ şi $0<m<1$.

**23.** a) $\dfrac{3\pi}{2}$; b) $\dfrac{-(\sqrt{3}+1)\pi}{4\sqrt{6}}$; c) $\pi$; d) $\dfrac{(b-a)(a+3b)\pi}{8}$; e) $6-\dfrac{9}{2}\ln 3$; f) $\dfrac{\pi}{2}(a+b)$; g) $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

**26.** a) $(2aq-pb)\dfrac{2^{2n-2}\pi a^{n-2}}{(4ac-b^2)^{(2n-1)/2}}\cdot\dfrac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}$; b) $\displaystyle\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k\ln(k+1)$; c) $I_n=\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}$, dacă $n$ este par, $n\ge 2$; $I_n=\dfrac{(n-1)!!}{n!!}$, dacă $n$ este impar, $n\ge 1$; $I_n=\dfrac{\pi}{2}$, dacă $n=0$.

**27.** Se foloseşte integrala $I = \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\, dx = -\dfrac{\pi}{2}\ln 2$ şi se integrează prin părţi: $x\ \ln\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x \operatorname{ctg} x\, dx = -\dfrac{\pi}{2}\ln 2$, de unde rezultă relaţia din enunţ.

**§2. 15.** a) $-\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}\right)^2 + \dfrac{\pi^2}{16}$; b) $\dfrac{\pi}{2}\ln(a+1)$; c) $2\pi\ln\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}$;

d) $I(a) = \begin{cases} 2\pi\ln|a|, & \text{dacă } a\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty); \\ 0, & \text{dacă } a\in[-1,1]. \end{cases}$

**16.** $f(\lambda) = \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\lambda}{\lambda^2+1} - \dfrac{\ln\lambda}{\lambda^2+1}$; $I(\lambda) = -f'(\lambda) = \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\lambda^2-1}{(\lambda^2+1)^2} - \dfrac{2\lambda}{(\lambda^2+1)^2}\ln\lambda +$ $+\dfrac{1}{\lambda(\lambda^2+1)}$.

**17.** $\operatorname{arctg}\dfrac{b-a}{ab+a+b+2}$.

**18.** $E'(a) = -a\int_0^{\pi/2}\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1-a^2\sin^2 x}}\,dx$, deci $E'(a) = \dfrac{1}{a}E(a) - \dfrac{1}{a}F(a)$. Apoi:
$E'(a) = \int_0^{\pi/2}\dfrac{a\sin x\,(\cos x)'}{\sqrt{1-a^2\sin^2 x}}\,dx = -a\int_0^{\pi/2}\dfrac{\cos^2 x}{(1-a^2\sin^2 x)^{3/2}}\,dx = -a\int_0^{\pi/2}\dfrac{dx}{(1-a^2\sin^2 x)^{3/2}} -$ $-\dfrac{1}{a}\int_0^{\pi/2}\dfrac{(-a^2\sin^2 x+1)-1}{(1-a^2\sin^2 x)^{3/2}}\,dx = -\dfrac{1}{a}F(a) + \dfrac{1-a^2}{a}\int_0^{\pi/2}\dfrac{dx}{(1-a^2\sin^2 x)^{3/2}}$. Rezultă că:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{(1-a^2\sin^2 x)^{3/2}} = \frac{a}{1-a^2}E'(a) + \frac{1}{1-a^2}F(a) = \frac{1}{1-a^2}E(a).$$

Apoi: $F'(a) = a\int_0^{\pi/2}\dfrac{\sin^2 x}{(1-a^2\sin^2 x)^{3/2}}\,dx = -\dfrac{1}{a}F(a) + \dfrac{1}{a}\int_0^{\pi/2}\dfrac{dx}{(1-a^2\sin^2 x)^{3/2}}$. Deci:

$F'(a) = -\dfrac{1}{a}F(a) + \dfrac{1}{a(1-a^2)}E(a)$. Astfel avem:

$$E''(a) + \frac{1}{a}E'(a) + \frac{E(a)}{1-a^2} = \left(\frac{1}{a}E(a) - \frac{1}{a}F(a)\right)' + \frac{1}{a}E'(a) + \frac{E(a)}{1-a^2} = -\frac{1}{a^2}E(a) +$$
$$+\frac{1}{a}E'(a) + \frac{1}{a^2}F(a) - \frac{1}{a}F'(a) + \frac{1}{a}E'(a) + \frac{E(a)}{1-a^2} = -\frac{1}{a^2}E(a) + \frac{2}{a}\left(\frac{1}{a}E(a) - \frac{1}{a}F(a)\right) +$$
$$+\frac{1}{a^2}F(a) - \frac{1}{a}\left(-\frac{1}{a}F(a) + \frac{1}{a(1-a^2)}E(a)\right) + \frac{E(a)}{1-a^2} = 0.$$

**19.** $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \int_0^a\dfrac{-(x-t)}{[(x-t)^2+y^2+z^2]^{3/2}}f(t)\,dt$; $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \int_0^a\dfrac{2(x-t)^2-y^2-z^2}{[(x-t)^2+y^2+z^2]^{5/2}}f(t)\,dt$;
$\dfrac{\partial F}{\partial y} = \int_0^a\dfrac{-y}{[(x-t)^2+y^2+z^2]^{3/2}}f(t)\,dt$; $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \int_0^a\dfrac{-(x-t)^2+2y^2-z^2}{[(x-t)^2+y^2+z^2]^{5/2}}f(t)\,dt$;
$\dfrac{\partial F}{\partial z} = \int_0^a\dfrac{-z}{[(x-t)^2+y^2+z^2]^{3/2}}f(t)\,dt$; $\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \int_0^a\dfrac{-(x-t)^2-y^2+2z^2}{[(x-t)^2+y^2+z^2]^{5/2}}f(t)\,dt$.

**20.** $I_n'(x) = \dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi\sin\varphi\cdot\sin(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi = \dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi(-\cos\varphi)'\cdot\sin(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi =$
$= -\dfrac{1}{\pi}\cos\varphi\cdot\sin(n\varphi - x\sin\varphi)\Big|_0^\pi + \dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos\varphi\cdot(n - x\cos\varphi)\cdot\cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi =$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\varphi\cdot(n - x\cos\varphi)\cdot\cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi,$$

$$I_n''(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi(-\sin^2\varphi)\cdot\cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Înlocuind în relaţia din enunţ avem:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[-x^2\sin^2\varphi + x\cos\varphi\cdot(n - x\cos\varphi) + (x^2 - n^2)]\cdot\cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi(nx\cos\varphi - n^2)\cdot\cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi = -\frac{n}{\pi}\int_0^\pi(n - x\cos\varphi)\cdot\cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi =$$

$$= -\frac{n}{\pi}\sin(n\varphi - x\sin\varphi)\Big|_0^\pi = 0.$$

**21.** a) uniform convergentă; b) uniform convergentă (cu criteriul lui Dirichlet); c) uniform convergentă (cu criteriul lui Abel); $\text{d}_1$) uniform convergentă; $\text{d}_2$) nu este uniform convergentă.

**22.** a) $\pi\ln\dfrac{\sqrt{1-a}+1}{2}$; b) $\dfrac{\pi}{2}\ln(\lambda+1)$; c) $\dfrac{\pi}{2}(\alpha + 1 - \sqrt{1+\alpha^2})$; d) $\dfrac{\pi}{\beta}\ln(\alpha+\beta)$.

**23.** a) $\dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^\alpha\cdot\beta^\beta}$; b) $\dfrac{2\pi}{3}[\alpha\beta(\alpha+\beta) - (\alpha^3+\beta^3)\ln(\alpha+\beta) + \alpha^3\ln\alpha + \beta^3\ln\beta]$.

**24.** a) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\beta^2+m^2}{\alpha^2+m^2}$; b) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a^2+c^2}{a^2+b^2}$; c) $\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} - \operatorname{arctg}\dfrac{c}{a}$.

**§3. 16.** Se face substituţia $\dfrac{(\alpha+\gamma)x}{x(\alpha-\beta)+\beta+\gamma} = t$. Rezultă:

$$I = \frac{1}{(\alpha+\gamma)^a\cdot(\beta+\gamma)^b}\,B(a,b).$$

**17.** Se face substituţia $t = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}$. Se obţine $I = 2^{p+q-2}\,B(p,q)$.

**18.** a) $\dfrac{\pi}{16}$; b) $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$; c) $\dfrac{5\pi}{128}$; d) $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$; e) $\dfrac{3\pi}{512}$; f) $\dfrac{\sqrt[3]{2}\,\pi}{18\sqrt{3}}$; g) $\dfrac{\pi}{\sqrt[4]{27}}$.

**19.** $I = (b-a)^{p+q+1}\,B(p+1,q+1)$; $I_1 = \dfrac{(b-a)^2\pi}{8}$, $I_2 = \pi$, $I_3 = \dfrac{(b-a)\pi}{2}$; $I_4 = \dfrac{2(b-a)\pi}{3\sqrt{3}}$.

**20.** Se calculează $U(b) = I_1 + iI_2$ şi derivata $U'(b)$. Se obţine ecuaţia $U'(b) = = \dfrac{-p}{b+ai}U(b)$, de unde rezultă $U(b) = \Gamma(p)\dfrac{1}{r^p}(\cos p\theta + i\sin p\theta)$, $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\theta = = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$. Deci $I_1 = \dfrac{\Gamma(p)}{a^p}\cos^p\theta\cdot\cos p\theta$, $I_2 = \dfrac{\Gamma(p)}{a^p}\cos^p\theta\cdot\sin p\theta$.

**21.** a) $\dfrac{1}{m}B\left(\dfrac{1}{m}, 1 - \dfrac{1}{n}\right)$; b) Se face substituţia $\cos x = 1 - 2\sqrt{t}$; rezultă $I = = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}B\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$; c) $\Gamma(p+1)$;

d) Se calculează $J(p,\varepsilon) = \displaystyle\int_\varepsilon^p I(t)\,dt$, $0 < \varepsilon < 1$ fixat, unde $I(p) = \displaystyle\int_0^\infty\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\,dx$. Obţinem:

$$J(p,\varepsilon)=\int_\varepsilon^p\left(\int_0^\infty \frac{x^{t-1}\ln x}{1+x}\,dx\right)dt=\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x}\left(\int_\varepsilon^p x^{t-1}\,dt\right)dx=$$
$$=\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x}\cdot\left(\frac{x^{t-1}}{\ln x}\right)\Bigg|_{t=\varepsilon}^{t=p}dx=\underbrace{\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx}_{I_1}-\underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{x^{1-\varepsilon}(1+x)}\,dx}_{I_2}.$$

Pentru $I_1$ notăm $x=\dfrac{y}{1-y}\Rightarrow y=\dfrac{x}{1+x},\ dx=\dfrac{dy}{(1-y)^2},\ 1+x=\dfrac{1}{1-y}$. Rezultă $I_1=\displaystyle\int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{-p}\,dy=B(p,1-p)=\frac{\pi}{\sin(p\pi)}$. Integrala $I_2$ este convergentă. Deci:

$$J(p,\varepsilon)=\frac{\pi}{\sin(p\pi)}-I_2;\ \text{rezultă}\ I(p)=\left(\frac{\pi}{\sin(p\pi)}\right)_p'=\frac{-\pi^2\cos(p\pi)}{\sin^2(p\pi)}.$$

# Capitolul 4

**§1. 11.** a) $t_2-t_1+\dfrac{1}{2}\operatorname{sh}2t_2-\dfrac{1}{2}\operatorname{sh}2t_1$; b) $\operatorname{sh}^2T$; c) $\dfrac{4b}{a}(a-b)$; d) $a\operatorname{sh}\dfrac{b}{a}$; e) $\pi a\sqrt{4\pi^2+1}+\dfrac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1})$; f) $a\left[\ln\dfrac{\varphi_2+\sqrt{\varphi_2^2+1}}{\varphi_1+\sqrt{\varphi_1^2+1}}-\dfrac{\sqrt{\varphi_2^2+1}}{\varphi_2}+\dfrac{\sqrt{\varphi_1^2+1}}{\varphi_1}\right]$.

**12.** a) $(t_2-t_1)[1+2(t_2^2+t_1t_2+t_1^2)]$; b) $2\pi\sqrt{R^2+h^2}$; c) $\dfrac{a\sqrt{2k^2+1}}{k}(e^{kt_0}-1)$; d) 21; e) Pentru a obţine o parametrizare a curbei pornim de la ecuaţiile parametrice ale sferei $x=a\cos u\cos v,\ y=a\sin u\cos v,\ z=a\sin v,\ u\in[0,2\pi],\ v\in[-\pi/2,\pi/2]$. Impunând condiţia ca $x,\ y,\ z$ să verifice a doua ecuaţie a curbei $\Gamma$ obţinem:

$$x=\frac{a\cos u}{\operatorname{ch}u},\ y=\frac{a\sin u}{\operatorname{ch}u},\ z=a\frac{\operatorname{sh}u}{\operatorname{ch}u},\ u\in[0,u_0],\ u_0=\operatorname{arcth}\frac{z_0}{a}>0.$$

Rezultă $L(\Gamma)=2a\sqrt{2}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{a+z_0}{a-z_0}}-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

f) Notăm $x+y=u,\ \ x-y=v$. Din prima ecuaţie rezultă $v^2=au\Rightarrow u=\dfrac{v^2}{a}$. Deci:

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{a}+v\right),\ y=\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{a}-v\right),\ z=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{v^{3/2}}{\sqrt{a}},\ v\in[0,v_0],\ v_0=\frac{\sqrt[3]{9a}}{2}z_0^{2/3}>0.$$

Rezultă $L(\Gamma)=\dfrac{3}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{\dfrac{3z_0^4}{a}}+2\sqrt[3]{\dfrac{az_0^2}{3}}\right)$.

**13.** Ecuaţiile parametrice ale curbei sunt $x(t)=f'(\varphi)\cdot\sin\varphi+f''(\varphi)\cdot\cos\varphi$, $y(t)=f'(\varphi)\cdot\cos\varphi-f''(\varphi)\cdot\sin\varphi,\ \ \varphi\in[\varphi_1,\varphi_2]$, iar $ds^2=[f'(\varphi)+f'''(\varphi)]^2\,d\varphi^2$.

**14.** a) $\dfrac{256\,a^3}{15}$; b) $\dfrac{a^3}{6}\left(\operatorname{ch}^{3/2}(2t_0)-1\right)$; c) $\dfrac{ab}{3(a+b)}(a^2+ab+b^2)$; d) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}(b^3-a^3)$; e) $\dfrac{19}{3}$.

**15.** a) $\dfrac{1}{3}\left[(2+4\pi^2)^{3/2}-2\sqrt{2}\right]$; b) $\dfrac{a^2}{256\sqrt{2}}\left(100\sqrt{38}-72-17\ln\dfrac{25+4\sqrt{38}}{17}\right)$.

**16.** $M=2b\left(b+a\dfrac{\arcsin e}{e}\right),\ \ e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

**17.** $M = \dfrac{1}{3}\left[(1+x_2^2)^{3/2} - (1+x_1^2)^{3/2}\right]$. **18.** $M = k$.

**19.** $x_0 = b - a\sqrt{\dfrac{h-a}{h+a}}, \quad y_0 = \dfrac{h}{2} + \dfrac{ab}{2\sqrt{h^2-a^2}}$.

**20.** $x_0 = y_0 = z_0 = \dfrac{4a}{3\pi}$; $I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = \dfrac{\pi\varrho_0 a^3}{2}$; $I_x = I_y = I_z = \pi\varrho_0 a^3$, $I_0 = \dfrac{3a^3\pi\varrho_0}{2}$.

**§2. 12.** a) 0; b) $-2\pi$; c) $-\dfrac{14}{15}$; d) $\dfrac{4}{3}$; e) 0; f) i)–iv) 1.

**13.** a) 0; b) $-2\ln 2$. **14.** a) $\pi\sqrt{2}$; b) $-1$. **15.** a) $a^3\pi$; b) $-\pi a^2$; c) $-4$.

**16.** $L = \displaystyle\int_{\overset{\frown}{AB}} m\vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{z_1}^{z_2} mg\,dz = -mg(z_2 - z_1)$.

**17.** Integrala este independentă de drum şi $\displaystyle\int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy = \frac{18}{7}$.

**18.** a) 4; b) 1; c) $e\cos 1 - 1$.

**19.** a) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{-x^2y^2 - 3x^4 - 3y^4}{x^2y^2}$; b) $U(x,y) = \dfrac{x^3}{y} - xy + \dfrac{y^3}{x} + C$; c) $\displaystyle\int_\Gamma \omega = \frac{\pi^3}{16} + \frac{16}{\pi} - \pi - 1$.

**20.** $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{x^2 - 2xy - y^2}{(x^2+y^2)^2}$; se consideră curbele:

$$(\Gamma_1): \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t,\ t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \end{cases} \quad \text{şi} \quad (\Gamma_2): \begin{cases} x = \cos t \\ y = -\sin t,\ t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], \end{cases}$$

(vezi Figura I.1) şi se arată că $\displaystyle\int_{\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy = -\pi \neq \pi = \int_{\Gamma_2} P\,dx + Q\,dy$.

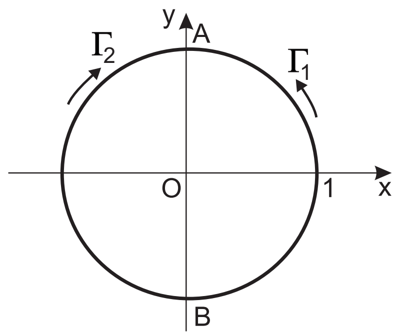

Figura I.1

**21.** a) 0; b) $z_1(x_1z_1 + y_1^2) - z_0^2(x_0z_0 + y_0^2)$.

**22.** a) $z(x,y) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{3x-y}{2\sqrt{2}\,y} + C$; b) $z(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^2+y^2} + C$; c) $z(x,y) = \dfrac{y}{1-xy} + C$.

**23.** a) $u(x,y,z) = x - \dfrac{x}{y} + \dfrac{xy}{z} + C$; b) $u(x,y,z) = \operatorname{arctg}\dfrac{z}{x} - \dfrac{z}{xy} + C$.

# Capitolul 5

**§1. 12.** a) $\dfrac{1}{mn}[\sin ma + \sin nb - \sin(ma+nb)]$; b) $\ln\dfrac{(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{5})}{(1+\sqrt{2})(2+\sqrt{6})}$;
c) $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\ln(3+2\sqrt{2})$; d) $\dfrac{ab}{2-n}$; e) $\dfrac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}$; f) $\dfrac{a^4}{2}$; g) $\dfrac{160}{3}$; h) $\dfrac{284}{105}p^4$; i) $\dfrac{\pi}{2}$;
j) $1\dfrac{37}{128} - \ln 2$; k) $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{4}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

**13.** a) $\dfrac{2\pi\, a^3}{3}$; b) $\dfrac{\pi R^4}{4}\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}\right)$; c) $2\pi\displaystyle\int_0^1 r\, f(r)\, dr$; d) $\dfrac{ab\pi}{4}(a^2+b^2)$; e) $\dfrac{a^3b^3\pi}{96}$;
f) $\dfrac{7\pi^4}{6} - \dfrac{\pi^3\sqrt{3}}{2}$; g) $\displaystyle\int_a^b\int_{\pi/4}^{5\pi/4} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\, dr\, d\varphi$; h) $\dfrac{4a^3}{3}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{3}\right)$.

**14.** a) $2\pi$; b) $\dfrac{(e^{2p}-1)^2}{3}$; c) $\dfrac{ab}{3}\ln 6\cdot(2\sqrt{2}-1)$; d) $2\pi^2 + 8$.

**15.** a) $\pi a^2$; b) $2a^2$; c) $\dfrac{b^2-a^2}{2}\cdot\dfrac{\beta-\alpha}{(1+\alpha)(1+\beta)}$.

**16.** a) $\dfrac{3\pi\, a^4}{4p}$; b) $\dfrac{88}{105}$; c) $\dfrac{45\pi}{32}$; d) $\pi(1-e^{-R^2})$; e) $\dfrac{2}{5}$.

**17.** a) $M = \dfrac{a^2\varrho_0}{2}$; $x_0 = y_0 = \dfrac{\pi a}{8}$; b) $M = \dfrac{9a^2\varrho_0}{2}$, $x_0 = -\dfrac{a}{2}$, $y_0 = \dfrac{8a}{5}$.

**18.** $I_x = I_y = \dfrac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}}$. **19.** $A = \dfrac{4p^2}{3}$; $I_0 = \dfrac{96p^4\varrho_0}{35}$.

**20.** $-2ab\pi$. **21.** a) $a^2$; b) $\dfrac{3\pi a^2}{8}$; c) $6\pi a^2$.

**§2. 13.** a) $\dfrac{1}{24}$; b) $\dfrac{\pi}{6}$; c) $\dfrac{1}{64}$; d) $\dfrac{\pi\, a^5}{12}$; e) 0.

**14.** a) $\dfrac{4\pi R^5}{5}$; b) $\pi R\sqrt{R^2+a^2} - a^2\pi\ln(R+\sqrt{R^2+a^2}) + a^2\pi\ln a$; $(a>0)$; c) $\dfrac{\pi^2 abc}{4}$;
d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} d\varphi\int_{arctg\,(cos\,\varphi)}^{\pi/2}\sin\theta\, d\theta\int_{\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}}^{\frac{1}{\sin\theta\cos\varphi}} r^2 f(r)\, dr$; pentru $f\equiv 1$, $I = V(G) = \dfrac{1}{3}$; folosind coordonatele cilindrice avem $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} d\varphi\int_0^{1/cos\,\varphi} r\left(\int_0^{r^2} f(r^2+z^2)\, dz\right) dr$.

**15.** a) $(G):\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le\sqrt{2x-x^2},\ 0\le z\le a$; avem:

$$I = \int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} dx\int_0^a f\, dz = \int_0^1 dy\int_0^a dz\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f\, dx =$$

$$= \int_0^a dz\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f\, dx = \int_0^2 dx\int_0^a dz\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f\, dy = \int_0^a dz\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f\, dy.$$

b) $(G):\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le\sqrt{1-x^2},\ 0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}$; avem:

$$I = \int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} dx\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f\, dz = \int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz\int_0^{\sqrt{1-x^2-z^2}} f\, dy =$$

$= \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2-z^2}} f\,dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz \int_0^{\sqrt{1-y^2-z^2}} f\,dx =$
$= \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2-z^2}} f\,dx.$

**16.** a) $\dfrac{4k\pi}{3}R^3$; b) $2\pi abc$; c) $\dfrac{4\pi}{3}[R^3 - (R^2 - r_0^2)^{3/2}]$; d) $\dfrac{2\pi abc}{3}(2-\sqrt{2})$; e) $\dfrac{\pi}{192}$; f) $\pi a^3$; g) $\dfrac{4\pi abc}{3}$; h) Se face schimbarea de variabile $x = ar^3\cos^3\varphi\sin^3\theta$, $y = br^3\sin^3\varphi\sin^3\theta$, $z = cr^3\cos^3\theta$, $(r,\varphi,\theta) \in \widetilde{G}$, unde $(\widetilde{G}) :\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi$; $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = 27abcr^8\sin^2\varphi\cos^2\varphi\sin^5\theta\cos^2\theta$; rezultă $V = \dfrac{4\pi abc}{35}$.

**17.** a) $M = \dfrac{2\pi\varrho_0 R^3}{3}$; $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = \dfrac{3R}{8}$. b) $M = 2\pi\varrho_0 a^3\left(\sqrt{3} - \dfrac{5}{6}\right)$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = \dfrac{5a}{83}(6\sqrt{3}+5)$; c) $M = \dfrac{\pi\varrho_0 abc}{6}$; $x_0 = \dfrac{3a}{8}$, $y_0 = \dfrac{3b}{8}$, $z_0 = \dfrac{3c}{8}$.

**18.** $I_{xy} = \iiint_G \varrho_0 z^2\,dx\,dy\,dz$, unde $(G) :\ -a \le x \le a,\ -b \le y \le b,\ -c \le z \le c$; rezultă $I_{xy} = \dfrac{8abc^3\varrho_0}{3}$.

**19.** $\dfrac{\pi\varrho_0 r_0^4 h}{2} = M\cdot\dfrac{r_0^2}{2}$, $M = \varrho_0\pi r_0^2 h$.

**20.** $I_{xy} = \dfrac{7\varrho_0 abc^3\pi}{2}$, $I_{yz} = \dfrac{4\varrho_0 a^3bc}{3}$, $I_{xz} = \dfrac{4\varrho_0 ab^3c\pi}{3}$.

**21.** $I_x = I_y = \dfrac{\pi\varrho_0}{30\sqrt{2}}(8\sqrt{2}-7)$, $I_z = \dfrac{\pi\varrho_0}{15\sqrt{2}}(4\sqrt{2}-5)$, $I_0 = \dfrac{\pi\varrho_0}{5}(2-\sqrt{2})$.

**22.** $u = \pi\varrho_0\Big\{a^2\ln\left|\dfrac{h-z+\sqrt{a^2+(h-z)^2}}{z-\sqrt{a^2+z^2}}\right| + (h-z)\sqrt{a^2+(h-z)^2} + z\sqrt{a^2+z^2} - [(h-z)|h-z| + z|z|]\Big\}$, (se studiază cazurile $z > h$, $0 \le z \le h$, $z < 0$).

**23.** $X = Y = 0$, $Z = \begin{cases} -\dfrac{kmM}{a\,|a|}, & \text{dacă } |a| > R, \\ -\dfrac{mkMa}{R^3}, & \text{dacă } |a| \le R. \end{cases}$

# Capitolul 6

**§1. 14.** $4\pi R(R - \sqrt{R^2 - a^2})$.

**15.** a) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\sqrt{ab}(a+b)$; b) $\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{(a^2+c^2)b^2\cos^2\varphi + (b^2+c^2)a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \dfrac{1}{2}L(\Gamma)$, cu $\Gamma$ elipsa cu semiaxele $a\sqrt{b^2+c^2}$ şi $b\sqrt{a^2+c^2}$; c) $\dfrac{133}{5}$.

**16.** a) $\dfrac{2\pi a^2}{3}(2\sqrt{2}-1)$; b) $2a^2$; c) $\pi\left[a\sqrt{a^2+b^2} + b^2\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right]$.

**17.** a) $\dfrac{\pi(\sqrt{2}+1)}{2}$; b) $\pi^2 a\sqrt{a^2+1} + \pi^2\ln(a+\sqrt{a^2+1})$; c) $\dfrac{\pi a^4\sin\alpha\cos^2\alpha}{2}$;

d) $\dfrac{\sqrt{1+k^2}\,a^6\pi}{24}(80k^2+7)$.

**18.** $M = \dfrac{\varrho_0\pi\sqrt{2}a^2}{4}$, $x_0 = \dfrac{a}{2}$, $y_0 = 0$, $z_0 = \dfrac{16a}{9\pi}$. **19.** $I_z = \dfrac{4\pi a^4\varrho_0}{3}$.

**20.** a) $\dfrac{2\pi R^7}{105}$; b) $I_1 = 0$, $I_2 = \dfrac{4\pi abc}{3}$, $I_3 = 0$; c) $\dfrac{8\pi R^3}{3}(a+b+c)$.

**21.** a) $-\dfrac{\pi a^6}{8}$; b) 0. **22.** a) $\dfrac{a^6}{8}$; b) 0; c) $-\dfrac{\pi h^4}{2}$; d) 0.

**§2. 14.** $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = 1$ (sfera cu centrul în $A(a,b,c)$ şi de rază 1).

**16.** a) $3f(r)+rf'(r)$; b) $\operatorname{grad} U \cdot \operatorname{grad} V + U\,\Delta V$. **18.** a) $\vec{0}$; b) $\dfrac{f'(r)}{r}(\vec{r}\times\vec{c})$.

**19.** a) $\dfrac{3\pi}{8}$; b) 3. **20.** $2\pi$.

# ANEXĂ

În această anexă vom prezenta ecuaţiile carteziene şi/sau parametrice ale principalelor curbe şi suprafeţe care apar pe parcursul culegerii, precum şi imaginile lor într-un sistem ortogonal de axe din plan sau spaţiu.

## §1. CURBE

**1. Cercul.**

Ecuaţia carteziană: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, (Figura A.1.1).

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = a + R\cos t \\ y = b + R\sin t, \ \ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$

**2. Elipsa.**

Ecuaţia carteziană: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$, (Figura A.1.2).

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t, \ \ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$

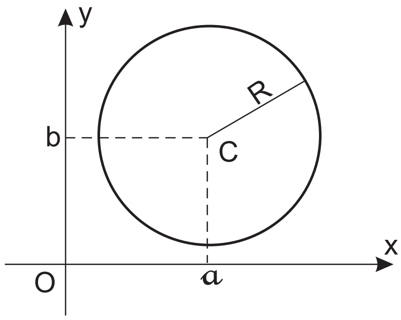


Figura A.1.1

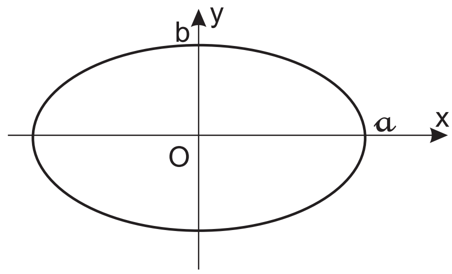


Figura A.1.2

**3. Hiperbola.**

a) Ecuaţia carteziană: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$, (Figura A.1.3).

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos t} = a\sec t \\ y = b\,\mathrm{tg}\, t, \ \ t \in [-\pi, \pi] \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}\}; \end{cases}$ sau $\begin{cases} x = \pm a\,\mathrm{ch}\, t \\ y = b\,\mathrm{sh}\, t, \ \ t \in I\!R. \end{cases}$

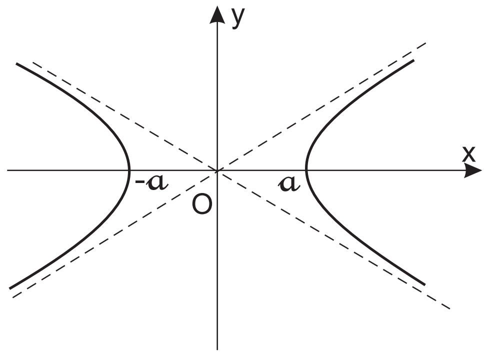


Figura A.1.3

b) Ecuaţia carteziană: $xy = c^2$, (Figura A.1.4).

Ecuaţiile parametrice: $x = t$, $y = \dfrac{c^2}{t}$, $t \in I\!R^*$,

(este hiperbola de la punctul a) cu $a = b = c\sqrt{2}$ rotită în jurul lui $O$ cu 45° în sens direct trigonometric).

c) Ecuaţia carteziană: $xy = -c^2$, (Figura A.1.5).

Ecuaţiile parametrice: $x = t$, $y = -\dfrac{c^2}{t}$, $t \in I\!R^*$,

(este hiperbola de la punctul a) cu $a = b = c\sqrt{2}$ rotită în jurul lui $O$ cu 45° în sens invers trigonometric).

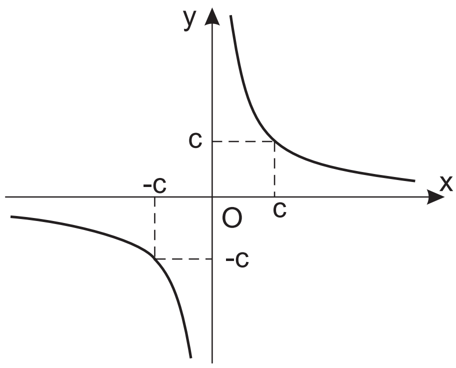


Figura A.1.4

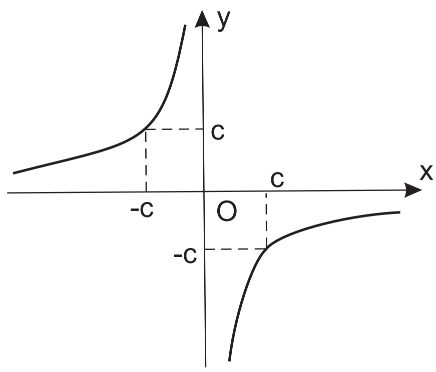


Figura A.1.5

**4. Parabola.**

Ecuaţia carteziană: $y^2 = 2px$, (Figura A.1.6).

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2p}t^2 \\ y = t, \quad t \in I\!R. \end{cases}$

**5. Cicloida.**

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \text{(Figura A.1.7).} \end{cases}$

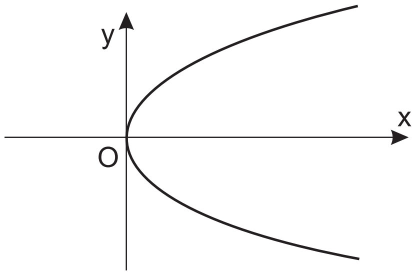


Figura A.1.6

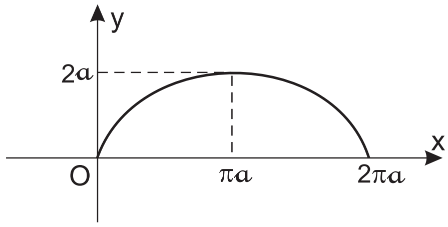


Figura A.1.7

**6. Astroida.**

Ecuaţia carteziană: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, (Figura A.1.8).

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$

**7. Cardioida.**

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\sin t - \sin 2t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \text{(Figura A.1.9).} \end{cases}$

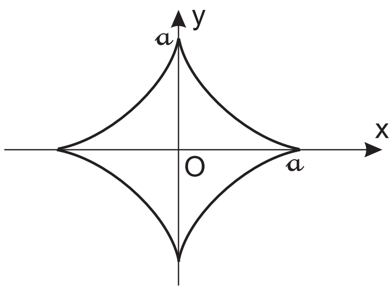


Figura A.1.8

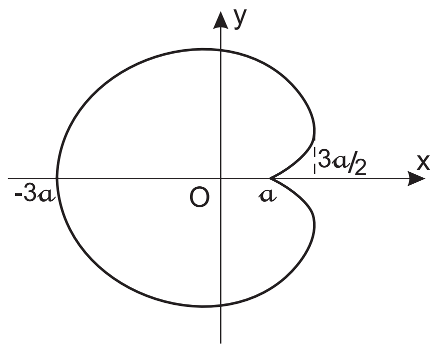


Figura A.1.9

**8. Lemniscata.**

a) Ecuaţia carteziană: $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, (Figura A.1.10).

Ecuaţia polară: $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = a\cos\varphi \cdot \sqrt{\cos 2\varphi} \\ y = a\sin\varphi \cdot \sqrt{\cos 2\varphi}, \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]. \end{cases}$

b) Ecuaţia carteziană: $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$, (Figura A.1.11).

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = a\cos\varphi \cdot \sqrt{\sin 2\varphi} \\ y = a\sin\varphi \cdot \sqrt{\sin 2\varphi}, \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right], \end{cases}$

(este lemniscata de la punctul a) rotită cu $45°$ în sens direct trigonometric).

**9. Foliul lui Descartes.**

Ecuaţia carteziană: $x^3 + y^3 = 3axy$, $(a > 0)$, (Figura A.1.12).

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}, \quad t \in I\!R \setminus \{-1\}. \end{cases}$

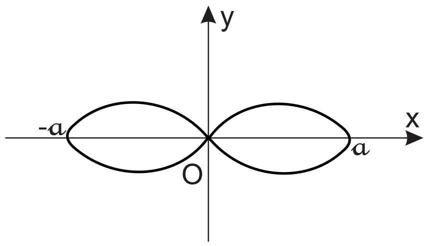


Figura A.1.10

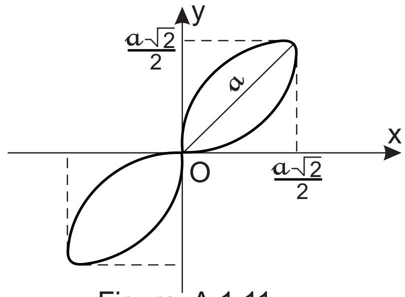


Figura A.1.11

**10. Spirala lui Arhimede.**

Ecuaţia polară: $r = a\varphi$, $\varphi \in [0, \infty)$, (Figura A.1.13),
(zona punctată corespunde lui $\varphi \in (-\infty, 0)$).

Ecuaţia carteziană: $\dfrac{y}{x} = \operatorname{tg} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}$.

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = at\cos t \\ y = at\sin t, \quad t \in I\!R_+. \end{cases}$

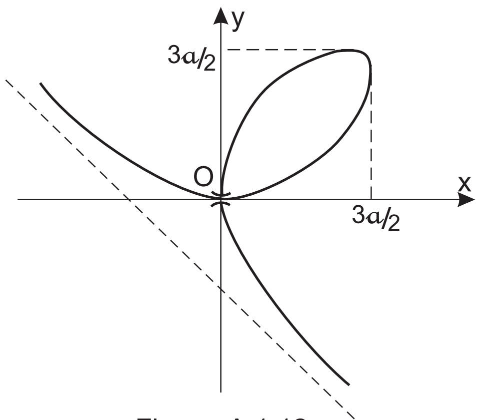


Figura A.1.12

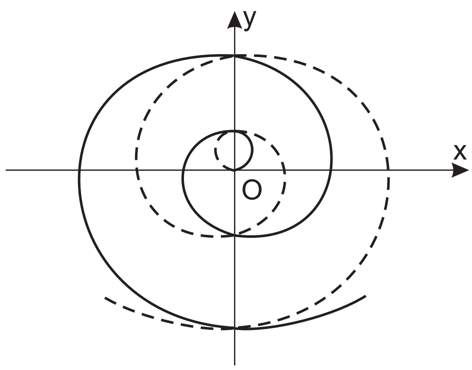


Figura A.1.13

**11. Spirala hiperbolică.**

Ecuaţia polară: $r = \dfrac{a}{\varphi}$, $\varphi \in (0, \infty)$, (Figura A.1.14),
(zona punctată corespunde lui $\varphi \in (-\infty, 0)$).

Ecuaţia carteziană: $\dfrac{y}{x} = \operatorname{tg} \dfrac{a}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = \dfrac{a}{t}\cos t \\ y = \dfrac{a}{t}\sin t, \quad t \in I\!R_+^*. \end{cases}$

**12. Spirala logaritmică.**

Ecuaţia polară: $r = e^{a\varphi}$, (sau $r = be^{a\varphi}$), $\varphi \in I\!R$, (Figura A.1.15).

Ecuaţia carteziană: $\dfrac{y}{x} = \operatorname{tg} \dfrac{\ln\sqrt{x^2+y^2}}{a}$.

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = e^{at}\cos t \\ y = e^{at}\sin t, \quad t \in I\!R. \end{cases}$

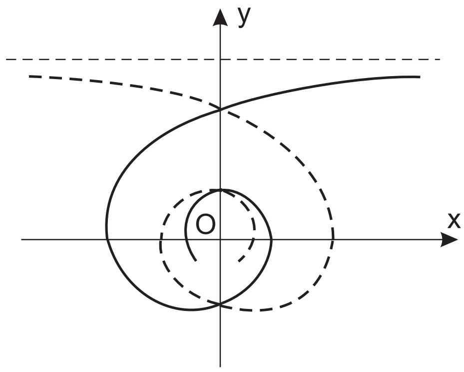


Figura A.1.14

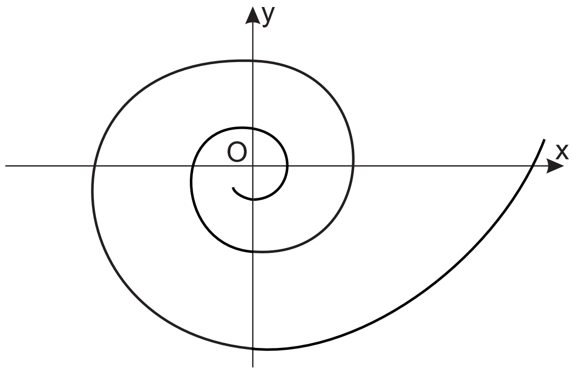


Figura A.1.15

**13. Elicea circulară** (linia elicoidală).

Ecuaţiile carteziene: $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ \operatorname{tg}\dfrac{z}{b} = \dfrac{y}{x} \end{cases}$ sau $\begin{cases} x = a\cos\dfrac{z}{b} \\ y = a\sin\dfrac{z}{b}, \end{cases}$ (Figura A.1.16).

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt, \quad t \in I\!R. \end{cases}$

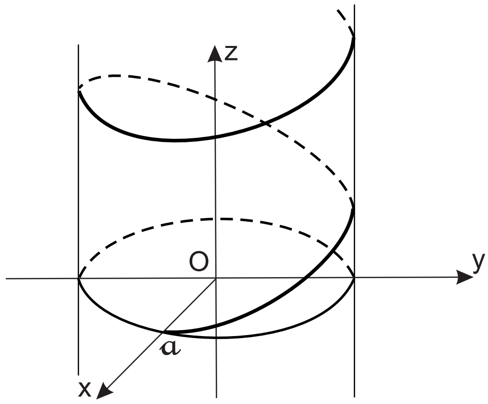


Figura A.1.16

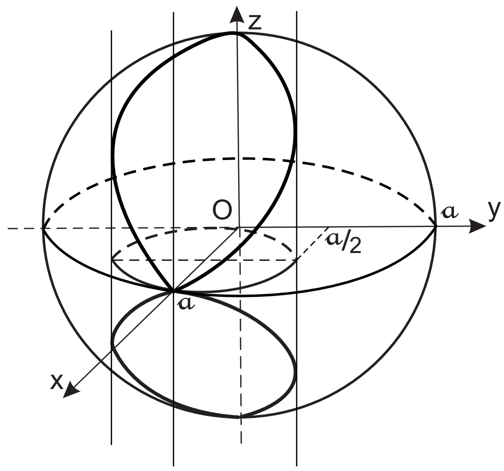


Figura A.1.17

**14. Curba lui Viviani.**

Ecuaţiile carteziene: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = ax, \end{cases}$ (Figura A.1.17).

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = a\cos^2\varphi \\ y = a\sin\varphi\cos\varphi \\ z = \pm a|\sin\varphi|, \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]. \end{cases}$

# §2. SUPRAFEŢE

**1. Sfera.**

Ecuaţia carteziană: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$, (Figura A.2.1).

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = a + R\cos u \sin v \\ y = b + R\sin u \sin v \\ z = c + R\cos v,\ u \in [0, 2\pi],\ v \in [0, \pi]. \end{cases}$

**2. Elipsoidul.**

Ecuaţia carteziană: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, (Figura A.2.2).

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = a\cos u \sin v \\ y = b\sin u \sin v \\ z = c\cos v,\ u \in [0, 2\pi],\ v \in [0, \pi]. \end{cases}$

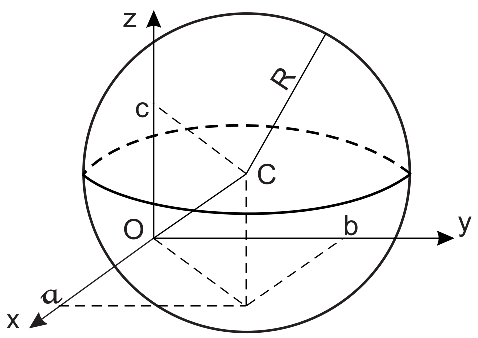


Figura A.2.1

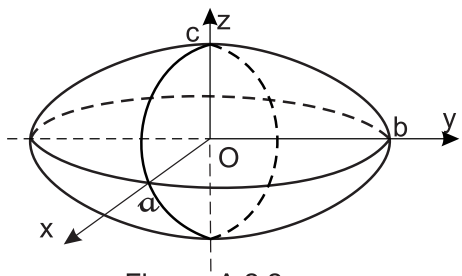


Figura A.2.2

**3. Hiperboloidul cu o pânză.**

Ecuaţia carteziană: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, (Figura A.2.3).

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = a\cos u \operatorname{ch} v \\ y = b\sin u \operatorname{ch} v \\ z = c\operatorname{sh} v,\ u \in [0, 2\pi],\ v \in I\!R \end{cases}$

sau $\begin{cases} x = a\cos u \sec v \\ y = b\sin u \sec v \\ z = c\operatorname{tg} v,\ u \in [0, 2\pi],\ v \in [-\pi, \pi] \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}\}. \end{cases}$

**4. Hiperboloidul cu două pânze.**

Ecuaţia carteziană: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} + 1 = 0$, (Figura A.2.4).

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = a\cos u \operatorname{sh} v \\ y = b\sin u \operatorname{sh} v \\ z = \pm c \operatorname{ch} v, \ u \in [0, 2\pi], \ v \in [0, \infty). \end{cases}$

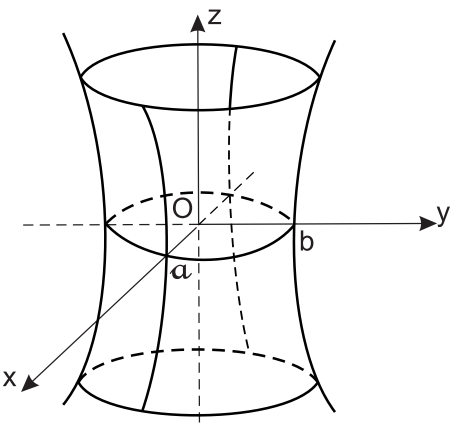

Figura A.2.3

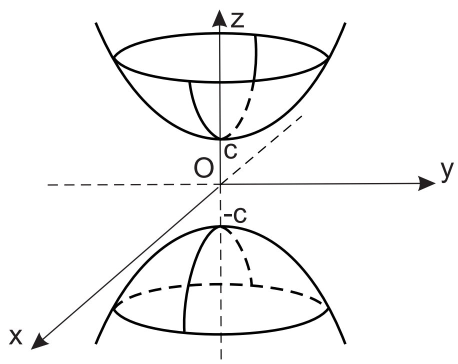

Figura A.2.4

**5. Paraboloidul eliptic.**

Ecuaţia carteziană: $\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z, \ p, \, q > 0$, (Figura A.2.5).

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = \sqrt{pu}\, \cos v \\ y = \sqrt{qu}\, \sin v \\ z = \dfrac{u}{2}, \ u \in [0, \infty), \ v \in [0, 2\pi]. \end{cases}$

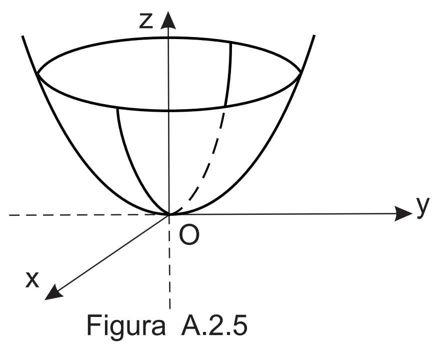

Figura A.2.5

**6. Paraboloidul hiperbolic.**

a) Ecuaţia carteziană: $-\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z, \ p, \, q > 0$, (Figura A.2.6).

Ecuaţiile parametrice:

$\begin{cases} x = \sqrt{pu}\operatorname{tg} v \\ y = \sqrt{qu}\sec v \\ z = \dfrac{u}{2}, \ u \in [0, \infty), \ v \in [-\pi, \pi] \setminus \left\{\pm\dfrac{\pi}{2}\right\} \end{cases}$ şi $\begin{cases} x = \sqrt{-pu}\sec v \\ y = \sqrt{-qu}\operatorname{tg} v \\ z = \dfrac{u}{2}, \ u \in (-\infty, 0), \ v \in [-\pi, \pi] \setminus \left\{\pm\dfrac{\pi}{2}\right\}. \end{cases}$

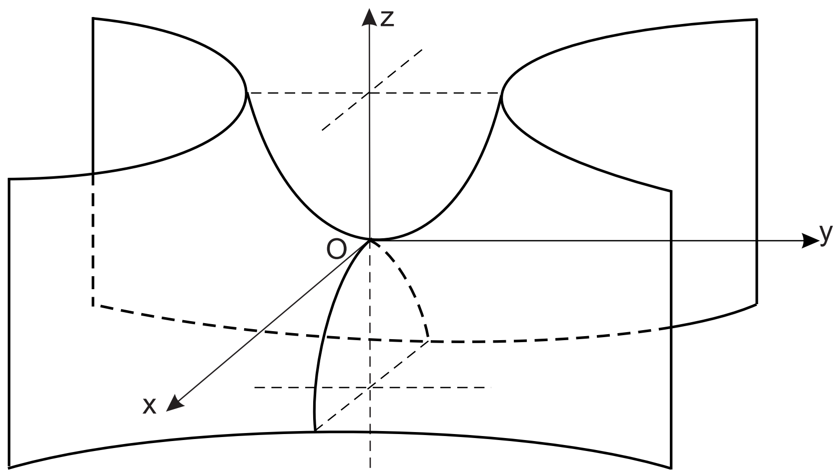


Figura A.2.6

b) Ecuaţia carteziană: $z = xy$, (Figura A.2.7).

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = uv, \ u, v \in I\!\!R, \end{cases}$

(este paraboloidul hiperbolic de la punctul a) cu $p = q = 1$ rotit în jurul axei $Oz$ cu $45°$ în sens invers trigonometric).

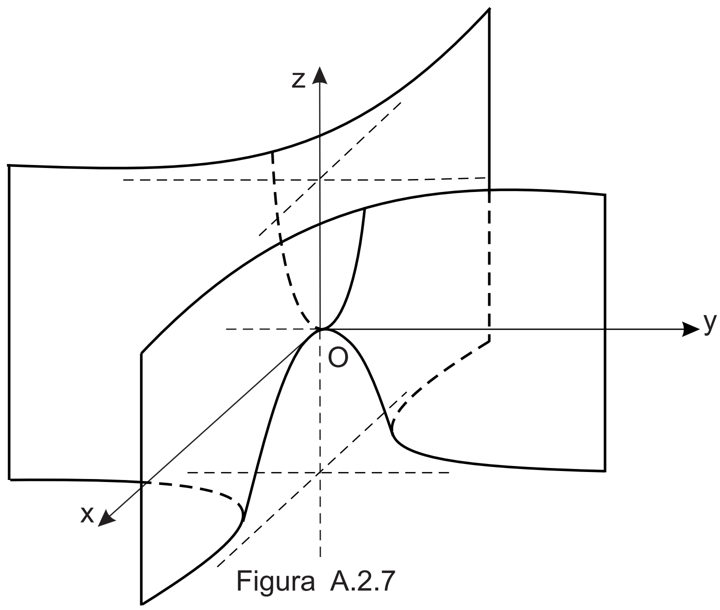


Figura A.2.7

### 7. Cilindrul.

a) **Cilindrul eliptic.**

Ecuaţia carteziană: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, (Figura A.2.8).

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = a\cos u \\ y = b\sin u \\ z = v, \;\; u \in [0, 2\pi], \;\; v \in I\!R. \end{cases}$

b) **Cilindrul hiperbolic.**

Ecuaţia carteziană: $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, (Figura A.2.9).

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = a\,\mathrm{tg}\, u \\ y = \dfrac{b}{\cos u} \\ z = v, \;\; u \in [-\pi, \pi] \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}\}, \;\; v \in I\!R. \end{cases}$

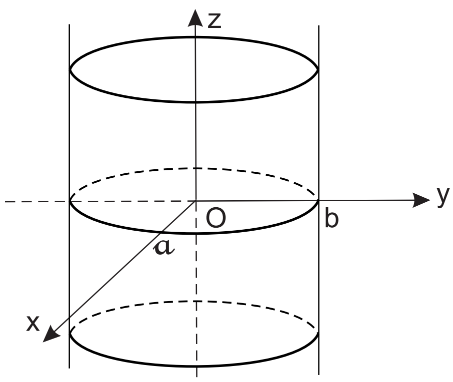


Figura A.2.8

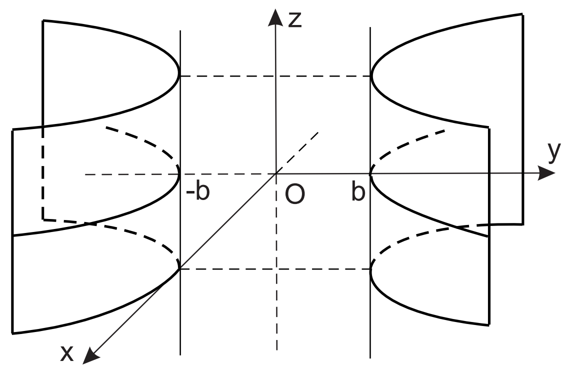


Figura A.2.9

c) **Cilindrul parabolic.**

Ecuaţia carteziană: $x^2 = 2py$, (Figura A.2.10).

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = u \\ y = \dfrac{1}{2p}u^2 \\ z = v, \;\; u, v \in I\!R. \end{cases}$

**8. Conul.**

a) **Conul eliptic.**

Ecuaţia carteziană: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$, (Figura A.2.11).

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = av\cos u \\ y = bv\sin u \\ z = cv, \;\; u \in [0, 2\pi], \;\; v \in I\!R. \end{cases}$

b) **Conul hiperbolic.**

Ecuaţia carteziană: $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$, (Figura A.2.12).

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = av\operatorname{tg} u \\ y = bv\dfrac{1}{\cos u} \\ z = cv,\ u \in [-\pi, \pi] \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}\},\ v \in I\!R. \end{cases}$

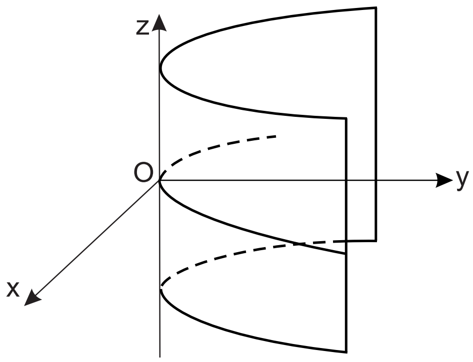

Figura A.2.10

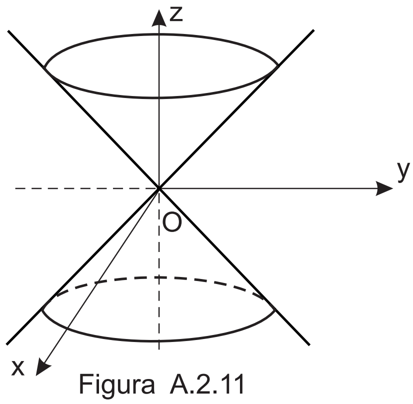

Figura A.2.11

c) **Conul hiperbolic.**

Ecuaţia carteziană: $z^2 = xy$, (Figura A.2.13),

(este conul hiperbolic de la punctul b) cu $a = b = \sqrt{2}$, $c = 1$ rotit cu $45°$ în jurul axei $Oz$ în sens invers trigonometric).

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = \dfrac{v^2}{u} \\ y = u \\ z = v,\ u \in I\!R^*,\ v \in I\!R. \end{cases}$

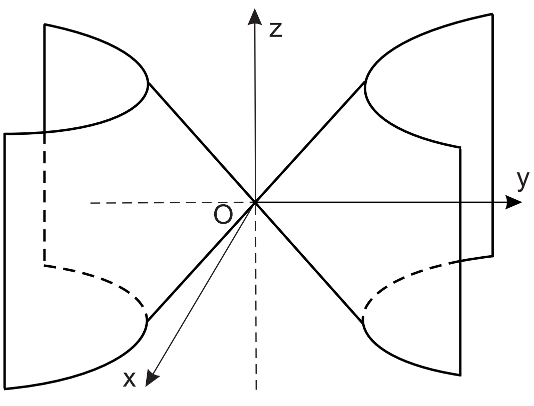

Figura A.2.12

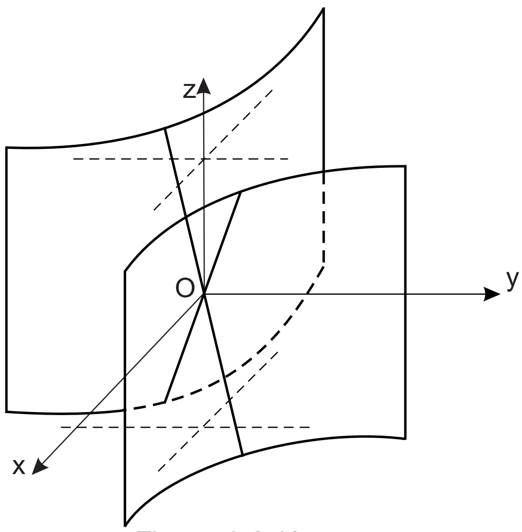

Figura A.2.13

**9. Elicoidul.**

Ecuaţia carteziană: $\operatorname{tg}\dfrac{z}{b} = \dfrac{y}{x}$, (Figura A.2.14),

(este suprafaţa generată de o dreaptă care este paralelă cu planul $Oxy$, intersectează axa $Oz$ şi elicea circulară $(E): x = a\cos v,\ y = a\sin v,\ z = bv$).

Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = bv,\ u \in I\!R_+,\ v \in I\!R. \end{cases}$

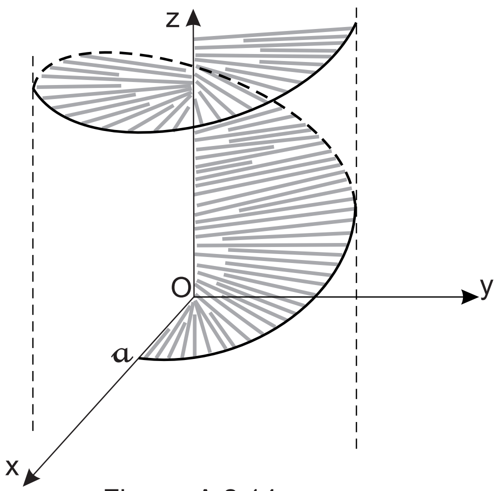


Figura A.2.14

# BIBLIOGRAFIE

**1.** L. Aramă, T. Morozan, Probleme de calcul diferenţial şi integral, Editura Tehnică, Bucureşti, 1978.

**2.** K.H. Bachmann, ... (colectiv), Mică enciclopedie matematică, Editura Tehnică, Bucureşti, 1980.

**3.** D.M. Bătineţu, Probleme de matematică pentru treapta a II-a de liceu - Şiruri, Editura Albatros, Bucureşti, 1979.

**4.** N. Boboc, I. Colojoară, Matematică. Elemente de analiză matematică, Manual pentru clasa a XII-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1984.

**5.** Gh. Bucur, E. Câmpu, S. Găină, Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral, Vol.III, Editura Tehnică, Bucureşti, 1967.

**6.** N. Calistru, Gh. Ciobanu, Curs de analiză matematică, Vol.I, Rotaprint, Institutul Politehnic Iaşi, 1988.

**7.** S. Chiriţă, Probleme de matematici superioare, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989.

**8.** N. Ciorănescu, Curs de algebră şi analiză matematică, Editura Tehnică, Bucureşti, 1958.

**9.** N. Ciorănescu, M.Roşculeţ, Culegere de probleme de algebră şi analiză matematică, Editura Tehnică, Bucureşti, 1959.

**10.** M. Craiu, M. Roşculeţ, Culegere de probleme de analiză matematică, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976.

**11.** I. Crăciun, Gh. Procopiuc, A. Neagu, C. Fetecău, Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială şi programare, Vol.1,2, Rotaprint, Institutul Politehnic Iaşi, 1984.

**12.** B.P. Demidovici, Culegere de probleme şi exerciţii de analiză matematică, Editura Tehnică, Bucureşti, 1956.

**13.** G.M. Fihtenholt, Curs de calcul diferenţial şi integral, Vol.1-3, Editura Tehnică, Bucureşti, 1963-1965.

**14.** I. Filimon, I. Sager, Geometrie analitică şi diferenţială, Editura de Stat Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1962.

**15.** D. Flondor, N. Donciu, Algebră şi analiză matematică, Culegere de probleme, Vol.II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

**16.** S. Găină, E. Câmpu, Gh. Bucur, Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral, Vol.II, Editura Tehnică, Bucureşti, 1966.

**17.** N. Gheorghiu, T. Precupanu, Analiză matematică, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

**18.** Gh. Gussi, O. Stănăşilă, T. Stoica, Matematică. Elemente de analiză matematică, Manual pentru clasa a XI-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1985.

**19.** R. Luca–Tudorache, Analiză matematică. Calculul diferenţial, Editura Tehnopress, Iaşi, 2005.

**20.** R. Luca–Tudorache, Probleme de analiză matematică. Calcul diferenţial, Performantica, Iaşi, 2006.

**21.** C.P. Nicolescu, Teste de analiză matematică, Editura Albatros, Bucureşti, 1984.

**22.** M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, Analiză matematică, Vol.I,II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971.

**23.** A. Precupanu, Bazele analizei matematice, Editura Universităţii "Al.I.Cuza", Iaşi, 1993.

**24.** M.N. Roşculeţ, Analiză matematică, Vol.II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1966.

**25.** Gh. Sireţchi, Calcul diferenţial şi integral, Vol.1,2, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

**26.** A. Şaichin, Exerciţii şi probleme de calcul diferenţial şi integral, Vol.1,2, Editura Tehnică, Bucureşti, 1958.

**27.** Gh. Vrânceanu, Geometrie analitică, proiectivă şi diferenţială, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1962.